LS FIME
a.a. 2008-2009

Teoria delle opzioni

e

Prodotti strutturati

Giorgio Consigli

giorgio.consigli@unibg.it

Uff 258 – ricevimento merc: 11.00-13.00

Programma

1. **Mercato delle opzioni e contratti derivati**
2. **Teoria delle opzioni**
3. ***Tecniche di valutazione***
4. **Hedging**
5. **Ingegneria finanziaria**
6. **Procedure numeriche**
7. **Derivatives disasters**

Opzioni e ProdStrutt 3

Tecniche di valutazione

3a. Principi fondamentali di teoria della valutazione
3b. Modello binomiale discreto
3c. Modello di Black-Scholes-Merton per titoli azionari
3d. Modelli stocastici sugli ZCB
3e. Metodo di Monte Carlo

Valutazione in cond di incertezza

- Consideriamo un contratto con payoff aleatorio in T pari ad $f_T(\omega)$
- Il valore attuale del contratto è:

$$f_0 = e^{-rT} E\left[f_T(\omega) \right] \qquad (1)$$

- Esempi di payoff:
  - Swaps
  - Forward o future
  - Opzione call o put
  - In generale una funzione aleatoria (ad esempio ln)
- *E* rappresenta il valore atteso del contratto
- La formula di *pricing* discende dall'ipotesi di assenza di arbitraggio nel mercato

Valutazione in cond di incertezza

- Esempio: opzione call

$$f_T = \max\left(S_T - X, 0\right) = \left(S_T - X \vee 0\right)$$

$$f_0 = e^{-rT} E\left(S_T - X \vee 0\right) = \begin{cases} e^{-rT} \sum_{s=1,..,S} p_s \left(S_T^s - X \vee 0\right) & \text{(2a)} \\ e^{-rT} \int_{\omega \in A} \left(S_T(\omega) - X \vee 0\right) dF^{\omega} & \text{(2b)} \end{cases}$$

- Il modello (2a) è discreto (numero finito di possibili realizzazioni di prezzo). Consideriamo a titolo esemplificativo il modello binomiale
- Il modello (2b) è invece continuo ed in presenza di alea Gaussiana ha associato il modello di Black and Scholes

brownian motion

- Torniamo sulle proprietà principali del modello di Wiener

$(i)\quad z(0)=0$

$(ii)\; z(t+s)-z(t)\in N(0,s)$

$(iii)\; z(t+s_1)-z(t)\; ind\; z(t)-z(t-s_2), s_1, s_2>0$

$(iv)\; z(t)\in C, dz(t):=z(t+dt)-z(t)$

$(v)\; dz(t)=\sqrt{dt}e_t, e_t\in N(0,1)$

$$\Leftrightarrow z(t)=z(0)+\int_0^t dz_s=\int_0^t dz_s \qquad (3)$$

$(vi)\lim_{dt\downarrow 0}\frac{dz(t)}{dt}=\lim_{dt\downarrow 0}\frac{\sqrt{dt}}{dt}$ not defined $\Rightarrow$ nowhere differentiability

Funzioni medie di ABM e GBM

- Nel caso di moto aritmetico abbiamo:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dz_s$$

$$EX(t) = E\left[X(0) + \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dz_s \right] = x_0 + \mu E \int_0^t ds + \sigma E \int_0^t dz_s$$

$$= x_0 + \mu(t-0) + 0 = x_0 + \mu t$$

$$VX(t) = E\left(X(t) - \mu\right)^2 = \sigma^2 t$$

geometric brownian motion

- Il modello sottostante BSM è il moto browniano geometrico:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu X(s)ds + \int_0^t \sigma X(s)dz_s$$

$$dX(t) = X(t)\left[\mu dt + \sigma dz_t\right]$$

$$X(t) = X(0)e^{\int_0^t(\mu-0.5\sigma^2)ds+\int_0^t \sigma dz_s} = X(0)e^{(\mu-0.5\sigma^2)t+\sigma z_t}$$

$$EX(t) = X(0)e^{(\mu-0.5\sigma^2)t}(Ee^{\sigma z_t}) = X(0)e^{(\mu-0.5\sigma^2)t}(e^{0.5\sigma^2 t}) = X(0)e^{\mu t}$$

- La varianza del processo lognormale è di più difficile derivazione.

