LS FIME
a.a. 2008-2009

Teoria delle opzioni

e

Prodotti strutturati

Giorgio Consigli

giorgio.consigli@unibg.it

Uff 258 – ricevimento merc: 11.00-13.00

Programma

1. **Mercato delle opzioni e contratti derivati**
2. **Teoria delle opzioni**
3. **Tecniche di valutazione**
4. ***Hedging***
5. **Ingegneria finanziaria**
6. **Procedure numeriche**
7. **Derivatives disasters**

Opzioni e ProdStrutt 4

4. Hedging
   - 4a. Le greche
   - 4b. Costruzione di portafogli replicanti
   - 4c. Delta hedging
   - 4d. Analisi degli scenari
   - 4e. Efficacia delle strategie di copertura

MARKET MAKING
STRATEGIE DI COPERTURA
SU POSIZIONI CORTE IN OPZIONI

Le greche

Analisi titoli opzionari (ctd)

- Riprendiamo il modello di BSM per chiarire la problematica sottostante posizioni corte sul mercato delle opzioni in generale:

$$C(S,K,T,r,\sigma,q) = Se^{-qT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$C = e^{-rT}E\left[\max(S_T - K, 0)\right]$$

$$s.t. S_T = S_0 \exp\left\{\left(r - q - 0.5\sigma^2\right)T + \sigma Z_T\right\} \Rightarrow E(S_T) = S_0 e^{(r-q)T}$$

- Abbiamo (consideriamo il caso di una call):

Moto geometrico browniano

$$C(S_t, t),\ dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

$$\Rightarrow C(S+dS, t+dt) - C(S,t) := dC(S,t) = \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial C}{\partial t} dt$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial C}{\partial S}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial C}{\partial t}\right)dt}_{} + \underbrace{\frac{\partial C}{\partial S}\sigma S_t dW_t}_{}$$

Su dt: variazione attesa valore opz + variazione aleatoria

Greeks RC (ctd)

- L'equazione definisce il valore dell'opzione a partire da un dato incremento del titolo sottostante:

$$dC(S,t) = (\delta\mu S_t + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 S^2 + \vartheta)dt + \delta\sigma S_t dW_t \qquad (14)$$

Componente deterministica + componente rischiosa

γ ϑ δ

Per t=0,dt,2dt,..., nel periodo di copertura avremo:

$$\mu, \sigma, S_t, C_t$$

$$\xrightarrow{\delta_t, \gamma_t, \vartheta_t, \mathrm{dW}_t} S_{t+dt}, C_{t+dt}$$

$$\xrightarrow{\delta_{t+dt}, \gamma_{t+dt}, \vartheta_{t+dt}, \mathrm{dW}_t} S_{t+2dt}, C_{t+2dt}$$

Medesima sorgente di rischio del sottostante ovvero

Correlazione(S,C)=1

O:

