LS FIME
a.a. 2008-2009

Teoria delle opzioni

e

Prodotti strutturati

Giorgio Consigli

giorgio.consigli@unibg.it

Uff 258 – ricevimento merc: 11.00-13.00

Programma

1. **Mercato delle opzioni e contratti derivati**
2. **Teoria delle opzioni**
3. **Tecniche di valutazione**
4. **Hedging**
5. ***Ingegneria finanziaria***
6. **Procedure numeriche**
7. **Derivatives disasters**

Opzioni e ProdStrutt 5

5. Ingegneria finanziaria
    - 5a. Introduzione all'innovazione finanziaria
    - 5b. Prodotti strutturati
    - 5c. Opzioni esotiche
    - 5d. Asset-backed-securities

5a. Introduzione all’innovazione finanziaria

- I processi di innovazione finanziaria hanno inciso in profondità sullo sviluppo dei mercati finanziari nell’arco degli ultimi due decenni
- Essi sono generalmente associati alla progressiva crescita del mercato OTC basato su combinazioni di strumenti derivati e primari orientate a:
  - Un miglioramento delle politiche di liability management da parte delle imprese
  - Il crescente impiego di strategie di leva per massimizzare i rendimenti speculativi
  - La propensione a massimizzare i ricavi da commissioni e trading più che da intermediazione finanziaria classica da parte degli intermediari

Introduzione all’innov finanziaria

- Va ricordato che le emissioni obbligazionarie sono meno costose delle posizioni debitorie plain vanilla le quali sono meno costose delle emissioni azionarie
- Esiste un forte incentivo per gli intermediari e le aziende a trasformare in strumenti di mercato le posizioni di credito e debito
- Ci interessiamo in questa sezione ad alcune forme di ingegneria finanziaria le quali fino alla fine del 2007 almeno hanno accompagnato la crescita di questo segmento
- I diversi settori dell’ingegneria finanziaria sono in certa misura analizzabili con riferimento alla trasformazione che essi inducono sui payoffs dei contratti e gli associati flussi finanziari
- Il settore dell’innov finanziaria, a meno di trasformazioni lungo la vita del contratto, interessa contratti finanziari con scadenza definita

Introduzione all'innov finanziaria

Dagli strumenti plain vanilla ai prodotti strutturati, modifiche di struttura finanziaria sono riconducibili a:

- condizioni di estinzione del contratto
- cambiamenti inerenti pagamenti finali e intermedi
- forme di indicizzazione a contratti finanziari o commodities (oro, petrolio, etc)
- la natura del contratto per effetto di diritti introdotti nella struttura. Ad esempio:
  - conversione di un'obbligazione in azione (associato venire meno della scadenza)
  - rimborso anticipato (callable bond),
  - trasformazione della valuta di denominazion (es.:EUR→USD)

Introduzione all'innov finanziaria

- trasformazione della struttura di rischio. Si pensi in particolare alle obbligazioni corporate:
  - Liquidità
  - Rischio di credito
  - Swap
  - seniority

- L'efficienza dei meccanismi di innovazione finanziaria in particolare ai fini di contenimento dei costi di raccolta è strettamente legata alla struttura di mercato ed ai livelli di intermediazione
- Deve inoltre essere enfatizzato l'effetto potenzialmente distorsivo di forme di ristrutturazione dei payoffs preesistenti

5b. Prodotti Strutturati

- Titoli obbligazionari ordinari: pagano interessi e capitale a scadenza prefissati al momento dell'emissione

- Titoli strutturati (structured notes): generano pagamenti che dipendono da prezzi azionari, tassi di interesse, valute e possono essere titoli obbligazionari con embedded options.

Equity-Linked Bonds

Sono titoli che non pagano l’importo certo F alla scadenza, ma un’azione.

- Ai fini della valutazione della struttura si assume che l’operazione venga chiusa sul mercato future azionario (titolo o benchmark)
- Si deve distinguere anche in questo caso il pagamento degli interessi
- In assenza di copertura a termine la valutazione è l’abituale valutazione basata sul valore atteso nella distribuzione neutrale al rischio

Zero-Coupon Equity-Linked Bonds

- In assenza di dividendi il prezzo è

$$Z^S_{0,T} = Z_{0,T} F_0 = e^{-rT} S_0 e^{rT} = S_0,$$

$Z^S_{0,T}$ è il valore attuale del prezzo forward.

Prepaid forward price

- Se vengono pagati i dividendi D_i alle epoche t_i, il prezzo è

$$Z^S_{0,T} = S_0 - \sum_{i=1}^{n} D_i Z_{0,t_i}.$$

Equity-Linked Coupon Bonds

$$P(0,T,c,n,S_T) = \sum_{i=1}^{n} cZ_{0,t_i} + Z_{0,T}^{S}$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} cZ_{0,t_i} + S_0 & \text{senza dividendi} \\ \sum_{i=1}^{n} cZ_{0,t_i} + S_0 - \sum_{i=1}^{n} D_i Z_{0,t_i} & \text{con dividendi} \end{cases}$$

$$\Leftarrow c \mid P_{0,T} = S_0 + \sum_i Z_{0,t_i}$$

Opzioni incluse in Coupon Bonds

Il possessore riceve le cedole e a scadenza il capitale F più un'aliquota λ dell'eccedenza dell'azione sottostante rispetto ad un importo prefissato X.

