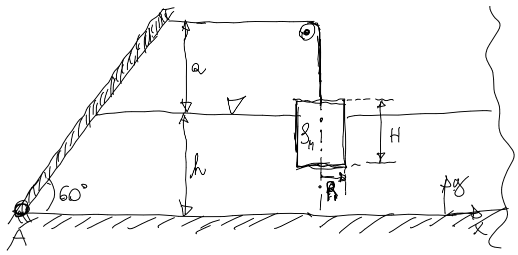
Correzione Esame di Biofluidodinamica del 31/01/2019

Esercizio n. 1

La paratia rappresentata in figura è libera di ruotare intorno alla cerniera A e separa due bacini contenenti lo stesso fluido di densità ρ. Il peso della paratia sia trascurabile e sia b l'estensione della paratia in direzione perpendicolare al foglio. Calcolare: 1) la forza idrostatica risultante agente sulla paratia, 2) il momento dovuto alle forze idrostatiche (rispetto al punto A).



Forze idrostatiche su paratia inclinata

$$F_o = \frac{1}{2}\rho g h^2 b$$

$$F_v = \frac{1}{2}\rho g \frac{h^2}{tg(60)} b$$

Momenti

$$M_{F_o} = F_o \frac{1}{3} h = \frac{1}{6}\rho g h^3 b$$

$$M_{F_v} = F_v \frac{1}{3}\frac{h}{tg(60)} = \frac{1}{18}\rho g h^3 b$$

Momento risultante forze idrostatiche sulla paratia

$$M_l = \frac{2}{9}\rho g h^3 b$$

Calcolo della forza esercitata dalla fune sul cilindro

$$F_f = g\pi R^2 H(\rho_M - 0.9\rho)$$

Momento della forza esercita dalla fune sula paratia

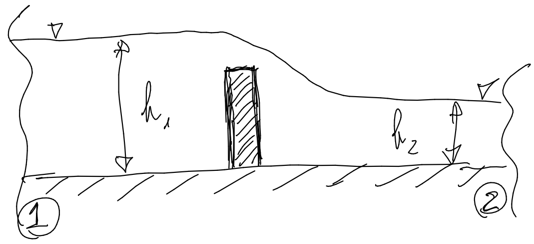
$$M_{F_f} = -g\pi R^2 H(\rho_M - 0.9\rho)(h+a)$$

Imponendo l'equilibrio $M_l + M_{F_f} = 0$ ottengo

$$\rho_M = 0.9\rho + \frac{h^3 b \frac{2}{9}}{\pi R^2 (h+a) H}\rho$$

Esercizio n. 2

Un fiume supera un ostacolo (stramazzo) come mostrato in figura. Supponendo che la pressione relativa sulle sezioni 1 e 2 sia equivalente alla pressione idrostatica e trascurando l'attrito sul fondo, calcolare la forza esercitata dal fluido sullo stramazzo in funzione della portata $\dot{Q}$, della quota del pelo libero a monte e a valle dell'ostacolo $h_{1,2}$, della larghezza dell'ostacolo b (equivalente alla larghezza del letto del fiume), e delle proprietà del fluido.



Dalla conservazione della quantita di moto in direzione x

$$-\rho U_1^2 A_1 + \rho U_2^2 A_2 = \overline{P}_1 A_1 - \overline{P}_2 A_2 + F_x$$

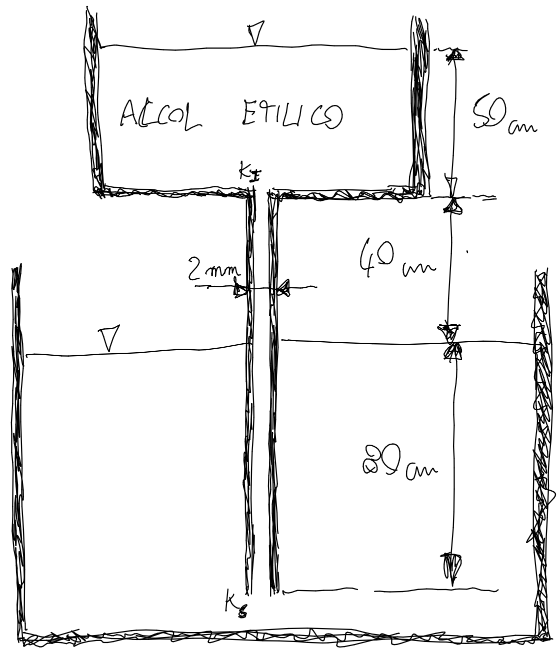
Dove $\overline{P}$ rappresenta la pressione idrostatica media $\overline{P} = \rho g \frac{h}{2}$. Per la conservazione della massa $\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2$, quindi

$$-\rho \frac{\dot{Q}^2}{A_1^2} A_1 + \rho \frac{\dot{Q}^2}{A_2^2} A_2 = \rho g \frac{h_1}{2} A_1 - \rho g \frac{h_2}{2} A_2 + F_x$$

Da cui si ricava $F_x = \rho \frac{\dot{Q}}{b} \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} \right) - \frac{1}{2} \rho g b \left(h_1^2 - h_2^2 \right)$. La forza esercitata dal fluido sullo stramazzo è $-F_x$.

