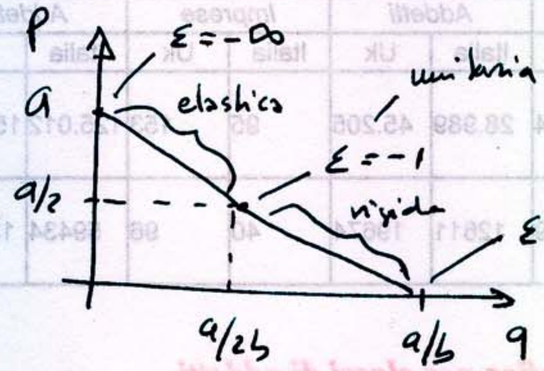
Esercizio 1

c) $\varepsilon = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}$

se $q = \frac{a-p}{b}$ allora $\frac{dq}{dp} = -\frac{1}{b}$

$$\varepsilon = -\frac{1}{b} \cdot \frac{p}{\frac{a-p}{b}} = -\frac{p}{a-p}$$



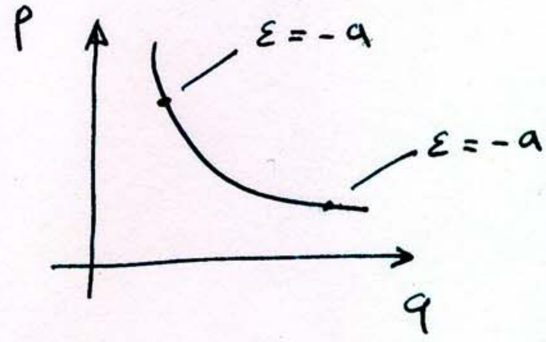
se $p=0 \rightarrow \varepsilon = 0$

se $p = \frac{a}{2} \rightarrow \varepsilon = -1$

se $p = a \rightarrow \varepsilon = -\infty$

Nella formulazione $p = \left(\frac{1}{k} q\right)^{1/a} \rightarrow kp^a = q$

$$\frac{dq}{dp} = kap^{a-1} \rightarrow \varepsilon = kap^{a-1} \cdot \frac{p}{kp^a} = a$$



se $|a| > 1$ la domanda è sempre elastica

se $|a| < 1$ la domanda è sempre rigida

Esercizio 2

a) La funzione di costo totale esprime la relazione tra livello della produzione (y), costo dei fattori produttivi (w, r) e costo della produzione. Per determinarla occorre innanzitutto identificare le funzioni di domanda dei fattori (L^d, K^d) condizionate a y (ossia al livello di output prodotto).

Quindi:

$$\min_{L,K} \quad wL + rK$$

$$\text{s.v.} \quad K^{0.5} L^{0.75} = y$$

Impostiamo il sistema

$$\begin{cases} STS = -\dfrac{w}{r} \\ K^{0.5} L^{0.75} = y \end{cases} \qquad STS = -\frac{\partial y/\partial L}{\partial y/\partial K}$$

$$\frac{\partial y}{\partial L} = 0.75\, K^{0.5} L^{-0.25} \qquad \frac{\partial y}{\partial K} = 0.5\, K^{-0.5} L^{0.75}$$

$$\Rightarrow STS = -\frac{0.75\, K^{0.5} L^{-0.25}}{0.5\, K^{-0.5} L^{0.75}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{K}{L}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{2}\dfrac{K}{L} = -\dfrac{w}{r} & \Rightarrow K = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{w}{r} L \\ K^{0.5} L^{0.75} = y & \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{w}{r} L\right)^{0.5} L^{0.75} = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{w}{r}\right)^{0.5} L^{1.25} = Y \quad \Rightarrow L^{1.25} = \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{r}{w}\right)^{0.5} Y$$

$$\Rightarrow L^{d} = \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{r}{w}\right)^{0.4} Y^{0.8} \quad \Big\} \text{ domanda di } L \text{ condizionata a } Y$$

$$\Rightarrow K = \frac{2}{3}\cdot\frac{w}{r}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{r}{w}\right)^{0.4} Y^{0.8}$$

$$\Rightarrow K^{d} = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{w}{r}\right)^{0.6} Y^{0.8} \quad \Big\} \text{ domanda di } K \text{ condizionata a } Y$$