Abbiamo in generale

$$\ln X(t) - \ln X(0) \in N\left((\mu - 0.5\sigma^2)t, \sigma\sqrt{t}\right)$$

$$\ln X(t) \in N\left(\ln X(0) + (\mu - 0.5\sigma^2)t, \sigma\sqrt{t}\right) \qquad (4)$$

Proprietà statistiche

- In ambedue i casi abbiamo

  expected return per unit risk goes to 0 for *dt*→*0*, and the risk/return ratio goes to infinity (*infinite variations)*

$$\lim_{h\downarrow 0+}\frac{\sigma(X_{t+h}-X_t)}{\mu(X_{t+h}-X_t)}=\lim_{h\downarrow 0+}\frac{\sigma X_t\sqrt{h}}{\mu X_t h}=\lim_{h\downarrow 0+}\frac{\sigma}{\mu\sqrt{h}}=\infty \qquad (5)$$

- I processi diffusivi di cui sopra cadono nella classe dei processi di Ito: continui, nondifferenziabili ed a variazioni infinite

$$X(t)=X(0)+\int_0^t \mu(s,X_s)ds+\int_0^t \sigma(s,X_s)dz_s$$

Ito calculus

- Il calcolo di Ito è alla base della valutazione di contratti il cui payoff dipenda da tali processi

$$dX(t) = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dz_t \qquad (6)$$

$$V(X+dX, t+dt) = V(X,t) + \frac{\partial V}{\partial X}dX + \frac{\partial V}{\partial t}dt$$

$$+ \frac{\partial^2 V}{2\partial X^2}(dX)^2 + \frac{\partial^2 V}{2\partial t^2}(dt)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial t}(dXdt)$$

$$+ o(dt^{3/2})$$

Ito's lemma

$$X=\ln(S), S=e^{X}=f(X), dX=\alpha dt+\sigma dz$$

$$S(X+dX,t+dt)-S(X,t)=dS$$

$$=\frac{\partial f}{\partial X}dX+\frac{\partial f}{\partial t}dt+\frac{\partial^2 f}{2\partial X^2}(dX)^2$$

$$=\frac{\partial f}{\partial X}(\alpha dt+\sigma dz)+\frac{\partial f}{\partial t}dt+\frac{\partial^2 f}{2\partial X^2}\sigma^2 dt$$

$$=e^{X}(\alpha dt+\sigma dz)+0+0.5e^{X}\sigma^2 dt$$

$$=e^{X}(\alpha+0.5\sigma^2)dt+e^{X}\sigma dz$$

$$\Rightarrow e^{X}=S$$

$$dS/S=(\alpha+0.5\sigma^2)dt+\sigma dz=\mu dt+\sigma dz$$

Remark:

with no risk

df=rf dt

Ito calculus

- Consider as a specific example of payoff *ln(S(T))*

$$E[\ln S_T] = \ln(S_t) + (\mu - 0.5\sigma^2)(T-t) \approx \{\ln(S_t) + (r - 0.5\sigma^2)(T-t) \mid Q\}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial S} dS + 0.5 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial f}{\partial t} dt = rf$$

$$f(t) = e^{-r(T-t)} E[\ln S_T] = e^{-r(T-t)} [\ln(S_t) + (r - 0.5\sigma^2)(T-t)]$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = e^{-r(T-t)} \frac{1}{S}, \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -e^{-r(T-t)} \frac{1}{S^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = re^{-r(T-t)} [\ln(S_t) + (r - 0.5\sigma^2)(T-t)] - e^{-r(T-t)} (r - 0.5\sigma^2)$$

$$\Rightarrow e^{-r(T-t)} [r \ln(S_t) + r(r - 0.5\sigma^2)(T-t) - (r - 0.5\sigma^2) + r - 0.5\sigma^2] = rf$$

$$f = e^{-r(T-t)} E[\ln(S_T)]$$

Option pricing with Monte Carlo

- Thus

$$\frac{\partial f}{\partial S} dS + 0.5 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

$$s.t. f_T = \ln S_T \tag{7}$$

has solution

$$f(t) = e^{-r(T-t)} E\left[f_T \right]$$

- This result is valid in general (cf eq.1), regardless the underlying stochastic model:

The current price of a contingent claim at a future date T is equal to the expected payoff under the risk-neutral probability measure discounted for the risk-free exponential discount factor

Modello binomiale

- Consideriamo un portafoglio corto una call –c(X=21) scritta su un titolo azionario con prezzo corrente S(0)=20 ed il quale al termine del periodo può valere S(1,1)=22 o S(1,2)=18. Quanto vale questa opzione?