Il valore in 0 è

$$V_0 = FZ_{0,T} + c\sum_{i=1,..,n} Z_{0,t_i} + \lambda BSCall\,(S, X, \sigma, r, T, q)$$

Opzioni incluse in Coupon Bonds

Si potrebbe strutturare il contratto in modo che

- Il prezzo iniziale sia pari al prezzo dell'azione, $V_0 = S_0$;
- Il rendimento non sia negativo, $F = V_0$;
- Venga pagata un'aliquota dell'eccedenza dell'azione rispetto a V_0 , $X = V_0$.

In tal caso il prezzo della equity linked note diventa

$$S_0 = S_0 Z_{0,T} + c \sum_{i=1,..,n} Z_{0,t_i} + \lambda BSCall\,(S_0, S_0, \sigma, r, T, q)$$

Data la cedola c, possiamo risolvere rispetto alla frazione di opzioni e viceversa.

Opzioni incluse in strumenti Equity-Linked

A scadenza il possessore riceve un'azione invece di un importo monetario. In caso di emissione alla pari si ha

$$S_0 = Z_{0,T}^{S} + c \sum_{i=1,..,n} Z_{0,t_i} + \lambda BSCall\ (S_0, X, \sigma, r, T, q)$$

In questo caso a scadenza anziché pagare S_0 unità monetarie l'equity linked note paga un'azione.

Esempio: Consideriamo il titolo (Equity-Linked CD) che paga tra 5.5 anni il valore corrente dell’indice S&P più il 70% dell’eccedenza del valore tra 5.5 anni rispetto al valore corrente. Il payoff a scadenza è