Correlazione(S,-C)=-1

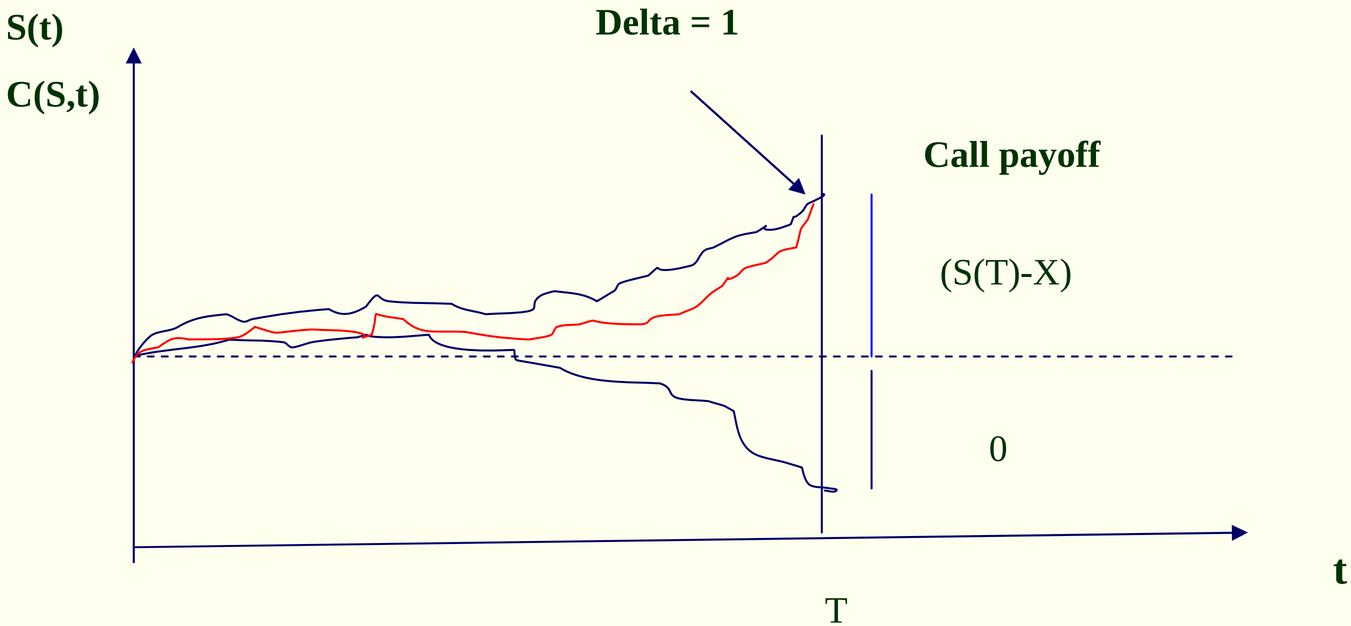
4b. Portfolio replication

Graficamente:

$$dS(t) = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \qquad S(0) = S_0$$

$$dC(S,t) = (\delta \mu S_t + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 S^2 + \vartheta)dt + \delta\sigma S_t dW_t$$

$$C(S,T) = \max\left(S_T - K, 0\right)$$



B&S greeks

- Nel loro insieme le greche sono completate da:
  - il vega $\upsilon = \dfrac{\partial C}{\partial \sigma}$ -- option sensitivity to changes in the underlying volatility (assumed constant in the B&S model → smile debate)
  - il rho $\rho = \dfrac{\partial C}{\partial r}$ -- sensitivity with respect to changes in the risk free rate.
- In B&S

$$\delta = \begin{cases} N(d_1) & \text{E uropean call} \\ N(d_1) - 1 & \text{Europe an put} \end{cases} \qquad \gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

$$\vartheta = \begin{cases} -\dfrac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT} N(d_2) & \text{Eur Call} \\ -\dfrac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT} N(-d_2) & \text{Eur Put} \end{cases} \qquad \upsilon = S_0 \sqrt{T} N'(d_1)$$

$$\rho = \begin{cases} KTe^{-rT} N(d_2) & \text{Eur Call} \\ \text{-}\, KTe^{-rT} N(-d_2) & \text{Eur Put} \end{cases} \qquad N'(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Greeks (ctd)

- In generale:

$$\delta^C = \frac{\partial C}{\partial S} > 0, \delta^P = \frac{\partial P}{\partial S} < 0$$

$$\gamma^C = \gamma^P = \frac{\partial^2 (C, P)}{\partial S^2} > 0$$

$$\vartheta^C = \frac{\partial C}{\partial t} < 0, \vartheta^P = \frac{\partial P}{\partial t} < 0$$

$$\upsilon^C = \upsilon^P = \frac{\partial C}{\partial \sigma} > 0$$

$$\rho^C = \frac{\partial C}{\partial r} > 0, \rho^P = \frac{\partial P}{\partial r} < 0$$