$$\Delta = \frac{1}{22-18} = 0{,}25 \rightarrow \Pi_0 = \Delta S_0 - c \Rightarrow \begin{cases} \Pi_1^1 = 0{,}25 \cdot 22 - 1 = 4{,}5 \\ \Pi_1^2 = 0{,}25 \cdot 18 - 0 = 4{,}5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Pi_0 = 4{,}5 e^{-0{,}03} = 4{,}367$$

$$\Rightarrow c = \Delta S_0 - \Pi_0 = 0{,}25 \cdot 20 - 4{,}367 = 0{,}633$$

Modello binomiale

- Generalizziamo:

$$\Delta S_0 u - f_u$$

$$\Delta S_0 - f$$

$$\Delta S_0 d - f_d$$

$$\Delta S_0 u - f_u = \Delta S_0 d - f_d \Rightarrow \Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}$$

$$\Pi_0 = \Delta S_0 - f = (\Delta S_0 u - f_u)e^{-rT} \Rightarrow f = \Delta S_0 - (\Delta S_0 u - f_u)e^{-rT}$$

$$\Rightarrow f = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} S_0 - \left(\frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} S_0 u - f_u \right) e^{-rT}$$

$$= e^{-rT}\left[p f_u + (1-p) f_d \right], p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

Modello binomiale

- Osservazione 1:

$$E(S_T) = \left[pS_0 u + (1-p)S_0 d \right] = S_0 e^{rT}$$

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

(8)

Valutazione neutrale al rischio

Eqv

Valore atteso scontato costante nel tempo

Eqv

Pseudo probabilità

Eqv

Unicità portafoglio di replicazione

Modello binomiale

- Osservazione 2:

$$E\left(\frac{dS}{S}\right)=\mu, V\left(\frac{dS}{S}\right)=\sigma^2$$

$$q=\frac{e^{\mu\Delta t}-d}{u-d}, u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$\Rightarrow qS_0u+(1-q)S_0d=S_0e^{\mu\Delta t}$$

(9)

Valutazione rispetto alla misura naturale o di mercato

Il rialzo e ribasso sono calibrati sulla volatilità stimata

La volatilità viene preservata nel passaggio da *p* a *q*

Modelli diffusivi

- Il valore del contratto derivato dipende dalla dinamica stocastica del sottostante
- Alcuni esempi famosi in letteratura:

$$X(0) = x_0, dz(t) \in N(0, dt)$$

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dz(t) \longleftarrow \text{ABM}$$

$$dX(t) = X_t\left(\mu dt + \sigma dz(t)\right) \longleftarrow \text{GBM}$$

$$dX(t) = \alpha(\mu - X_t)dt + \sigma dz(t) \longleftarrow \text{O-U}$$

$$dX(t) = \alpha(\mu - X_t)dt + \sigma(X_t)^\gamma dz(t), \gamma \in (0,1) \longleftarrow \text{Bessel}$$

$$\gamma = 0.5 : dX(t) = \alpha(\mu - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dz(t) \longleftarrow \text{Squared Bessel}$$

- From the well known B&S option formula (no dividends)

$$S(t)\,|\,\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dz_t$$

$$f = f(S_t, X, \sigma, r, T) = \max(S_T - X, 0) \quad \text{for a call}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial S}dS + 0.5\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dS^2 + \frac{\partial f}{\partial t}dt = rf \qquad (10)$$

$$\Rightarrow f(0) = e^{-rT}E\left[f_T\right] \Leftrightarrow e^{-rT}E\left[\max(S_T - X, 0)\right] \qquad (11)$$

Black and Scholes

- The B&S formula can be recovered as the solution of the above partial differential equation with *f* denoting the option payoff:

$$c(S,X,T,\sigma,r) = S_0 N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2)$$
$$p(S,X,T,\sigma,r) = Xe^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \qquad (12)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Risk-neutral valuation

Black & Scholes

- We recall:

$$c(S,X,T,\sigma,r) = e^{-rT}\left[S_0 e^{rT} N(d_1) - XN(d_2)\right]$$

$$= e^{-rT}\left[\left(S_0 e^{rT}\frac{N(d_1)}{N(d_2)} - X\right)N(d_2)\right]$$

$$= e^{-rT}\left[\left(S_0 e^{rT}\frac{N(d_1)}{N(d_2)} - X\right)Q(S_T > X)\right]$$