$$S_0 + 0.7 \times \max(S_{5.5} - S_0, 0).$$

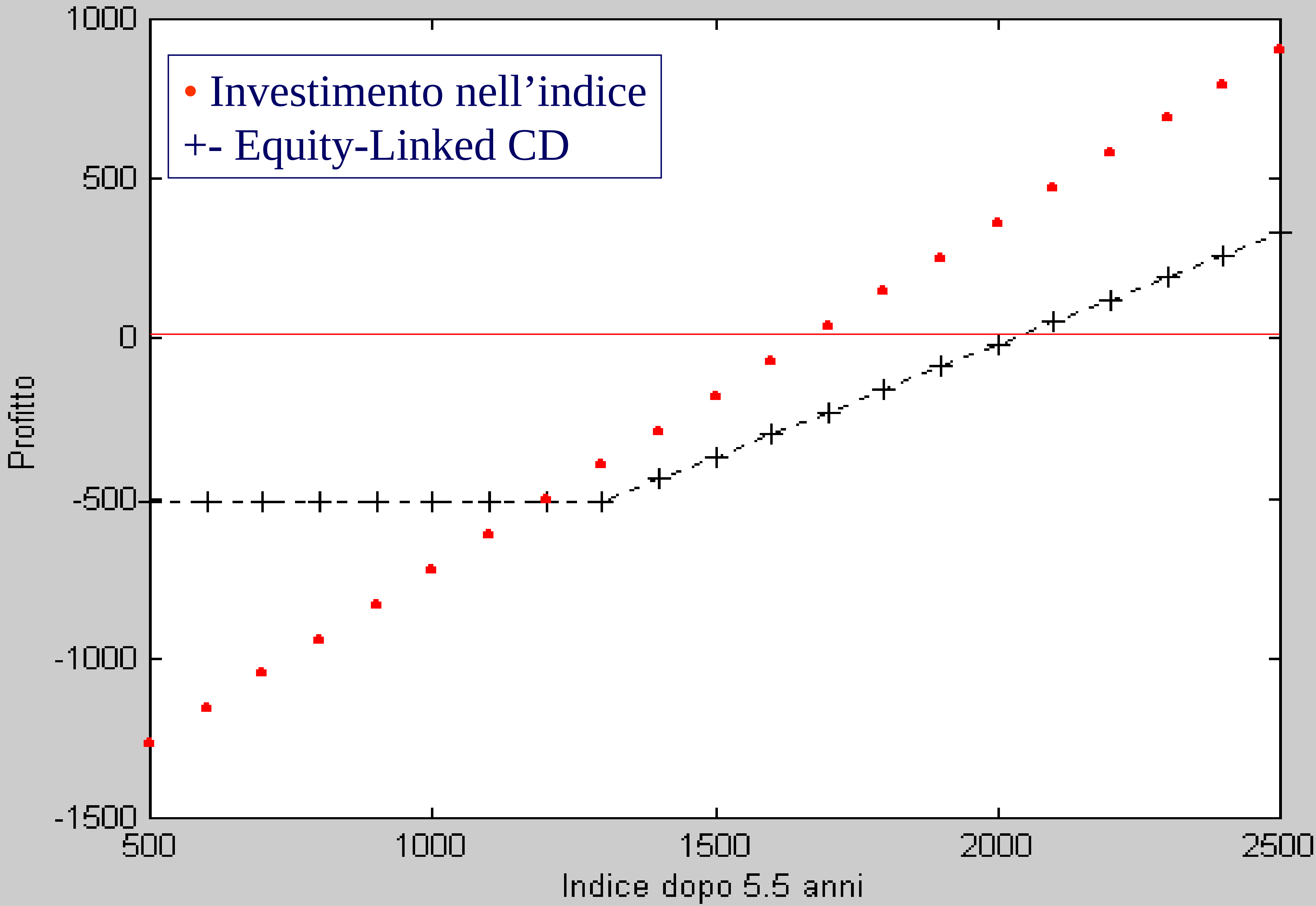
Il valore in 0 è

$$S_0 Z_{0,5.5} + 0.7 \times BSCall(S_0, S_0, \sigma, r, 5.5, \delta).$$

Se r=6% annuo, s=30%, $S0$=1300, d=1.5%, il valore in 0 è

$$1300e^{-0.06\times 5.5} + 0.7\times BSCall(1300, 1300, 0.3, 0.06, 5.5, 0.015) =$$
$$= 934.60 + 309.01 = 1243.61.$$

Poiché l'investimento iniziale richiesto è 1300, la banca che emette il titolo guadagna una commissione del 4.3% (56.39/1300).



Investimento nell’indice
+- Equity-Linked CD
1000
500
0
-500
-1000
-1500
Profitto
500
1000
1500
2000
2500
Indice dopo 5.5 anni

5c. Opzioni esotiche

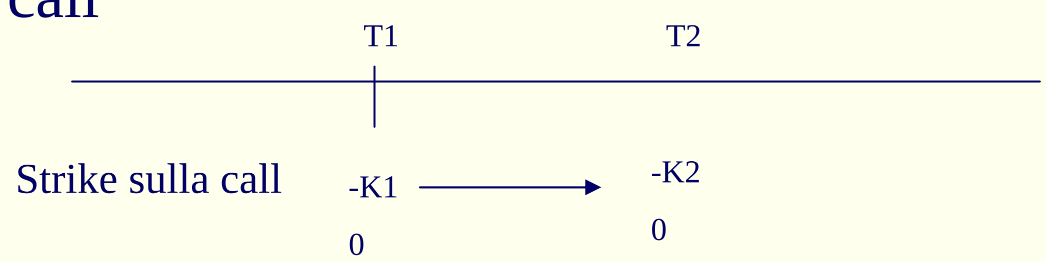
- Consideriamo le seguenti opzioni esotiche per chiarire il ruolo finanziario di questi strumenti prima di estendere ad essi i modelli di pricing:
  - Compound options
  - Barrier options
  - Lookback options

Opzioni su opzioni

- Le opzioni composte (compound) sono contratti call o put su sottostanti call o put.
- I modelli di valutazione risultano complicati dalla necessità di condizionare l'esercizio dell'opzione su una scadenza lunga all'avvenuto esercizio su una scadenza precedente

$$c(c_0, K_1, T_1, K_2, T_2, \sigma, r, q)$$
$$c(p_0, K_1, T_1, K_2, T_2, \sigma, r, q)$$
$$p(c_0, K_1, T_1, K_2, T_2, \sigma, r, q)$$
$$p(p_0, K_1, T_1, K_2, T_2, \sigma, r, q)$$

Es: call su call



Call su call

- Estendiamo il modello di BS, mantenendo l'ipotesi di lognormalità della distribuzione dei prezzi.

$$c(c_0, K_1, T_1, K_2, T_2, \sigma, r, q) = \left[S_0 e^{-qT_2} \underbrace{N\left(a_1, b_1, \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right)} - K_2 e^{-rT_2} \underbrace{N\left(a_2, b_2, \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right)} \right] - K_1 e^{-rT_1} \underline{N(a_2)}$$

Prob d'esercizio sulla prima scadenza

Distribuzione normale standard bivariata

Delta composito: convergenza a (0,1) condizionatamente alla convergenza ad 1 del delta sulla prima scadenza

Probabilità d'esercizio su T2, condizionata all'avvenuto es in T1

"d1" in T1 → $a_1 = \dfrac{\ln(S_0 / S^*) + (r - q + \sigma^2 / 2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}$

"d2" in T1 → $a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1}$

"d1" in T2 → $b_1 = \dfrac{\ln(S_0 / K_2) + (r - q + \sigma^2 / 2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}$