- **Le greche definiscono percentuali di copertura per neutralizzare le diverse sorgenti di rischio**

4c. Delta hedging

- Consideriamo un portafoglio corto un'opzione e lungo delta azioni.
- La dinamica di questo portafoglio è

$$\text{portfolio}: \ -C(S_t, t) + \frac{\partial C}{\partial S} S_t \qquad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

$$\text{option dynamics}: \quad dC = (\delta \mu S + \frac{1}{2} \gamma \sigma^2 S^2 + \vartheta) dt + \delta \sigma S dW$$

$$\begin{aligned} \text{portfolio dynamics}: \ d\Pi &= -dC + \delta dS \\ &= -(\delta \mu S + \frac{1}{2} \gamma \sigma^2 S^2 + \vartheta) dt - \delta \sigma S dW \\ &\quad + \delta (\mu S dt + \sigma S dW) = (-\frac{1}{2} \gamma \sigma^2 S^2 - \vartheta) dt \end{aligned}$$

Delta hedging (ctd)

- L'eq. definisce il risultato di una strategia di **delta hedging**: l'alea è scomparsa nell'intervallo di tempo dt. Dovremo avere:

$$d\Pi = \left(-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 S^2 - \vartheta\right)dt = r\Pi\, dt \qquad (15)$$

- In cui *rdt* definisce il rendimento istantaneo non rischioso.
- Nell'intervallo di tempo il portafoglio costruito attraverso il delta-hedge rimane non rischioso
- La ratio della strategia è di costruire posizioni anticorrelate dipendenti da un medesimo fattore di rischio

Delta hedging (ctd)

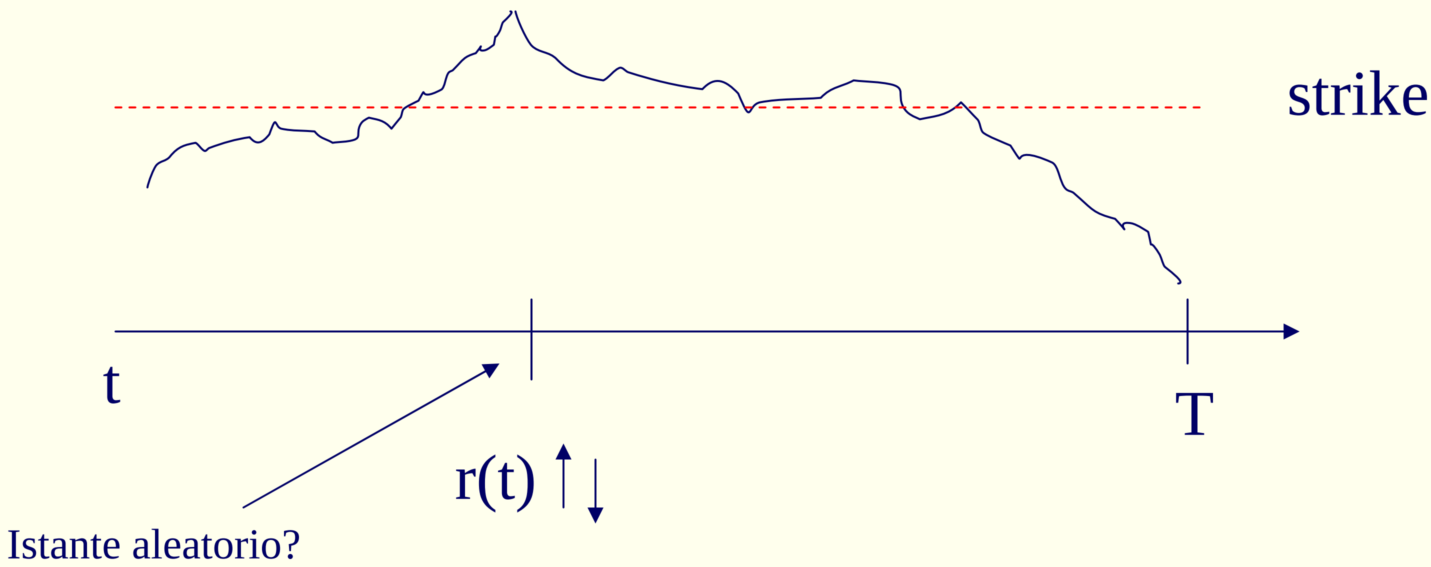
- Delta hedging è un processo dinamico. Ripetuto al variare del delta avremo a scadenza:
  - l’opzione scade in the money e l’hedger a quel punto ha accumulato per effetto della strategia i titoli in portafoglio da corrispondere
  - L’opzione scade out of the money e vale 0 a scadenza: no delivery in questo caso
- Nel primo caso il delta è 1 a scadenza e il portafoglio corto sull’opzione contiene tutti i titoli necessari
- Nel secondo il delta è 0 e la posizione iniziale in titoli azionari è stata via via liquidata
- Nel primo caso il costo della strategia di copertura è dato dal costo dell’indebitamento necessario ad acquisire i titoli azionari meno l’ammontare ricevuto alla vendita dei titoli
- Nel secondo solo l’eventuale indebitamento intervenuto nel durante meno la vendita dei titoli inizialmente posseduti

