LS FIME
a.a. 2008-2009

Teoria delle opzioni

e

Prodotti strutturati

Giorgio Consigli

giorgio.consigli@unibg.it

Uff 258 – ricevimento merc: 11.00-13.00

Programma

1. **Mercato delle opzioni e contratti derivati**
2. **Teoria delle opzioni**
3. **Tecniche di valutazione**
4. **Hedging**
5. **Ingegneria finanziaria**
6. ***Procedure numeriche***
7. **Derivatives disasters**

Opzioni e ProdStrutt 6

6. **Procedure numeriche avanzate**
   - **6a. Volatilità stocastica e struttura a termine della volatilità**
   - **6b. Modelli discontinui**
   - **6c. Struttura finanziaria, valore d’azienda e teoria delle opzioni**

6a Volatilità stocastica

- I moderni mercati finanziari appaiono crescentemente attraversati da:
  - Improvvisi trasferimenti cross-border di masse ingenti di liquidità
  - Cosiddetto *short-termism* degli investitori propensi a rapidi cambiamenti di strategie finanziarie
  - Cosiddette aspettative irrazionali di mercato (a cui negli anni sono state associate bolle speculative, sovrastima di potenzialità di sviluppo (Russia), tassi di cambio insostenibili (Argentina))
  - Forti asimmetrie dei rendimenti sui mercati finanziari con evidenza di fat tails a livello locale e sistemico
  - Inconsistenza con le ipotesi classiche di pricing (BSM) supportata dall'evidenza del cd *volatility smile*)

volatilità stocastica

- In risposta a tali evidenze sono stati sviluppati due filoni di analisi
- Il primo basato su ipotesi di volatilità stocastica. Il secondo su processi discontinui
- Tra i primi consideriamo il modello GARCH(p,q) e la sua specifica GARCH(1,1)

$$s_t = \ln(S_t)$$

$$ds_t = f(s,t)dt + \sigma_t e_t \quad e_t \in N(0,dt)$$

$$z_t = \sigma_t e_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j z_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad \text{GARCH(p,q)}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1, \beta_j \geq 0, \alpha_j \geq 0, j > 0, \alpha_0 > 0$$

volatilità stocastica

- Il modello Arch(q) consentiva già di catturare un grande insieme di dinamiche stocastiche con una componente autoregressiva sulla varianza dei rendimenti
- Il modello garch generalizza introducendo una dipendenza dalla varianza storica. In ambedue i casi si assume nota la dispersione in *t+1* a partire dall'informazione disponibile in *t*

$$
\begin{aligned}
&s_t = \ln(S_t) \\
&ds_t = f(s,t)dt + \sigma_t e_t \quad e_t \in N(0,dt) \\
&\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 z_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad \text{GARCH}(1,1) \\
&\text{nb}: \\
&\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 z_{t-1}^2 + \beta_1 \left(\alpha_0 + \alpha_1 z_{t-2}^2 + \beta_1 \sigma_{t-2}^2\right) \\
&\quad = \ldots = \alpha_0 \sum_{i=0}^{\infty} \beta_1^i + \alpha_1 \sum_{i=0}^{\infty} \beta_1^i z_{t-1-i}^2 \\
&\quad = \frac{\alpha_0}{1-\beta_1} + \frac{\alpha_1}{1-\beta_1} \sigma_{ewma}^2 \\
&\sigma_{ewma,t}^2 = (1-\beta) z_{t-1}^2 + \beta \sigma_{ewma,t-1}^2
\end{aligned}
$$

volatilità stocastica

- Il modello BSM può accomodare facilmente una volatilità deterministica. Merton (1973)

$$\sigma^2 T \rightarrow \int_0^T \sigma_s^2 ds \rightarrow \sqrt{\int_0^T \sigma_s^2 ds}$$