"d2" in T2 → $b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2}$

NB: $i)\ c(c_0, K_1, T_1, K_2, T_2, \sigma, r, q) = e^{-rT_2} E\left[\max(S_{T_2} - K_2, 0) \mid S_{T_1} \geq S^*, C_{T_1} \geq K_1\right]$

$ii)\ corr(S_{T_1}, S_{T_2}) = \dfrac{\operatorname{cov}(S_{T_1}, S_{T_2})}{\sigma_{S_{T_1}} \sigma_{S_{T_2}}} = \sqrt{\dfrac{T_1}{T_2}}$

Call su put

- Per il caso di una call scritta su una put:

$$c(p_0, K_1, T_1, K_2, T_2, \sigma, r, q) = \left[K_2 e^{-rT_2} N\left(a_2, -b_2, -\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right) - S_0 e^{-qT_2} N\left(a_1, -b_1, -\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right) \right] - K_1 e^{-rT_1} N(a_2)$$

$$a_1 = \frac{\ln(S_0 / S^*) + (r - q + \sigma^2 / 2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}$$

Percentili per la valutazione della Put in T1

$$a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1}$$

$$b_1 = \frac{\ln(S_0 / K_2) + (r - q + \sigma^2 / 2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}$$

Percentili per la valutazione della Call in T2

$$b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2}$$

Compound put's

$$p(c_0, K_1, T_1, K_2, T_2, \sigma, r, q) = \left[K_2 e^{-rT_2} N\left(-a_2, b_2, -\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right) - S_0 e^{-qT_2} N\left(-a_1, b_1, -\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right) \right] + K_1 e^{-rT_1} N(-a_2)$$

$$p(p_0, K_1, T_1, K_2, T_2, \sigma, r, q) = \left[K_2 e^{-rT_2} N\left(-a_2, -b_2, -\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right) - S_0 e^{-qT_2} N\left(-a_1, -b_1, \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right) \right] + K_1 e^{-rT_1} N(-a_2)$$

$$a_1 = \frac{\ln(S_0 / S^*) + (r - q + \sigma^2 / 2) T_1}{\sigma \sqrt{T_1}}$$

$$a_2 = a_1 - \sigma \sqrt{T_1}$$

$$b_1 = \frac{\ln(S_0 / K_2) + (r - q + \sigma^2 / 2) T_2}{\sigma \sqrt{T_2}}$$

$$b_2 = b_1 - \sigma \sqrt{T_2}$$

Osservazioni:

• Il valore delle opz composte è individuato dal valore atteso del payoff finale scontato ad oggi condizionato all'esercizio della opz su scad breve

• Lo strike sulla prima scad è sull'opz, sulla seconda sul titolo azionario

• La probabilità d'esercizio sulle diverse scad considera la prob congiunta che siano soddisfatte condizioni sui percentili in T1 e poi in T2

• La tecnica di pricing associata all'impiego di prob condizionate impone l'uso della ricursione a ritroso (*backward recursion*)

Opzioni con barriera

- Le opzioni con barriera rappresentano opzioni le quali per effetto del raggiungimento di una barriera verso il basso o verso l’alto cessano di esistere (*knock-out)* o vengono accese (*knock-in)*
- Limito la considerazione alle opzioni call *down and out* e *down and in*
- La complessità del modello valutativo è anche in questo caso legata alla necessità di condizionare l’esistenza del contratto al verificarsi di un evento incerto
- La barriera è definita rispetto al sottostante ed il modello di valutazione deve quindi includere quali coefficienti di prezzo del sottostante sia il prezzo corrente che lo strike che la barriera

Opzioni con barriera

- Vale la relazione fondamentale: $C = C_{d-in} + C_{d-out}$
- Abbiamo inoltre per il primo contratto:

$$C_{d-in}(S_0, H, K, r, \sigma, T, q) = S_0 e^{-qT}\left(H/S_0 \right)^{2\lambda} N(y) - K e^{-rT}\left(H/S_0 \right)^{2\lambda-2} N(y - \sigma\sqrt{T})$$

$$\lambda = \frac{r - q + \sigma^2/2}{\sigma^2}, \quad y = \frac{\ln\left(H^2 / S_0 K \right)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

Osservazioni:

• l’opzione nasce non appena dall’alto S(t)→H, essendo H < S(0) <= K

• la possibilità che l’opzione venga esercitata è condizionata alla probabilità che il prezzo superi la barriera dall’alto. Al tempo 0 tale probabilità dipende dalla volatilità del sottostante e dalla differenza H-S(0) o dal rapporto H/S(0). La condizione d’esistenza coincide quindi con H/S=1

