SOLUZIONI TEMA D'ESAME DEL 10 APRILE 2006

Le soluzioni sono tutte svolte per il tema d'esame previsto per gli studenti con cifra finale nel numero di matricola PARI. Per l'altro tema d'esame sono indicate, quando necessario, le differenti soluzioni (evidenziate in ROSSO).

Esercizio 1

a) La funzione di utilità del consumatore è data da:

$$U = 4x^{1/4}(y-8)^{3/4}$$

Il sistema per determinare le curve di domanda ordinarie è dato dalla condizione di tangenza (SMS = -px/py) e dal fatto che tutto il reddito disponibile è esaurito (px*x+py*y=M). Pertanto il primo passo è il calcolo del SMS.

$$SMS = -\frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y} = -\frac{y-8}{3x}$$

Pertanto il sistema da risolvere è dato dalle due seguenti equazioni:

$$\begin{cases} -\dfrac{y-8}{3x} = -\dfrac{p_x}{p_y} \\ p_x x + p_y y = M \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

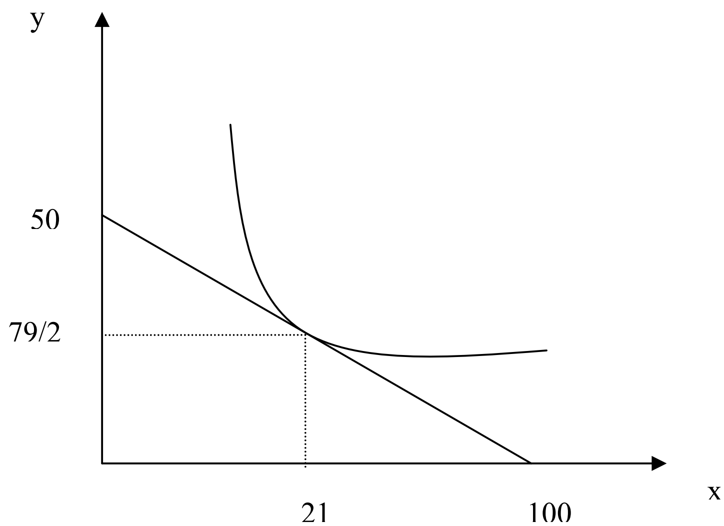
$$x^* = \frac{M-8p_y}{4p_x}, y^* = \frac{3M+8p_y}{4p_y}$$

Queste espressioni rappresentano le funzioni di domanda ordinarie dei due beni. Si noti che per avere $x^* > 0$ occorre che $M > 8p_y$.

b) Se px=2, py=4 e M=200, allora il piano di consumo in equilibrio, sostituendo nelle funzioni di domanda ordinarie, è dato da:

$$x^* = 21, y^* = \frac{79}{2} \qquad \boxed{x^* = \frac{21}{2}, y^* = \frac{79}{2}}$$

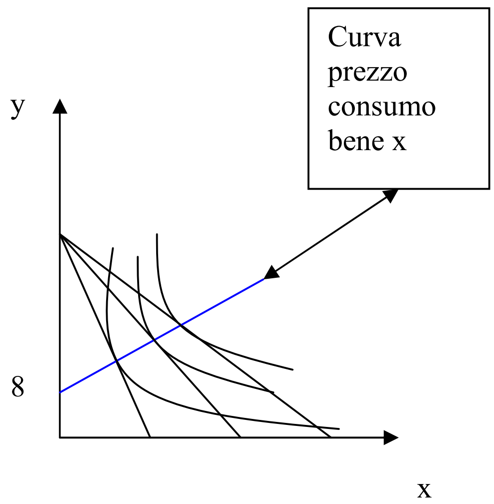
con la seguente rappresentazione grafica:



c) Dobbiamo determinare le curve prezzo consumo di entrambi i beni. La curva prezzo consumo del bene *i* è il luogo dei punti di tangenza tenendo fissi M e il prezzo del bene *j*. Pertanto (dalla condizione di tangenza):

- curva prezzo consumo del bene x: $y = 8 + \frac{3}{4} p_x x$ $\boxed{y = 8 + \frac{3}{4} p_x x}$