- Il CBOE quota regolarmente un indice di volatilità implicita -- il VIX: si tratta della grandezza più significativa ai fini della valutazione della volatilità forward a partire da quotazioni call e put disponibili sul mercato
- In presenza di una volatilità stocastica può comunque essere definita l'equazione alle derivate parziali, la cui soluzione numerica individua il *fair price* del contingent claim:

$$\frac{\partial f}{\partial S} S(r-q) + \frac{\partial^2 f}{2\partial S^2} S^2 \sigma_t^2 + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \sigma^2} \mu_\sigma + \frac{\partial^2 f}{2\partial \sigma^2} \sigma_t^2 \sigma_\sigma^2 = rf$$

$$\Rightarrow f = e^{-rT} E\left[f(S_T, \sigma_T^2, T) \right]$$

volatilità stocastica

- Da un punto di vista metodologico è possibile tramite MC prezzare opzioni call e put europee sfruttando la recursione

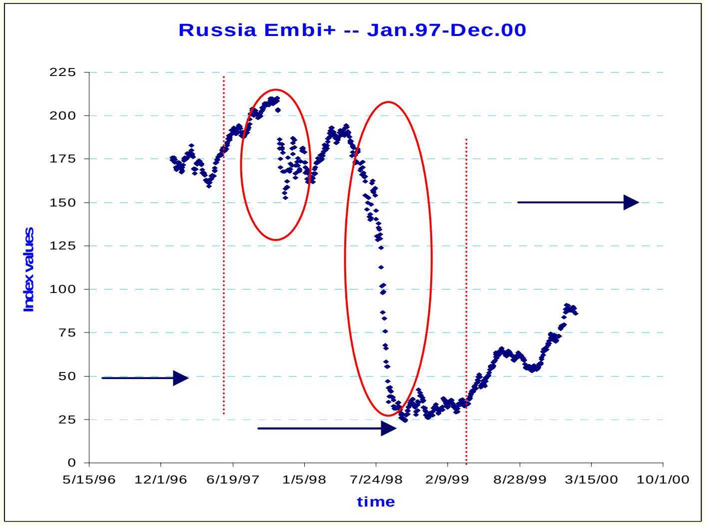
$$S_{0,}\sigma_0^2 \to S_{\Delta t,}\sigma_{\Delta t}^2 \to .. \to S_{t,}\sigma_t^2 .. \to S_T$$

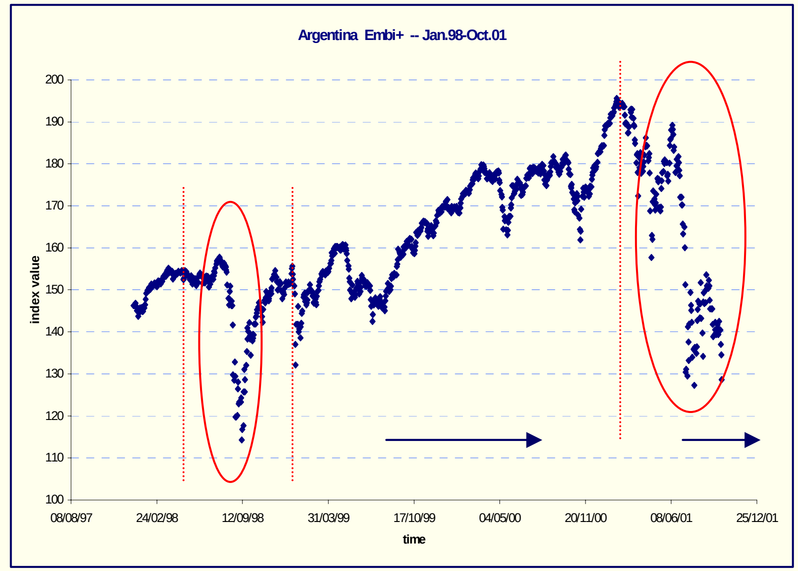
- La presenza di una componente autoregressiva sulla varianza non inficia la natura markoviana del processo di prezzo
- In presenza di un processo di volatilità diffusivo correlato al processo di prezzo è possibile adottare MC implementando la scomposizione di Choleski
- In generale in presenza di volatilità stocastica il prezzo dell'opzione risulterà superiore a quello di un'opzione classica
- Il modello garch(1,1) è stimabile attraverso la procedura di ML sulla log-likelihood
- Il mercato è incompleto se la volatilità è stocastica poiché è possibile individuare un portafoglio di copertura dell'opzione con un margine di errore sulla varianza che si realizzerà alla fine dell'incremento di tempo