Down and in call

- Spieghiamo alcune caratteristiche di questa formula di pricing:

$$S_0 e^{-qT}\left(H/S_0\right)^{2\lambda} N(y) - Ke^{-rT}\left(H/S_0\right)^{2\lambda-2} N(y-\sigma\sqrt{T})$$

$$y = \frac{\ln\left(H^2/S_0K\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T} = \frac{\ln\left(H^2/S_0K\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{r-q+\sigma^2/2}{\sigma^2}\sigma\sqrt{T}$$

$$= \frac{\ln\left(H^2/S_0K\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\left(r-q+\sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\left(H^2/S_0K\right) + \left(r-q+\sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$= \left[\frac{\ln\left(S_\tau/K\right) + \left(r-q+\sigma^2/2\right)(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}} \mid S_\tau = H\right]$$

Down and in call

- Inoltre:

$$\left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} N(y) := H_\lambda N(y)$$

$$N(y) = P\left(Z_T \le \frac{\ln\left(\frac{S_\tau}{K}\right) + \left(r - q + \sigma^2/2\right)(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}} \mid S_\tau = H \right)$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_\tau}{K}\right) + \left(r - q + \sigma^2/2\right)(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}} (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)$$

$$\Rightarrow H_\lambda N(y) = \int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_\tau}{K}\right) + \left(r - q + \sigma^2/2\right)(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}} H_\lambda (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \underline{\left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\frac{r-q+\sigma^2/2}{\sigma^2}}} \; \underline{\int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_\tau}{K}\right) + \left(r - q + \sigma^2/2\right)(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}} (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}$$

Fattore di aggiustamento uniperiodale o di scala per la prob che l'opzione venga ad esistere

Probabilità normalizzata associata al valore atteso forward del sottostante. Dato *y*→percentile per la prob. d'esercizio dell'opzione

Down and out call

- Da: $C = C_{d-in} + C_{d-out}$

Formula di BS per una call plain vanilla

$$C_{d-out}(S_0, H, K, r, \sigma, T, q) = S_0 e^{-qT} N(x_1) - Ke^{-rT} N(x_1 - \sigma\sqrt{T})$$

$$- S_0 e^{-qT} \left({H}/{S_0} \right)^{2\lambda} N(y_1) + Ke^{-rT} \left({H}/{S_0} \right)^{2\lambda - 2} N(y_1 - \sigma\sqrt{T})$$

Adattamento di BS alla condizione di raggiungimento della barriera

$$x_1 = \frac{\ln\left({S_0}/{H} \right)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}, \quad y_1 = \frac{\ln\left({H}/{S_0} \right)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

Osservazioni:

• l’opzione cessa di esistere non appena dall’alto S(t)→H, essendo H < S(0) <= K

• la possibilità che l’opzione venga esercitata è condizionata alla probabilità che il prezzo non superi la barriera dall’alto. Al tempo 0 tale probabilità dipende dalla volatilità del sottostante e dalla differenza H-S(0) o dal rapporto H/S(0). La condizione d’esistenza coincide quindi con H/S=1

Opzioni lookback

- Consideriamo infine la classe delle opzioni in cui lo strike dipende dalla traiettoria seguita dal sottostante nell'arco della vita dell'opzione. Distinguiamo tra:
  - Lookback options se lo strike è una funzione puntuale del sottostante, valutato in un dato istante
  - Asian options se lo strike è funzione di un insieme di realizzazioni del sottostante (ad esempio la media conseguita su un determinato arco temporale)
- Per le prime distinguiamo le lookback call in cui il payoff dell'opzione è definito dalla differenza tra il valore alla scadenza ed il prezzo minimo su un dato intervallo di vita e la lookback put con payoff definito dalla differenza tra il massimo ed il valore alla scadenz

Lookback call

L'opzione non viene esercitata nel solo caso in cui alla scad si abbia un valore minore del minimo! Quest'ultimo è generalmente definito su un sottoperiodo

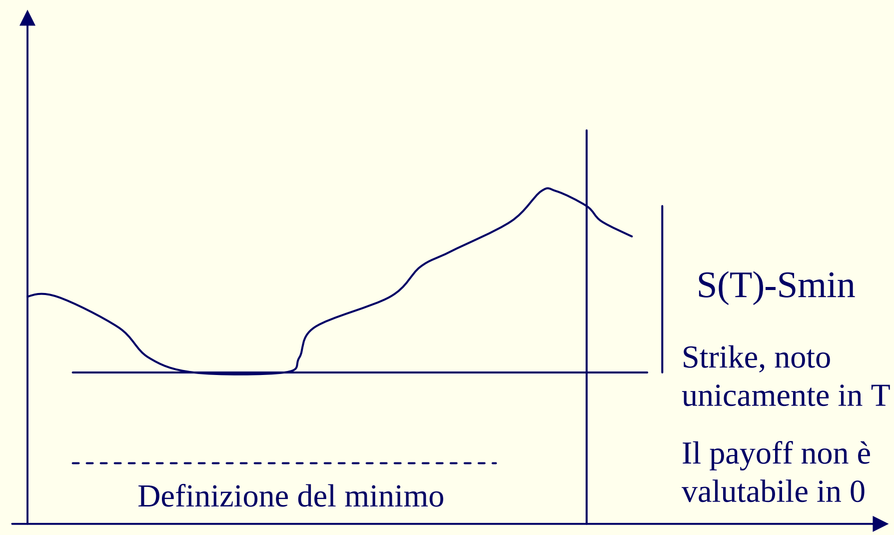
$$C_{LBK}(S_0,S_{\min},r,\sigma,T,q)=S_0e^{-qT}N(a_1)-S_{\min}e^{-rT}N(a_2)-S_0e^{-qT}\frac{\sigma^2}{2(r-q)}N(-a_1)+S_{\min}e^{-rT}\frac{\sigma^2}{2(r-q)}e^{Y_1}N(-a_3)$$

