**IMPORTANTE**
L'elaborato deve essere scritto a penna. Su ogni foglio consegnato, sulla prima facciata, deve essere indicato il proprio nome cognome e numero di matricola. Fogli non identificabili e parti scritte a matita non verranno corrette. E' vietato l'uso di qualsiasi mezzo di comunicazione (ad esempio telefoni cellulari) nonchè di formulari durante l'esame.

La prova orale è obbligatoria per gli studenti che dovessero ottenere una valutazione inferiore o uguale a 20/30 allo scritto.

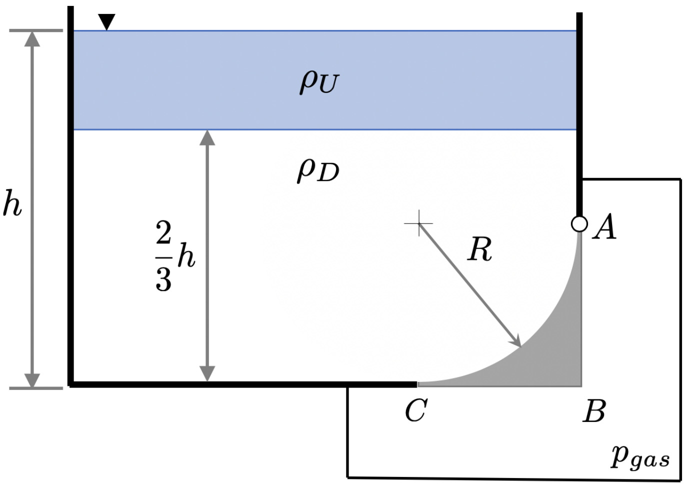
# Esame di Biofluidodinamica del 21/08/2019

## Esercizio n. 1

La paratia in figura è incernierata in A e divide una camera contenente un gas leggero alla pressione assoluta $p_{gas}$ da una piscina contenente due liquidi di diversa densità immiscibili e stratificati come in figura.

1. Calcolare le forze orizzontali e verticali che agiscono sulla paratia.
2. Calcolare il momento rispetto al polo $A$ generato dall'azione delle forze di origine idrostatica dovute ai soli liquidi.
3. Calcolare il valore di pressione $p_{gas}$ tale da mantenere il sistema in equilibrio come in figura.

Si trascuri il peso proprio della paratia e si consideri di misura unitaria l'estensione del sistema in direzione normale al foglio ($b = 1$).




Considero la pressione relativa $p_r = p - (p_{atm} + \rho_U\, g\frac{h}{3})$
Forze

$$F_O^{L_D} = \rho_D g \left(\frac{2}{3}h - \frac{R}{2}\right) Rb$$

$$F_V^{L_D} = \rho_D g Rb \left(\frac{\pi}{4}R + \frac{2}{3}h - R\right)$$

$$F_O^{Gas+L_U+ATM} = F_V^{Gas+L_U+ATM} = Rb\left(p_{gas} - \left(p_{atm} + \rho_U g\frac{h}{3}\right)\right)$$

Momenti

$$M_{F_O^{L_D}} = 0$$

$$M_{F_V^{L_D}} = \rho_D g R^2 b \left(\frac{\pi}{4}R + \frac{2}{3}h - R\right)$$

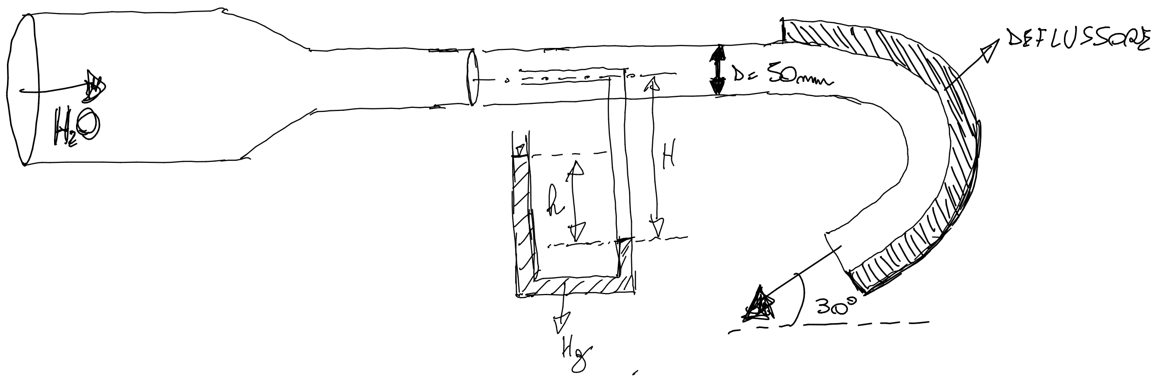
$$M_{F^{Gas+L_U+ATM}} = 2\frac{R^2}{2}b\left(p_{gas} - \left(p_{atm} + \rho_U g\frac{h}{3}\right)\right)$$

Uguagliando i momenti $M_{F_V^{L_D}} = M_{F^{Gas+L_U+ATM}}$ ottengo

$$p_{gas} = \rho_D g \left( \frac{\pi}{4} R + \frac{2}{3} h - R \right) + p_{atm} + \rho_U g \frac{h}{3}$$