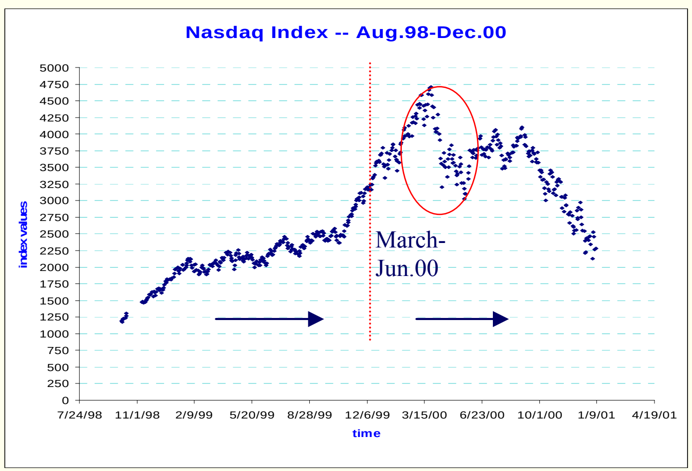
6b Modelli discontinui

- I modelli discontinui a loro volta scompongono la varianza aggregata del processo in due componenti: l'una costante legata al rumore bianco (modello diffusivo), l'altra generata da un processo di Poisson
- Questi modelli si sono affermati in particolare per facilitare il fitting di distribuzioni asimmetriche e fornire stime probabilistiche adeguate ad eventi sulle code
- Consideriamo in particolare la problematica del pricing con un sottostante diffusivo a salti. La recente storia finanziaria:
  - Far East: Oct-Nov 97, Russia: August 98, LTCM e Hedge fund: October 98, Brazil: January 99, Dot.com: April 2000, Argentina: July and October 2001, US equity markets: March 2002, 2007—2008, MSWCI: 2008

Examples of portfolio dynamics during instability periods







Poisson Gaussian

- Il modello misto Poisson-Gaussian è stato proposto da una molteplicità di autori per problematiche finanziarie diverse. Riferimenti classici sono:
  - J.Press (1967) per il pricing di contratti finanziari
  - R.Merton (1976) nell’ambito del pricing di opzioni
  - Ball and Torous (1985) come modello di riferimento per titoli azionari
  - P.Jorion (1985) per il mercato valutario
  - A.Lo (1988) per gli associati problemi di massima verosimiglianza

Poisson-Gaussian (ctd)

- Consideriamo la generalizzazione del modello diffusivo con l'inclusione di una componente discontinua (cadlag, RCLL) ed affrontiamo la problematica del pricing.
- Un evento poissoniano è generato da una certa intensità e le conseguenze sul mercato sono supposte indipendenti dall'intensità.
- Le variazioni di valore del sottostante sono condizionate al manifestarsi della discontinuità e possono essere sia positive che negative

Poisson-Gaussian (ctd)

- Dato un prezo corrente S_0 abbiamo per *t=0,...,T*

$$S_{t+h} = S_t e^{\left(\mu - 0.5\sigma^2\right)h + \sigma\sqrt{h}W_t} \quad \text{if no jumps occur in } h$$

$$S_{t+h} = S_t e^{\left(\hat{\mu} - 0.5\sigma^2\right)h + \sigma\sqrt{h}W_t} \prod_{k=1}^{N_h} Y_k \quad \text{if } N_h \text{ jumps occur in } h$$

- Nell'intervallo *h*, l'effetto della discontinuità è modellato da

$$Y = e^{\alpha_j - 0.5\sigma_j^2 + \sigma_j e}, e \in N(0,1)$$

$$\prod_{k=1}^{N_h} Y_k = e^{N_h(\alpha_j - 0.5\sigma_j^2) + \sigma_j \sum_{k=1,..,N_h} e_k}$$

$$P(N_h \le K) = \sum_{k=0}^{K} \frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^k}{k!}$$

Poisson-Gaussian (ctd)

