Compito di Biofluidodinamica del 15 Febbraio 2018
Correzione prova scritta

Problema n. 1

Fluido di sinistra (momenti positivi uscenti).
La retta d'azione della forza risultante per il tratto AB passa per il punto D (braccio nullo).
Porzione rettilinea (tratto AD)

$$\begin{aligned} F_V &= \rho g H R b \\ M_{left} = M_{F_V} &= \frac{1}{2}\rho g H R^2 b \end{aligned} \tag{1}$$

Fluido di destra (momenti positivi uscenti).
Porzione rettilinea (tratto DC)

$$\begin{aligned} F_V &= \rho g h R b \\ M_{F_V} &= -\frac{1}{2}\rho g h R^2 b \end{aligned} \tag{2}$$

Porzione curvilinea (tratto BC)

$$\begin{aligned} F_O &= \rho g \left(h + \frac{R}{2}\right) R b \\ F_V &= \rho g h R b + \rho g R^2 b \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Applico le forze nel centro della circonferenza.

$$\begin{aligned} M_{F_O} &= -\rho g h R^2 b - \frac{1}{2}\rho g R^3 b \\ M_{F_V} &= \rho g h R^2 b + \rho g R^3 b \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

$$M_{right} = -\frac{1}{2}\rho g h R^2 b + \rho g R^3 b \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Imponendo $M_l + M_r = 0$ ottengo $H - h = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) R (6pt)$.

Problema n. 2

Per lavorare in similutudine

$$Re_m = Re_p \tag{5}$$

$$\frac{\rho_m U_m D_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p U_p D_p}{\mu_p} \tag{6}$$

$$\frac{\rho_m \frac{Q_m}{A_m} D_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p \frac{Q_p}{A_p} D_p}{\mu_p} \tag{7}$$

Ottengo $Q_p = \frac{\rho_m}{\rho_p}\frac{\mu_p}{\mu_m}\frac{D_p}{D_m}Q_m = 1.078Q_m(3pt)$. Imponendo l'uguaglianza del numbero di Eulero ottengo

$$\frac{\Delta P_m}{\Delta P_p} = \frac{\rho_m U_m^2}{\rho_p U_p^2} = \left(\frac{Q_m A_p}{Q_p A_m}\right)^2 = \left(\frac{Q_m D_p^2}{Q_p D_m^2}\right)^2 = 251(3pt)$$

Problema n. 3
Dalla conservazione della quantità di moto in direzione x (asse dell'ugello), utilizzando un volume di controllo che circonta getto e lastra, ottengo

$$-\rho U^2 \frac{\pi}{4}(D_2)^2 = -F$$

Quindi $U = \sqrt{\frac{4F}{\pi\rho(D_2)^2}} = 9.95m/s$ Dalla conservazione della massa

$$U_1 = U_2 \frac{A_2}{A_1} = U_2 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$$

Dalla conservazione del trinomio di Bernoulli tra le sezioni 1 e 2

$$P_1 - P_2 = \rho_{\mathrm{H2O}} \frac{U_2^2}{2}\left(1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right) \simeq 49.1kPa$$

Il manometro a mercurio fornische

$$P_1 - P_2 = (\rho_{\mathrm{Hg}} - \rho_{\mathrm{H20}})\, gh$$

Ottengo $h \simeq 40cm(6pt)$

Problema n. 4
Perchè esista la funzione di corrente deve essere $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$.

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2Kxy}{x^2+y^2} - \frac{2Kxy}{x^2+y^2} = 0 \;\; (1pt)$$

L'espressione per la linea di corrente si può ottenere imponendo $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = -\frac{x}{y}$. Risolvendo ottengo $x^2 + y^2 = C$, cioè circonferenze concentriche aventi come centro l'origine degli assi$(3pt)$.
È possibile verificare che $\nabla \times \mathbf{U} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Infatti $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{k\left(x^2-y^2\right)}{(x^2+y^2)^2}$. Gli sforzi viscosi sono nulli ovunque poichè $\nabla \cdot \mathbf{U} = \nabla \times \mathbf{U} = 0$ e usando il suggerimento ottengo $\nabla^2 \mathbf{U} = 0(3pt)$.

Domanda di teoria (6pt)