Esercizio n. 3

Nel sistema mostrato in figura il fluido sia alcol etilico a $20°C$ ($\rho = 0.789 \frac{g}{cm^3}, \mu = 0.012 \frac{g}{cm\, s}$) e i recipienti siano molto ampi. Nell'ipotesi di flusso stazionario e prendendo in considerazione le perdite concentrate e distribuite si calcoli il la portata $\dot{Q}$ nel deflussore e si verifichi l'assunzione di flusso laminare. Sia $k_i = 0.5$ il coefficiente di perdita all'imbocco e $k_s = 1.5$ il coefficiente di perdita allo sbocco.



Dall'equazione di conservazione dell'energia meccanica ponendo le superfici del volume di controllo in corrispondenza delle superfici dei recipiente (lato fluido), del deflussore (lato fluido), e del pelo libero si ottiene

$$\int_{\partial V} \rho \left(\frac{P}{\rho} + gz + \frac{U^2}{2} \right) \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS = -\mathcal{E} + \dot{W}_{fv}$$

Utilizzando la conservazione della massa e ponendo $\mathcal{E} = \dot{m}\frac{\Delta P_{fv}}{\rho}$ ottengo

$$-\left(\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{U_1^2}{2} \right) + \left(\frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{U_2^2}{2} \right) = -\frac{\Delta P_{fv}}{\rho}$$

dove i pedici 1 e 2 si riferiscono al pelo libero superiore e inferiore, rispettivamente. Dato che $P_1 = P_2 = P_{\text{atm}}$ e $U_1^2 = U_2^2 \simeq 0$, ottengo

$$g(z_1 - z_2) = \frac{\Delta P_{fv}}{\rho}$$

Con

$$\frac{\Delta P_{fv}}{\rho} = \left(f\frac{L}{D} + \sum k \right) \frac{U^2}{2},$$

dove U^2 è la velocità nel deflussore, L, D sono la lunghezza e il diametro del deflussore, e supponendo flusso laminare ottengo

$$\frac{\Delta P_{fv}}{\rho} = \left(\frac{64}{Re}\frac{L}{D} + \sum k \right) \frac{\dot{Q}^2}{2A^2} = \frac{128\dot{Q}\mu L}{\rho\pi D^4} + \frac{8\dot{Q}^2}{\pi D^4}\sum k.$$

Sostituendo nell'equazione dell'energia ottengo un'equazione di secondo grado per $\dot{Q}$

$$8\dot{Q}^2\sum k + \frac{128\dot{Q}\mu L}{\rho} - \pi D^4 g(z_1 - z_2) = 0$$

I coefficienti (quadratico, lineare, constante) sono a=16, b=233.612, c=−443.794 da cui ottengo $\dot{Q} \simeq 1.70\frac{cm^3}{s}$. Calcolando il numero di Reynolds verifico l'assunzione di flusso laminare.

Domanda

Il moto ondoso di un fluido incomprimibile imapatta una parete solida monstrando un andamento sinusoidale. Il moto è bidimensionale con l'asse x perpendicolare alla parete e l'asse y parallelo alla parete. La componente della velocità in direzione x in prossimità della parete sia

$$u = Ax\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

dove A e T sono costanti che rappresentano l'ampiezza e il periodo dell'onda. Determinare la componente y della velocità nell'ipotesi di flusso irrotazionale e supponendo che il livello medio dell'acqua resti costante. Determinare le componenti dell'accelerazione in direzione x e y.

Dall'imposizione del vincolo di incomprimibilità ottengo $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -A\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

Integrando ottengo $v = -Ay\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + f(x)$

Imponendo l'irrotazionalità $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Quindi $f'(x) = 0$ e $f(x) = C$. $C = 0$ affinchè il livello medio dell'acqua resti costante.

Ho ottenuto $\mathbf{U} = Ax\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\mathbf{i} - Ay\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\mathbf{j}$

Per calcolare l'accelerazione valuto la derivata materiale

$$\mathbf{a} = \left[Ax\left(\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + A\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)\right]\mathbf{i} + \left[Ay\left(-\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + A\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)\right]\mathbf{j}$$