- Assumendo un massimo di *K* discontinuità in ogni sottoperiodo *h,* nel modello di simulazione per ogni discontinuità abbiamo un campionamento dalla distribuzione lognormale

$$S_{t+h} = S_t e^{\left(\hat{\mu}-0.5\sigma^2\right)h+\sigma\sqrt{h}W_t+K(\alpha_j-0.5\sigma_j^2)+\sigma_j\sum_{k=0}^{K}e_k}$$

$$= S_t e^{\left(\mu-\lambda\vartheta-0.5\sigma^2\right)h+\sigma\sqrt{h}W_t+K(\alpha_j-0.5\sigma_j^2)+\sigma_j\sum_{k=0}^{K}e_k}$$

$$\vartheta := e^{\alpha_j}-1$$

$$= S_t e^{\left(\mu-\lambda\vartheta-0.5\sigma^2\right)h+\sigma\sqrt{h}W_t}\prod_{k=0}^{K}e^{\alpha_j-0.5\sigma_j^2+\sigma_j e_k}$$

Risk premium

- Il rendimento atteso su questo mercato è definito da due componenti di premio:

$$E(S_{t+h}) = S_t e^{\left(\mu-\lambda\vartheta-0.5\sigma^2\right)h} E(e^{\sigma\sqrt{h}W_t}) E(e^{K(\alpha_j-0.5\sigma_j^2)+\sigma_j\sum_{k=0}^{K} e_k})$$

$$= S_t e^{\left(\mu-\lambda\vartheta-0.5\sigma^2\right)h} e^{0.5\sigma^2 h} e^{K(\alpha_j-0.5\sigma_j^2)} E(e^{+\sigma_j\sum_{k=0}^{K} e_k})$$

$$= S_t e^{(\mu-\lambda\vartheta)h} e^{K(\alpha_j-0.5\sigma_j^2)} e^{K0.5\sigma_j^2}$$

$$= S_t e^{(\mu-\lambda\vartheta)h} e^{K\alpha_j} = S_t e^{\mu h-\lambda\vartheta h+K\alpha_j} = S_t e^{\mu h}$$