- curva prezzo consumo del bene y: $y = 8 + \frac{6}{p_y} x$ $\boxed{y = 8 + \frac{12}{p_y} x}$

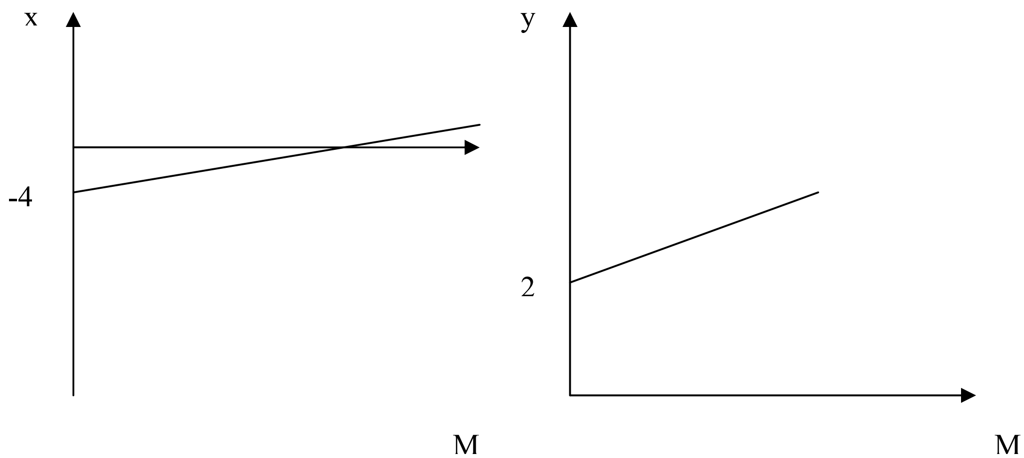


d) Determiniamo le curve di Engel. Dalle funzioni di domanda ordinarie ricaviamo, sostituendo per i prezzi dei beni e lasciando come incognita il reddito:

- curva di Engel per il bene x: $x = -4 + \frac{1}{8}M$ $\boxed{x = -2 + \frac{1}{16}M}$

- curva di Engel per il bene y: $y = 2 + \frac{3}{16}M$ $\boxed{y = 2 + \frac{3}{16}M}$

La loro rappresentazione grafica è la seguente:



e) La curva reddito consumo (dalla condizione di tangenza, sostituendo per i prezzi dei beni) è data da:

$$y = 8 + \frac{3}{2}x \qquad \boxed{y = 8 + 3x}$$

Non è una retta che esce dall'origine degli assi e pertanto le preferenze non sono omotetiche.

f) Per determinare se il bene x è superiore, occorre calcolare l'elasticità rispetto al reddito. Essa è data dalla seguente espressione:

$$\varepsilon_M = \frac{dx}{dM} \times \frac{M}{x}$$

Riprendiamo la curva di Engel del bene x: $x = -4 + \frac{1}{8}M$. Pertanto: $\frac{dx}{dM} = \frac{1}{8}$. Quindi:

$$\varepsilon_M = \frac{1}{8} \times \frac{M}{-4 + \frac{1}{8}M} = \frac{1}{8} \times \frac{8M}{-32 + M} = \frac{M}{-32 + M} > 1.$$

Essendo l'elasticità rispetto al reddito positiva e superiore a 1 il bene x è un bene normale superiore (per livelli di reddito con consumo positivo).

Per determinare se il bene x è un bene complementare al bene y, occorre determinare l'elasticità incrociata, data da:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{dx}{dp_y} \times \frac{p_y}{x}$$

Riprendiamo la funzione di domanda ordinaria del bene x (sostituendo per il proprio e prezzo e per il reddito):

$$x = \frac{200}{8} - p_y \qquad \boxed{x = \frac{200}{16} - \frac{1}{2} p_y}$$

Quindi, calcoliamo: $\frac{dx}{dp_y} = -1$ $\boxed{\frac{dx}{dp_y} = -\frac{1}{2}}$. Pertanto:

$$\varepsilon_{xy} = -1 \times \frac{p_y}{\frac{200}{8} - p_y} = -\frac{p_y}{25 - p_y} < 0 .$$

Se il prezzo del bene y è inferiore 25 allora il bene x è un bene complementare al bene y. Viceversa, diventa un bene sostituto.