$$a_1=\frac{\ln\left(S_0/S_{\min}\right)+(r-q+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$a_2=a_1-\sigma\sqrt{T}$$

$$a_3=\frac{\ln\left(S_0/S_{\min}\right)+(-r+q+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$Y_1=-\frac{2(r-q-\sigma^2/2)\ln\left(S_0/S_{\min}\right)}{\sigma^2}$$



D'altra parte

$$Ln(S_T)\in N\left(\ln(S_0)+(r-q-\sigma^2/2)T,\sigma\sqrt{T}\right)$$

$$\Rightarrow S_T=S_0e^{(r-q-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}e}\Rightarrow S_{\min}=S_0e^{(r-q-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}q_\alpha},\alpha=0.001$$

Lookback put

$$p_{LBK}(S_0, S_{\max}, r, \sigma, T, q) = S_{\max} e^{-rT}\left[N(b_1) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)} e^{Y_2} N(-b_3)\right] + S_0 e^{-qT}\left[\frac{\sigma^2}{2(r-q)} N(-b_2) - N(b_2)\right]$$

$$b_1 = \frac{\ln\left(S_{\max} / S_0\right) + (-r + q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$b_3 = \frac{\ln\left(S_{\max} / S_0\right) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$Y_2 = \frac{2(r - q - \sigma^2/2)\ln\left(S_{\max} / S_0\right)}{\sigma^2}$$

Opzioni esotiche

- Regola di pricing: valore atteso nella misura neutrale rispetto al rischio scontato di un payoff condizionato al manifestarsi di un evento.
- Hedging – replicabilità: Aggiustamento continuo della condizione di replicazione.
  - Nel caso delle opzioni composte ci si preoccupa della replicazione dalla prima scadenza in poi.
  - Nel caso delle opzioni path dependent revisione continua del delta con costruzione del portafoglio in funzione dell'andamento del titolo
- Monte Carlo: La procedura di Monte Carlo è applicabile tenendo naturalmente in considerazione gli aspetti legati alla condizionalità e definizione del payoffs

5d. Asset-backed securities

- *Asset-backed securities* sono generate da processi di titolarizzazione. Il rendimento di questi strumenti è definito da:

  - i rendimenti di attività finanziarie o reali detenuti dall'emittente

  - i flussi di cassa per pagamenti su operazioni di *leasing* su veicoli, attrezzature, etc;

  - il piano di ammortamento per operazioni di mutuo immobiliare, o di prestito in generale o definito per operazioni di project finance

Titolarizzazione 1

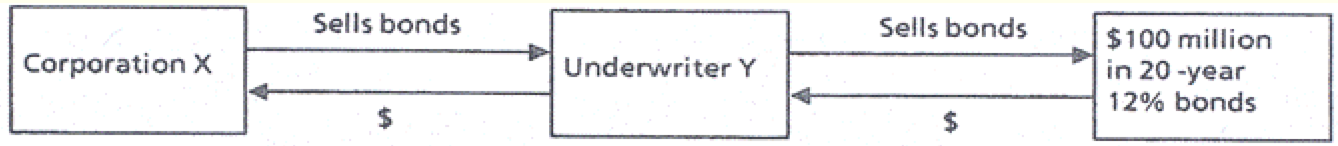


Figure 2.1. Typical structure of corporate bond issue ($100 million Corporation X 12% bonds).

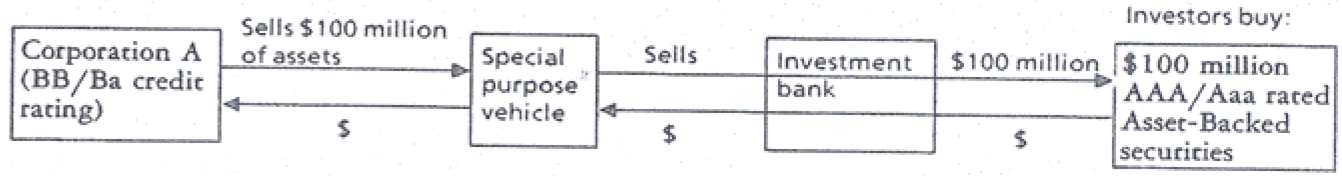


Figure 2.3. Typical structure asset-backed security ($100 million).