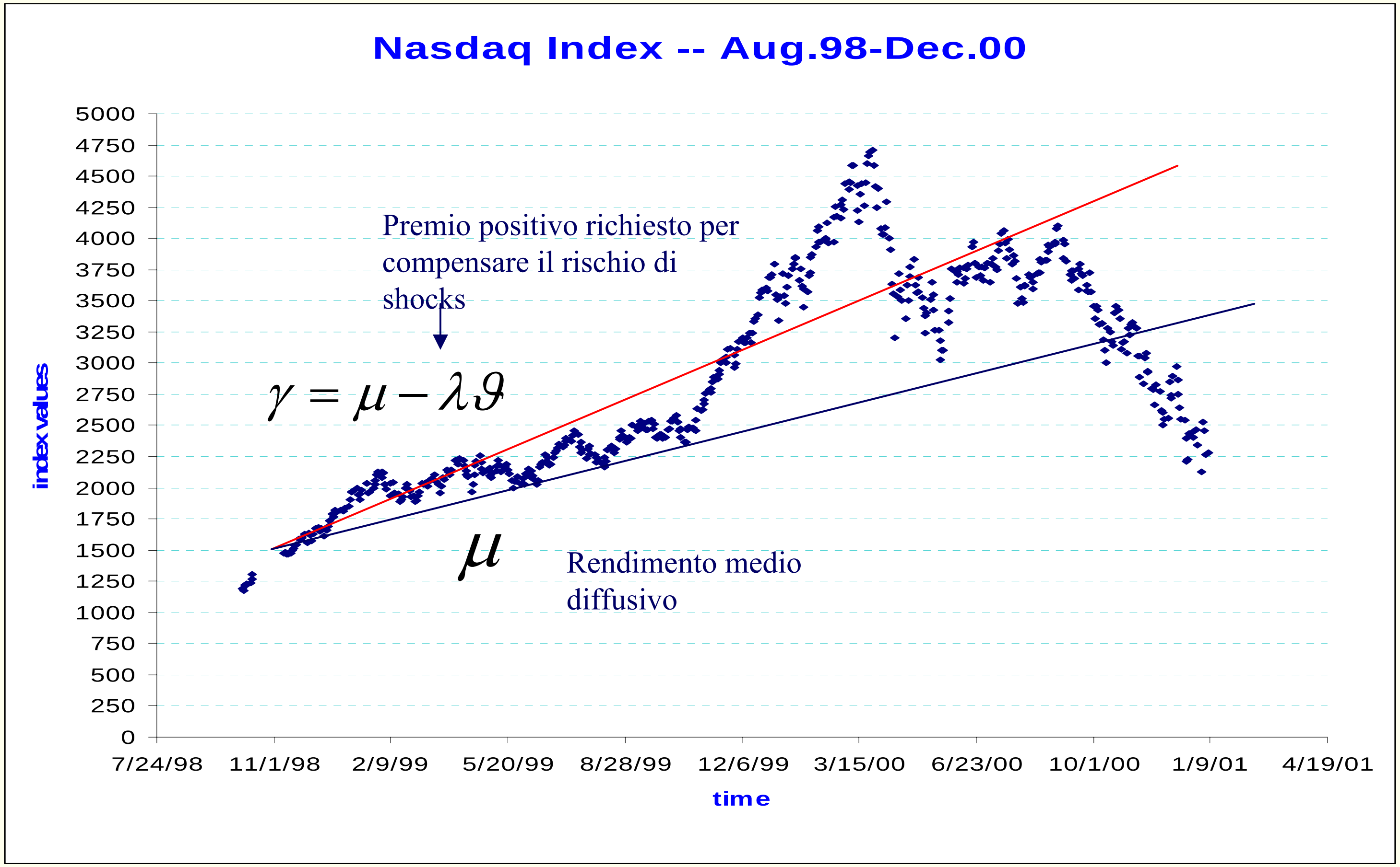
Compensazione al rischio diffusivo

Compensazione al rischio discontinuità

L'equazione differenziale associata

$$dS_t = S_t\left[(\mu - \lambda\vartheta)dt + \sigma dz_t + \rho dN_t\right]$$

$$dz_t \in N(0,dt), \rho \in Ln(\vartheta,\sigma_j^2), dN_t \in Poi(\lambda)$$



Poisson Gaussian

- Il modello discontinuo con ampiezza dei jumps, deterministica o lognormale può essere stimato via ML introducendo la funzione composita:

$$\max_{\{\gamma,\sigma^2,\lambda,\rho)}\{L(\Delta X_t;\gamma,\sigma^2,\lambda,\vartheta)\} \qquad \text{constant jump magnitude}$$

$$L := \sum_{t=1,..,T} \ln\left(\sum_{k=0,...,K}\left[\frac{e^{-\lambda\Delta t}(\lambda\Delta t)^k}{k!}\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2\Delta t)}}e^{-\frac{[\Delta X_t-(\gamma\Delta t+k\vartheta)]^2}{2\sigma^2\Delta t}}\right]\right)$$

$$\max_{\{\gamma,\sigma^2,\lambda,\vartheta,\nu^2)}\{L(\Delta X_t;\gamma,\sigma^2,\lambda,\vartheta,\nu^2)\} \qquad \text{log-normal jump magnitude}$$

$$L := \sum_{t=1,...,T} \ln\left(\sum_{k=0,...,K}\left[\frac{e^{-\lambda\Delta t}(\lambda\Delta t)^k}{k!}\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2\Delta t+k\sigma_j^2)}}e^{-\frac{[\Delta X_t-(\gamma\Delta t+k\vartheta)]^2}{2(\sigma^2\Delta t+k\sigma_j^2)}}\right]\right).$$

Poisson Gaussian

- La procedura di pricing di un derivato:
  - Dato il payoff, scaricare la serie finanziaria sottostante
  - Stimare separatamente le verosimiglianze Gaussian e P-G sul sottostante e verificare la significatività della componente discontinua
  - Se significativa
    - Generare le traiettorie del sottostante con un rendimento atteso definito dal tasso risk free. Su ogni incremento temporale, campionare dalla distribuzione di Poisson:
      - » Se dN=1: campiona dalla distribuzione degli shocks ed aggiungi alla componente diffusiva
      - » Se dN=0: prosegui
  - Per ogni traiettoria valuta il payoff terminale
  - Sconta con il tasso di sconto privo di rischio per individuare il valore corrente del derivato

Modelli a volatilità stocastica e G+P

- Osservazioni:
  - Il mercato finanziario è incompleto
  - Non vi è un'unica misura di martingala, o di probabilità neutrale rispetto al rischio
  - La copertura perfetta su posizioni corte non è possibile
  - La formula di BS è stata estesa al caso di jumps diversificabili (non sussiste alcun premio di mercato) da Merton (1976)
  - Il processo sottostante incorpora simultaneamente rischio diffusivo e di discontinuità

6c. Struttura finanziaria, valore d'azienda e teoria delle opzioni

Il capitale di debito e le azioni di una società possono essere visti come derivati con sottostante il patrimonio della società.

