Compitino di Biofluidodinamica del 2 Novermbre 2017
Prova scritta

Problema n. 1

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_l &= \rho g R^2 b \mathbf{i}\\ \mathbf{F}_r^1(tratto\ AC) &= -\rho g h R b \mathbf{j}\\ \mathbf{F}_r^2(tratto\ BC) &= -\rho g R b\left(h+\frac{R}{2}\right)\mathbf{i} + \rho g R b\left(h + R - \frac{\pi}{4}R\right)\mathbf{j}\end{aligned}$$

Notare che la somma delle componenti verticali di F_r^1 e F_r^2 è la spinta di Archimede. (4pt)
Momenti delle forze (positivo uscente dal foglio)

$$\begin{aligned}M_l &= F_{lx}\frac{2}{3}R\\ M_r^1 &= -F_{ry}^1\frac{R}{2}\\ M_r^2 &= -F_{rx}^2 R + F_{ry}^2 R\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}F_{lx} &= \rho g R^2 b\\ F_{ry}^1 &= \rho g h R b\\ F_{rx}^2 &= \rho g R b\left(h+\frac{R}{2}\right)\\ F_{ry}^2 &= \rho g R b\left(h + R - \frac{\pi}{4}R\right)\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}M_l &= \frac{2}{3}\rho g R^3 b\\ M_r &= \rho g R^2 b\left(-\frac{h}{2}+\frac{R}{2}-\frac{\pi}{4}R\right)\end{aligned}$$

Imponendo $M_l + M_r = 0$ ottengo $h = \left(\frac{7}{3}-\frac{\pi}{2}\right)R$. (7pt)

Ho anche $M_r = F_{ry}^{Arc}\, x_B + F_{rx}\, y_{cp}$, dove

$$F_{ry}^{Arc} = \rho g R^2 b\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

e

$$F_{rx} y_{cp} = -\rho g R^2 b\left(\frac{h}{2}+\frac{R}{3}\right)$$

Quindi ottengo $x_B = \dfrac{M_r - F_{rx}y_{cp}}{F_{ry}^{Arc}} = \dfrac{10/3-\pi}{4-\pi}R$. (4pt)

Problema n. 2

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 2x - 2x = 0$$

(2pt) Da

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{U} - \rho \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U},$$

con densità e viscosità unitarie, ottengo (4pt)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2 - 2x^3$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2x^2 y - 2x$$

Essendo $\nabla \times \nabla p = \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = -4xy - 2 \neq 0$ il campo di velocità non soddisfa l'equazione di conservazione della quantità di moto. (2pt)

Problema n. 3

$$Stk = f(g, \mu, \rho, U, D)$$

Utilizzando le dipendenze funzionali assegnate

$$Stk = \frac{\mu}{g} f(\rho, U, D)$$

$$\left[\frac{g}{\mu}\right] = [\rho]^a [U]^b [D]^c$$

Risolvendo per a, b, c ottengo $a = -1, b = 1, c = -2$, quindi $Stk = \frac{\mu U}{g \rho D^2}$ (5pt). Ipotizzando the uno dei due gruppi adimensionali sia il numbero di Reynolds $Re = \frac{\rho U D}{\mu}$ mi accorgo che (2pt)

$$Stk \times Re = \frac{U^2}{\rho g} = Fr^2.$$

In realtà $Stk = \frac{Re}{Fr^2}$.