Sostituiamo nella funzione obiettivo

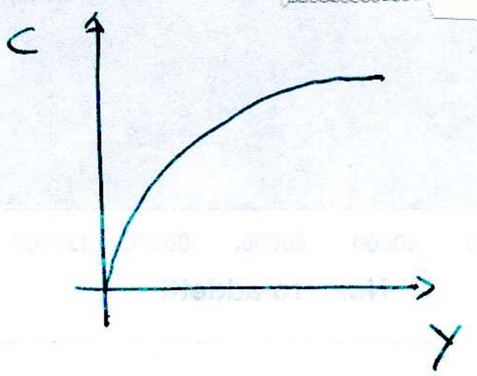
$$C(w,r,Y) = wL^{d} + rK^{d} = w\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{r}{w}\right)^{0.4} Y^{0.8} + r\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{w}{r}\right)^{0.6} Y^{0.8}$$

$$C(w,r,Y) = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{0.4} + \left(\frac{2}{3}\right)^{0.6}\right] w^{0.6} r^{0.4} Y^{0.8}$$

Se si assume come costanti w e r otteniamo

$$C(Y) = H\,Y^{0.8}$$

La funzione di costo è una curva concava verso l'origine



b) I rendimenti di scala esprimono la variazione della produzione in corrispondenza ad una variazione di tutti i fattori produttivi nella stessa proporzione.
Nel nostro caso, la funzione di produzione è:

$$Y = K^{0.5} L^{0.75}$$

$$\Rightarrow Y(tL, tK) = (tK)^{0.5} (tL)^{0.75} = t^{1.25} K^{0.5} L^{0.75}$$

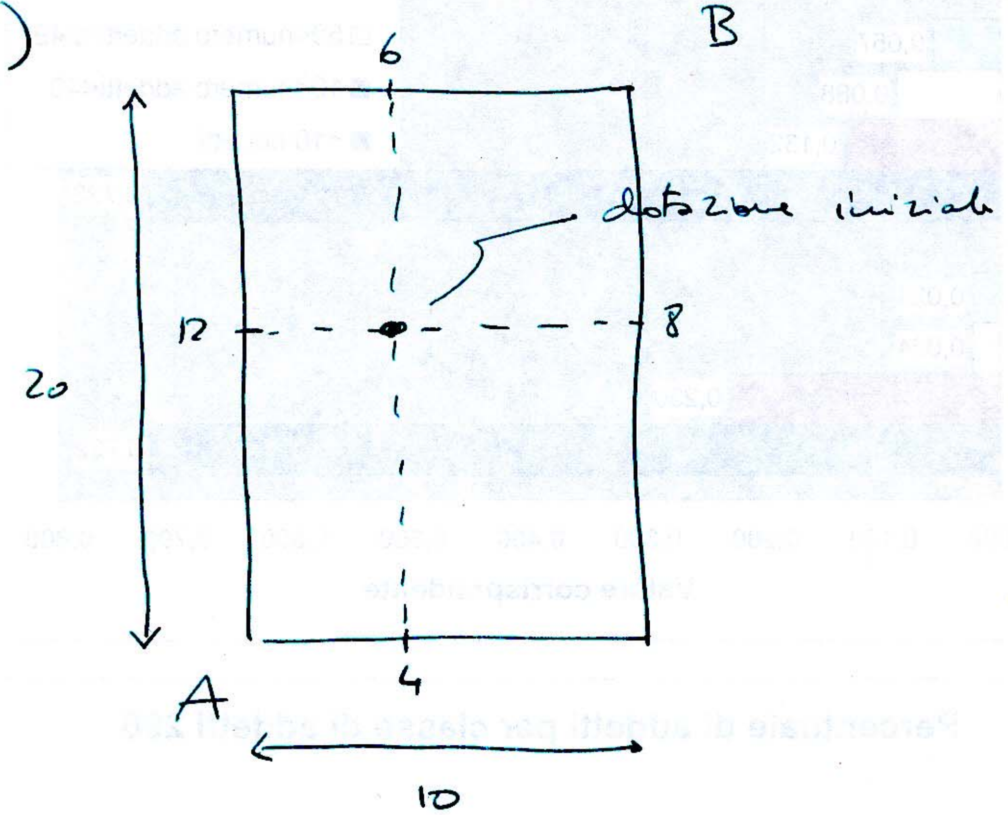
$$= t^{1.25} Y > tY$$

rendimenti di scala crescenti.

Pertanto l'impresa, se deve raddoppiare l'output, dovrà acquistare meno del doppio di (L, K).

Esercizio 4

a)



b) Il consumatore A massimizza

$$\max_{x_A, y_A} \quad x_A y_A$$

$$\text{s.v.} \quad p_x x_A + p_y y_A = p_x 4 + p_y 12$$

$$SMS_A = -\frac{y_A}{x_A}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{y_A}{x_A} = -\dfrac{p_x}{p_y} \longrightarrow \quad y_A = \dfrac{p_x}{p_y} x_A \\ p_x x_A + p_y y_A = 4 p_x + 12 p_y \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad p_x x_A + p_y \frac{p_x}{p_y} x_A = 4 p_x + 12 p_y$$