V_t= patrimonio societario – totale attività -- in t ;

E_t= valore delle azioni della società in t ;

$D(t)$= debito della società in t ;

D = valore nominale del bond da rimborsare alla scadenza T ;

Debito e azioni come opzioni.

Risulta:

$$D_T = \begin{cases} D & \text{se } V_T > D \\ V_T & \text{se } V_T \le D \end{cases} = \min(V_T, D)$$

e quindi

$$D_T = \min(V_T, D) = V_T - \max(V_T - D, 0)$$

cioè i debitori "*possiedono*" la società, ma hanno assunto una posizione corta in una call con sottostante V_t e controparte gli azionisti.

Debito e azioni come opzioni - Seguito

In alternativa

$$D_T = \min(V_T, D) = D - \max(D - V_T, 0)$$

cioè i possessori del bond riceveranno il valore nominale senza rischio, ma hanno scritto una put con sottostante V_t e prezzo di esercizio D.

$$E_T = \begin{cases} V_T - D & \text{se } V_T > D \\ 0 & \text{se } V_T \le D \end{cases} = \max(V_T - D, 0)$$

Debito e azioni come opzioni

Questa espressione è il payoff di una call con sottostante V_t e prezzo di esercizio D.

Dunque

$$E_t = c(V_t, D, \sigma, r, T, q)$$

Inoltre

$$D_t = V_t - E_t$$

Utilizzo dei prezzi delle azioni: il modello di Merton

Si considerino questi due casi:

1. Se $V_T < D$ è razionale per la società dichiarare fallimento al tempo T. In questa evenienza il valore delle azioni è nullo;
2. Se $V_T > D$ la società rimborserà le proprie attività al tempo T. Il valore delle azioni è pari a $V_T - D$.

Dunque, si può dedurre che il valore delle azioni al tempo T è pari a:

$$\max(V_T - D, 0)$$

Questo mostra che il capitale azionario è una *opzione call* sul valore delle attività, con un prezzo d'esercizio uguale al rimborso del debito .

Utilizzo dei prezzi delle azioni: il modello di Merton

Il valore corrente delle azioni E_0 è legato al valore corrente delle attività aziendali, V_0, e alla volatilità delle attività aziendali, σ_V, dalla relazione ottenuta usando la B&S formula:

$$E_0 = V_0 N(d_1) - De^{-rT} N(d_2)$$

Dove N è la distribuzione gaussiana ed r è il tasso d'interesse privo di rischio costante.

$$d_1 = \frac{\ln(V_0 / D) + (r + \sigma_V^2 / 2)T}{\sigma_V \sqrt{T}} \quad \text{e} \quad d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T}$$

Utilizzo dei prezzi delle azioni: il modello di Merton

- In un mondo neutrale verso il rischio, la probabilità di insolvenza è pari a $N(-d_2)$. Per calcolarla, si devono conoscere V_0 e σ_V, i cui valori non sono direttamente osservabili. Si possono comunque stimare E_0 e σ_E