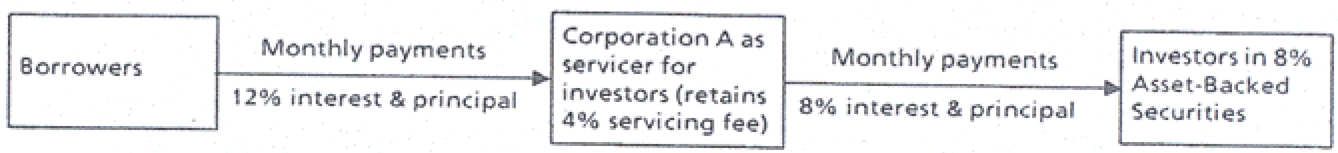
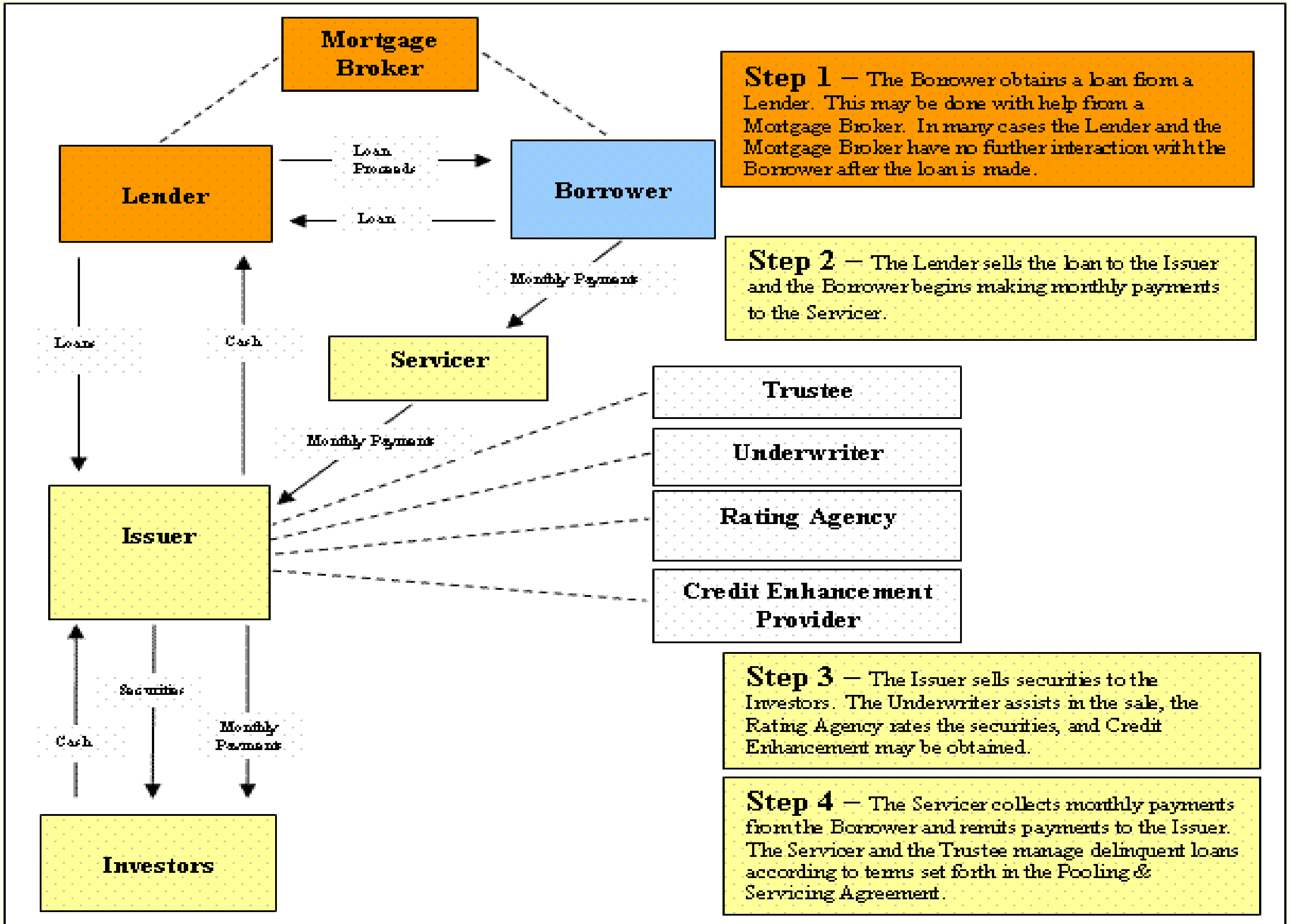
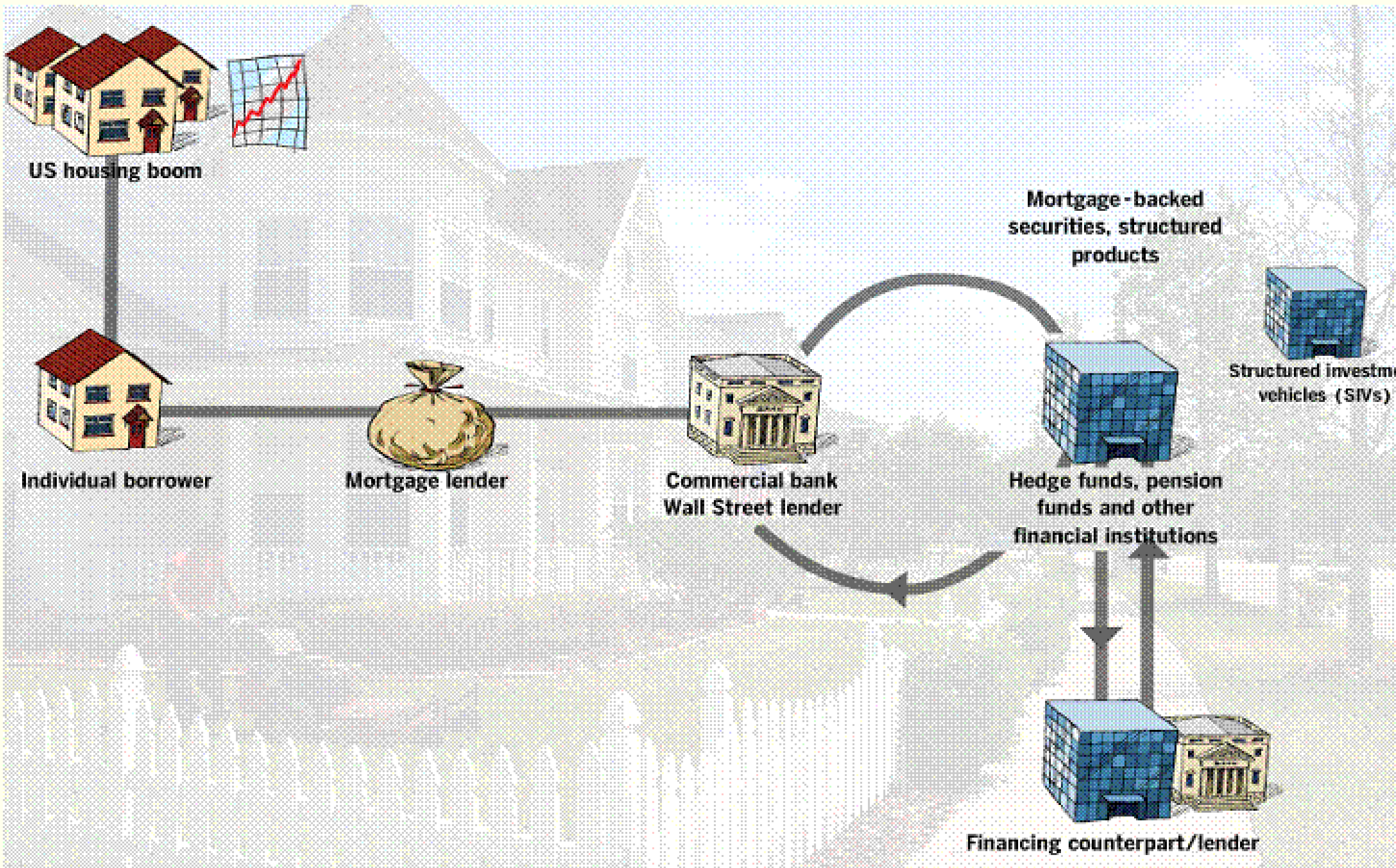


Figure 2.4. Payment stream ($100 million Corporation A asset-backed securities).

Titolarizzazione 2



MORTGAGE-BACKED SECURITIES



MORTGAGE-BACKED SECURITIES

http://www.ft.com/cms/s/0/3f9d55ba-fcfb-11dc-961e-000077b07658,dwp_uuid=d355f29c-d238-11db-a7c0-000b5df10621.html

ABS e CDO

- Alla base della crescita del mercato delle ABS:
  - Dal lato dell'offerta: l'espansione degli impieghi, il trasferimento del rischio di credito, l'ampliamento dei margini di intermediazione, il miglioramento della liquidità complessiva,
  - Dal lato della domanda: investimento finanziario con garanzia reale

- I CDO's: rappresentano una specifica categoria di ABS (Asset Backed Securities). Un CDO è un titolo di debito emesso in seguito a un'operazione di cartolarizzazione di un portafoglio di posizioni incorporanti rischio di credito.

  http://www.youtube.com/watch?v=eb_R1-PqRrw