# Esercizio n. 2

Un getto d'acqua fuoriesce da un ugello avente diametro $D = 50$mm e impatta un deflettore, come mostrato in figura. Un tubo di Pitot posto in corrispondenza dello sbocco dell'ugello è connesso ad un manometro ad U contenente mercurio ($\rho_{Hg} = 13579 kg/m^3$), le quote in figura siano $H = 1$m e $h = 0.75$m. Si calcoli la velocità dell'acqua in uscita dall'ugello. Si stimi la componente orizzontale della forza esercitata sul deflussore dal getto d'acqua supponendo che la sezione della vena fluida resti inalterata e considerando un fluido perfetto.




Applicando la conservazione del trinomio di Bernoulli lungo una linea di flusso posta lungo l'asse dell'ugello e considereando punto 1 allo sbocco dell'ugello e punto 2 all'interno del tubo di Pitot ottengo

$$\frac{p_1}{\rho_{H_2O}} + \frac{U_1^2}{2} + \cancel{gz_1} = \frac{p_2}{\rho_{H_2O}} + \cancel{\frac{U_2^2}{2}} + \cancel{gz_2}$$

dove $p_1 = p_{atm}$.

Calcolo $p_2$ sfruttando la lettura del manometro, considero punto B interfaccia aria/mercurio nel ramo sinistro del manometro e punto a alla stessa quota del punto b nel ramo destro del manometro.

Ho $p_a = p_b$, inoltre

$$p_a = p_{atm} + \rho_{Hg}\, gh$$

e

$$p_b = p_2 + \rho_{H_2O}\, gH = p_{atm} + \rho_{H_2O} \frac{U_1^2}{2} + \rho_{H_2O}\, gH$$

Ottengo $U_1 = \sqrt{2 \left( \frac{\rho_{Hg}}{\rho_{H_2O}} gh - gH \right)} = 13.42 m/s$

Dalla conservazione della quantità di moto in direzione x e considerando un volume di controllo che ingloba il deflussore, ottengo

$$-\rho U_1^2 A - \rho U_1^2 cos(30) A = F_x$$

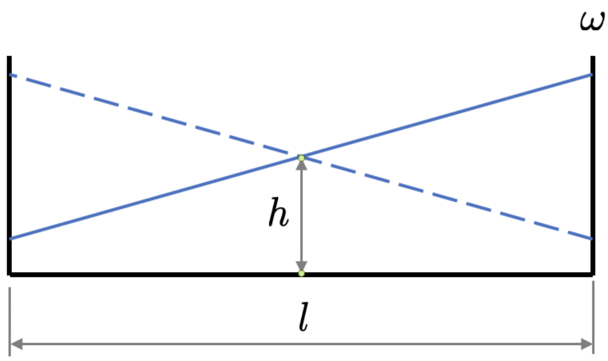
Quindi

$$F_x = -\rho U_1^2 \frac{\pi D^2}{4} (1 + cos(30)) = 660 N(-\mathbf{i})$$

La forza esercitata dal getto sul deflussore ha direzione opposta.

# Esercizio n. 3

Dell'acqua sciaborda in modo continuo da destra a sinistra e viceversa in un contenitore.




La frequenza del moto, $\omega$, è funzione dell'accelerazione di gravità, $g$, della profondità media, $h$, e della lunghezza del contenitore, $l$.

I gruppi adimensionali sono $\Pi_1 = \frac{\omega h^{\frac{1}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}}$ e $\Pi_2 = h/l$

Se h raddoppia uguagliando il primo gruppo adimensionale ottengo

$$\frac{\omega_{2h} \, (2h)^{\frac{1}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}} = \frac{\omega_h (h)^{\frac{1}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}}$$

Quindi $\omega_{2h} = \frac{\omega_h}{\sqrt{2}}$
Per lavorare in similitudine completa anche la larghezza l deve essere raddopiata.

## Esercizio n. 4

Dato il campo di velocità

$$\mathbf{u} = xy^2\mathbf{i} - \frac{1}{3}y^3\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

Il gradiente di velocitá è

$$\nabla\mathbf{u} = \begin{bmatrix} y^2 & 0 & y \\ 2xy & -y^2 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La divergenza (cioè la traccia del gradiente di velocità) è nulla per cui si tratta di un flusso incomprimibile.

L'accelerazione $\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} = (\frac{1}{3}xy^4, \frac{1}{3}y^5, \frac{2}{3}xy^3)$. Valutando nel punto $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ ottengo $\mathbf{a} = (\frac{16}{3}, \frac{32}{3}, \frac{16}{3})$.

Il tensore degli sforzi viscosi per un fluido Newtoniano incomprimibile è

$$\mathbf{T} = \mu \left(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^t\right)$$

Considerando viscosità unitaria ottengo

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2y^2 & 2xy & y \\ 2xy & -2y^2 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}$$

Lo sforzo su una superficie di normale $\mathbf{i}$ è $\mathbf{t} = (2y^2, 2xy, y)$.