Esercizio 2

a) La funzione di produzione è data da: $y = 8L + 4K$

Per determinare i rendimenti di scala dobbiamo confrontare $ty(L, K)$ e $y(tL, tK)$. Otteniamo:

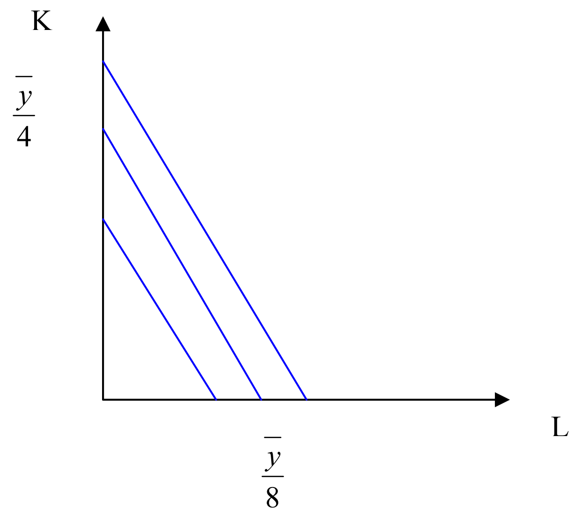
$$ty(L, K) = t(8L + 4K) \qquad\qquad y(tL, tK) = 8(tL) + 4(tK) = t(8L + 4K)$$

Abbiamo quindi rendimenti di scala costanti.

b) Determiniamo e rappresentiamo il generico isoquanto:

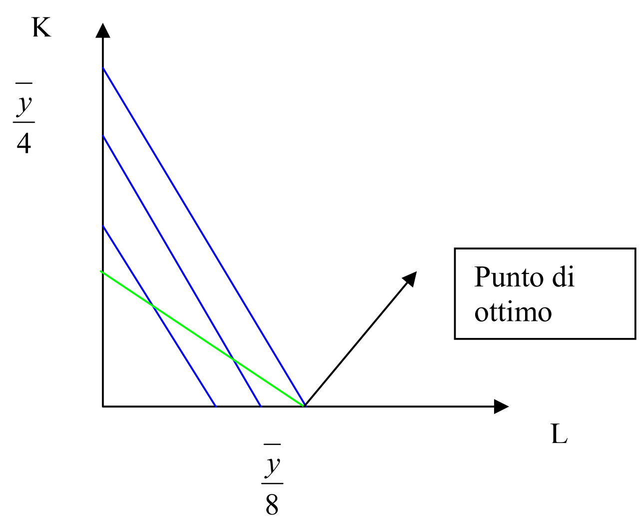
$$\bar{y} = 8L + 4K \Rightarrow K = \frac{\bar{y}}{4} - 2L \qquad \boxed{K = \frac{\bar{y}}{4} - \frac{1}{2} L}$$

Mentre l'isocosto è dato da $K = \frac{C}{r} - \frac{w}{r} L$. La rappresentazione grafica degli isoquanti è la seguente:



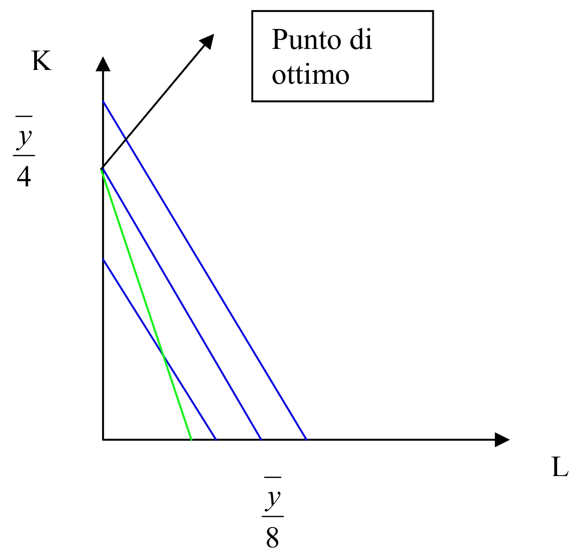
Pertanto abbiamo i seguenti casi:

i) $-\frac{w}{r} > -2 \Rightarrow \frac{w}{r} < 2$ $\boxed{-\frac{w}{r} > -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{w}{r} < \frac{1}{2}}$