Prezzo fw del titolo azionario condizionato alla scadenza ITM

$$= e^{-rT}\left[E\left(S_T \mid S_T > X\right)Q(S_T > X) - X\cdot Q(S_T > X)\right]$$

$$= e^{-rT}\underbrace{E\left[\left(S_T - X \vee 0\right)\right]}_{f} \qquad (13)$$

Call option exercise probability

$$Q[S_T > X] = Q\left[Se^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}Z_T} > X\right] = Q\left[Ln\left(Se^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}Z_T}\right) - Ln(X) > 0\right]$$

$$= Q\left[Ln(S_0 / X) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z_T \leq 0\right] = Q\left[Ln(S_0 / X) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T \leq -\sigma\sqrt{T}Z_T\right]$$

$$= Q\left[Z_T \leq \frac{Ln(V_0 / F) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] = N(d_2)$$

$$Z_T \propto N(0,1), d_2 = \frac{Ln(S_0 / X) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Probabilità di esercizio di un'opzione put

$$Q\left[S_T \le X\right] = Q\left[S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}Z_T} \le X\right] = Q\left[Ln\left(S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}Z_T}\right) - Ln(X) \le 0\right]$$

$$= Q\left[Ln\left(S_0 / X\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z_T \le 0\right] = Q\left[Ln\left(S_0 / X\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T \le -\sigma\sqrt{T}Z_T\right]$$

$$= Q\left[Z_T \le -\frac{Ln\left(V_0 / F\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] = N(-d_2) = 1 - N(d_2)$$

$$Z_T \propto N(0,1),\ d_2 = \frac{Ln\left(S_0 / X\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Modello di Black

- Come anticipato, il modello di Black, a parità di ipotesi, si applica a contratti valutati a termine:

$$
\begin{aligned}
c(S,X,T,\sigma,r) &= e^{-rT}\left[F_{0,T}N(d_1) - XN(d_2)\right] \\
&= e^{-rT}\left[\left(F_{0,T}\frac{N(d_1)}{N(d_2)} - X\right)N(d_2)\right] \\
&= e^{-rT}\left[\left(F_{0,T}\frac{N(d_1)}{N(d_2)} - X\right)Q(F_{0,T} > X)\right] \\
&= e^{-rT}\left[\left(F_{0,T} - X\right)Q(F_{0,T} > X) + 0Q(\leq X)\right] \\
&= e^{-rT}E\left[\left(F_{0,T} - X \vee 0\right)\right]
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

Prezzo forward condizionato ad un'opz ITM in T

Modello di Black

- La relazione tra la volatilità del prezzo forward di un titolo e la volatilità del suo rendimento (generalmente quotata o disponibile):

$$\text{vol prezzo } \sigma \approx Dy\,\sigma_y \quad \text{vol rendimento}$$

- Con prezzo dell'obbl.ne in T con distribuzione lognormale, avremo:

$$P(T,\bar{T}) \propto Ln(.,.), \;\; \sigma(\ln(P_{T,\bar{T}})) = \sigma\sqrt{T}$$

$$\begin{aligned} c &= Z_{0,T}\,E_T\left[\max(P_{T,\bar{T}} - X), 0\right] \\ &= Z_{0,T}\left[E_T(P_{T,\bar{T}} - I)N(d_1) - XN(d_2)\right] \\ &= Z_{0,T}\left[F_0 N(d_1) - XN(d_2)\right] \end{aligned}$$

$$d_{1,2} = \frac{\ln(F_0/X) \pm \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

Metodo di Monte Carlo

- Abbiamo considerato una molteplicità di casi in cui al variare delle ipotesi statistiche sul sottostante e del payoff dei contratti si recupera la formula valutativa generale

$$f_0 = e^{-rT} E\left[f_T(\omega) \right]$$

- Il valore atteso di una funzione aleatoria può in generale essere stimato attraverso un modello di simulazione sulla base del fondamentale teorema di convergenza (SLLN)

$$\lim_{S \to \infty} \sum_{s=1}^{S} p_s f(\omega_s) \xrightarrow{wp\,1} \int_{\omega \in \Omega} f(\omega) dF_\omega = E\left[f(\omega) \right] \qquad (15)$$