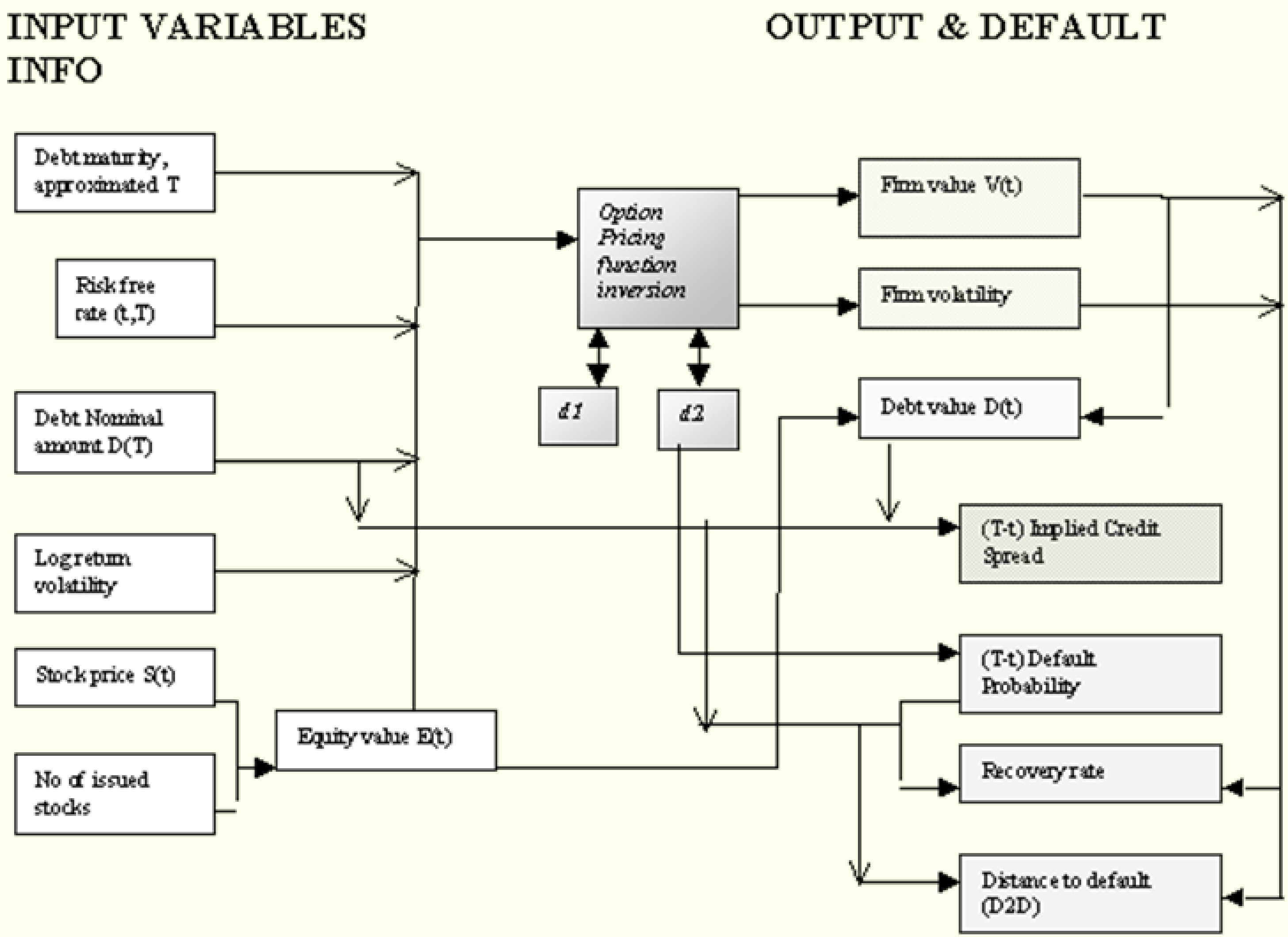
- In base al lemma di Ito si ottiene:

$$\sigma_E E_0 = \frac{\partial E}{\partial V}\sigma_V V_0 = N(d_1)\sigma_V V_0$$

- Quest'ultima relazione forma insieme alla relazione precedente un sistema di due equazioni in due incognite che consente di trovare i valori di V_0 e σ_V

- Il valore risultante del debito è $V_0 - E_0$

Utilizzo dei prezzi delle azioni: il modello di Merton



Utilizzo dei prezzi delle azioni: il modello di Merton (esempio)

Si considerino i seguenti dati:

- E_0 = \$3 milioni;
- σ_E = 80%;
- D = \$10 milioni (valore nominale delle obbligazioni);
- r = Il tasso privo di rischio è del 5 per cento annuo

Risolvendo le due equazioni si ottiene:

1. V_0 = 12,40 e σ_V = 0,2123;
2. $N(-d_2)$ = 0,127 ossia al 12,7% (probabilità d'insolvenza);
3. $V_0 - E_0$ = \$9,40 (valore di mercato delle obbligazioni);
4. $\$10e^{-0,05\times1}$ = \$9,51 (valore delle obbligazioni in assenza di insolvenza);

Utilizzo dei prezzi delle azioni: il modello di Merton