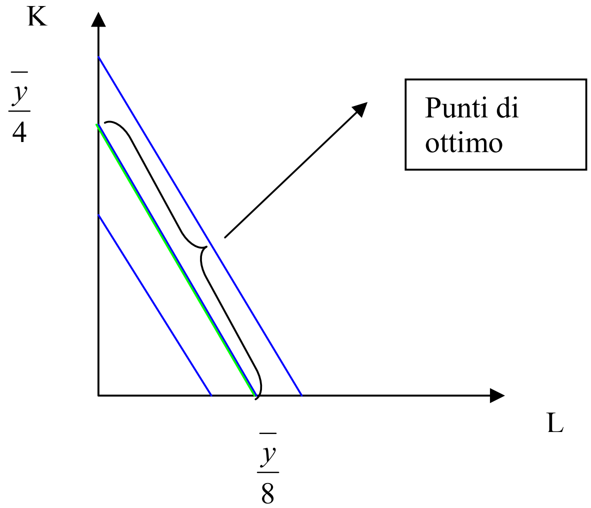
Quindi $L^* = \frac{C}{w}, K^* = 0$.

ii) $-\frac{w}{r} < -2 \Rightarrow \frac{w}{r} > 2$ $\boxed{-\frac{w}{r} < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{w}{r} > \frac{1}{2}}$



Quindi $L^* = 0, K^* = \frac{C}{r}$.

iii) $-\frac{w}{r} = -2 \Rightarrow \frac{w}{r} = 2$ $\boxed{-\frac{w}{r} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{w}{r} = \frac{1}{2}}$



Quindi abbiamo infinite soluzioni.

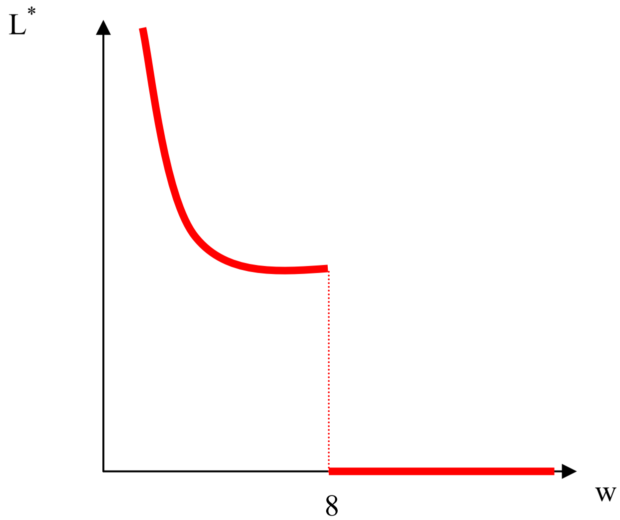
c) Se $r = 4, C = 100$, abbiamo, anche in base alla precedente analisi del punto b), tre casi

i) $-\frac{w}{4} < -2 \Rightarrow w > 8$ $\boxed{-\frac{w}{4} < -\frac{1}{2} \Rightarrow w > 2}$. Quindi $L^* = \frac{C}{w} = \frac{100}{w}$

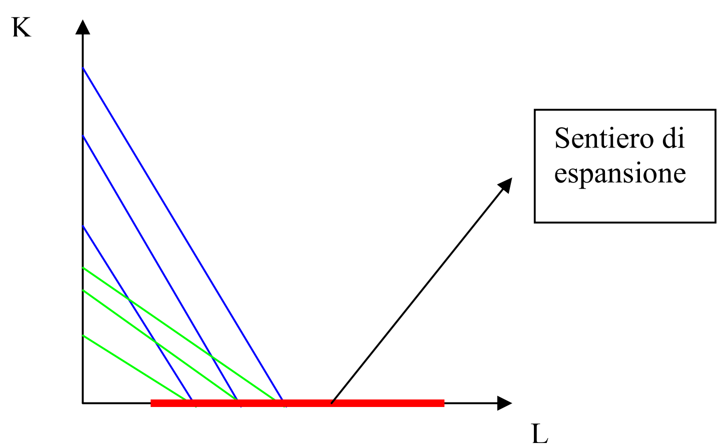
ii) $-\frac{w}{4} > -2 \Rightarrow w < 8$ $\boxed{-\frac{w}{4} > -\frac{1}{2} \Rightarrow w < 2}$. Quindi $L^* = 0$

iii) $-\frac{w}{4} = -2 \Rightarrow w = 8$ $\boxed{-\frac{w}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow w = 2}$. Quindi $L^* \in [0, \frac{100}{8}]$.