4d. Scenario analysis

- La strategia di copertura perseguita deve tenere conto di un insieme di variabili:
  - La frequenza di ribilanciamento della posizione nel sottostante
  - La dinamica della base informativa
  - Le variazioni della probabilità di esercizio
  - Il rischio di modello
- Durante la vita dell’opzione un insieme di notizie possono significativamente alterare il valore delle opzioni
- La frequenza dipende dall’andamento delle greche ed in particolare dalle variazioni del delta
- Il rischio di modello è legato alla possibilità che il delta considerato non sia appropriato

scenario analysis

- Due esempi relativi alla dinamica della base informativa:
  - Derivati di tasso, variazione tasso di riferimento monetario
  - Derivati azionari: dichiarazione su earnings attesi



scenario analysis

- L'analisi di scenari alternativi la cui probabilità può modificarsi nel corso del periodo precedenti la data d'esercizio accompagna l'attività dei market makers
- Parimenti chi detiene posizioni lunghe può variare le percentuali di copertura a fronte dei medesimi scenari
- Tipicamente l'analisi degli scenari viene effettuata attraverso tecniche di Monte Carlo destinate a misurare l'efficacia delle strategie adottate
- Analogamente la possibilità che il modello adottato possa non risultare appropriato rinvia ad una modifica delle ipotesi stocastiche sottostanti (model risk)

4e. Efficacia delle strategie di copertura

- Come valutare online l'efficacia della strategia perseguita?
- La risposta la offre direttamente l'equazione (15): un portafoglio non rischioso deve rendere nell'unità di tempo il tasso non rischioso

$$for \ \ t = 0, dt, ..$$

$$d\Pi_t = \left(-\frac{1}{2}\gamma_t \sigma^2 S_t^2 - \vartheta_t\right)dt = r_t(\delta_t S_t - C_t)dt = r\Pi_t dt$$

$$ex - post \ :$$

$$\varepsilon_{t+dt} = \left[\Pi_{t+dt} - \left(\Pi_t (1 + r_t)^{dt}\right)\right]^2 \qquad (16)$$

Se la strategia fosse efficace l'errore (16) dovrebbe essere minimizzato

Efficacia delle strategie di copertura

- Lungo l'orizzonte temporale di copertura una strategia efficace dovrebbe generare una dinamica del portafoglio di copertura la più vicina possibile al montante deterministico

$$\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = r_t dt \Rightarrow \Pi_0 \rightarrow \Pi_{dt} \rightarrow \ldots \rightarrow \Pi_t$$