La rappresentazione grafica della domanda condizionata del fattore lavoro è la seguente:



d) Se w = 4 e il costo come parametro è pari a C, abbiamo $\frac{w}{r}=1$, pertanto $\frac{w}{r}<STS=2$ $\boxed{\frac{w}{r}>STS=\frac{1}{2}}$ e quindi il sentiero di espansione, essendo $L^*=\frac{C}{4}$ $\boxed{K^*=\frac{C}{4}}$ corre lungo l'asse delle ascisse (l'asse delle ordinate), come mostra il seguente grafico



e) L'impresa risolve il seguente problema di minimo vincolato:

$$\underset{L,K}{MIN}\ wL + rK$$

Sotto il vincolo: $8L + 4K = y$

Abbiamo nuovamente tre casi:

i) se il vincolo di bilancio è meno inclinato del generico isoquanto, allora si acquista solo *L*, con $L^* = \frac{y}{8}$ $L^* = \frac{y}{2}$, e quindi $C(w,r,y) = w\frac{y}{2}$;

ii) se il vincolo di bilancio è più inclinato del generico isoquanto, allora si acquista solo *K*, con $K^* = \frac{y}{4}$, e quindi $C(w,r,y) = r\frac{y}{4}$

iii) se il vincolo di bilancio ha la stessa inclinazione del generico isoquanto la funzione di costo è indeterminata, dato che esistono infinite soluzioni.

f) Nel breve periodo l'impresa risolve il seguente minimo vincolato (non si fornisce la soluzione per il compito dispari)

$$\underset{L}{MIN}\ wL + r(40)$$

Sotto il vincolo: $8L + 40 = y$

da cui si ricava che $L^* = \frac{y-40}{8}$. Solo se $y > 40$ si acquista una quantità positiva di lavoro, altrimenti si utilizza solo la quantità fissa di capitale. La funzione di costo di breve periodo è data da:

$$C^{BP} = \begin{cases} r(10) \xrightarrow{se} y \leq 40 \\ r(10) + w\frac{y-40}{8} \xrightarrow{se} y > 40 \end{cases}$$

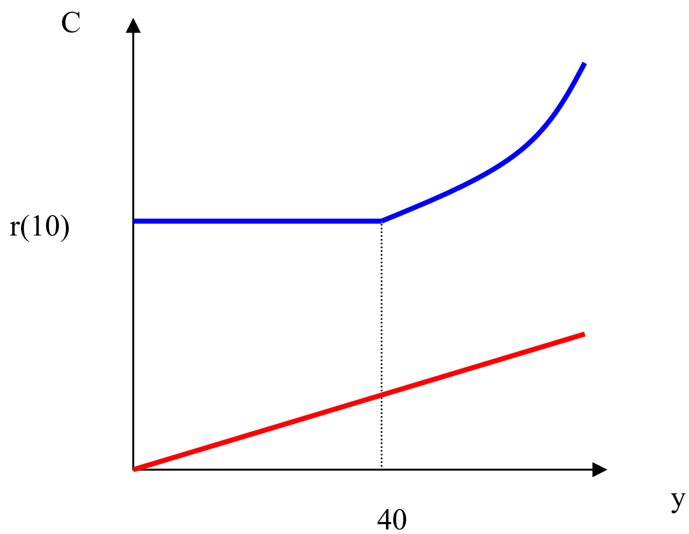
Nel lungo periodo avremmo di nuovo tre casi:

i) $C = w\frac{y}{8}$

ii) $C = r\frac{y}{4}$

iii) C indeterminata.

Abbiamo il seguente grafico (la curva blu è relativa al breve periodo, quella rossa al lungo periodo)


C
r(10)
40
y