Metodo di Monte Carlo

- E’ possibile quindi affrontare non solo il problema valutativo ma anche quello relativo ad una replicazione ottimale di un certo payoff impiegando il metodo di MC
  - Definire il payoff
  - E la dinamica stocastica del sottostante
  - Stimare i coefficienti del processo
  - Derivare il processo equivalente neutrale rispetto al rischio
  - Per date condizioni inizxialiu simulare un gran numero di traiettorie aleatorie
  - Applicare il payoff alle singole traiettorie ed i valori attesi
  - Scontare ad oggi

Monte Carlo

- Osservazioni:
  - Ipotesi sulla dinamica dei sottostanti (lognormal, with jumps, fat tailed, multidimensional, etc)
  - La definizione nel tempo delle dinamiche dei derivati (any contingent claim can be regarded as a function of the above stocastic process)
  - La misura di probabilità neutrale al rischio (BS è in forma chiusa o parametrica non abbiamo bisogno di simulazioni)
  - Efficienza computazionale

Monte Carlo

- Il metodo di MC è necessario nei seguenti casi:
  - Il numero di variabili aleatorie è troppo grande per consentirte una soluzione in forma chiusa
  - Le distribuzioni generate dai sottostanti sono particolarmente complesse
  - Le opzioni sono path-dependent (il loro valore dipende dalla traiettoria seguita fino a scadenza)
- Per finalità puramente espositive consideriamo GBM

Lognormal stock price simulation

$$s_t = Ln(S_t) \qquad\qquad s(0) = s_0$$

$$s_{t+dt} - s_t = \ln\left(\frac{S_{t+dt}}{S_t}\right) \approx \frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t}$$

$$s_{t+dt} = s_t + \mu dt + \sigma dz_t \qquad \left\{ s_t = s_{t-dt} + \mu dt \mid s(0) = s_0 \right\} \Rightarrow ES_t = S_0 e^{\mu t}$$

$$s_{dt} = s_0 + \mu dt + \sigma dz^1 \qquad dz^1 \in N(0, dt)$$

$$s_{2dt} = s_{dt} + \mu dt + \sigma dz^2 \qquad dz^2 \in N(0, dt)$$

....

$$s_t = s_{ndt} = s_{t-dt} + \mu dt + \sigma dz^n \qquad dz^n \in N(0, dt)$$

Lognormal stock price simulation

- D'altra parte:

$$s_{t+dt} = s_t + \mu dt + \sigma dz_t \qquad dz_t \in N(0, dt)$$
$$= s_t + \mu dt + \sigma \sqrt{dt}\, e_t \qquad e_t \in N(0,1)$$

- Per cui per generare una traiettoria:

$$ds_t = \mu dt + \sigma dz_t \qquad s(0) = s_0 \quad dz_t \in N(0, dt)$$

$$\Rightarrow S_t = S_0 e^{\left(\mu - 0.5\sigma^2\right)t + \sigma z_t} = S_0 e^{\left(\mu - 0.5\sigma^2\right)t + \sigma\left[\sum_{i=1}^{n} e^i \sqrt{dt}\right]} \qquad t = n \cdot dt, e \in N(0,1)$$

$$= S_0 e^{\left(\mu - 0.5\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} e^i\right]}$$

Lognormal stock price simulation

- Ripetendo un numero di volte alto a piacere i precedenti passaggi è possibile minimizzare l'errore di campionamento e pervenire ad una valutazione corretta del derivato
- Esiste un trade off tra precisione del metodo ed efficienza numerica che deve essere considerato
- Il metodo descritto può essere definito *naive MC*
- Maggiore efficienza computazionale può essere raggiunta utilizzando due metodi molto noti in pratica: il metodo delle *variabili antitetiche* ed il metodo dei *campioni stratificati*

Lognormal stock price simulation

- In the antithetic variate method, the sample space is filled in by considering for each draw from the half-positive standard normal distribution its negative value and thus reaching a faster and certainly symmetric density approximation
- In the stratified sampling method we first draw from a uniform distribution in (0,1) and then regard the draw as a sample from a specified percentile and recursively fill in the space:

$$u_1 \in U(0,1) \Rightarrow \hat{u}_1 = u_1 / 100 \in U(0,0.01)$$

$$u_2 \in U(0,1) \Rightarrow \hat{u}_2 = 0.01 + u_2 / 100 \in U(0.01,0.02)$$

....

$$u_i \in U(0,1) \Rightarrow \hat{u}_i = (i - 1 + u_i) / 100 \in U\left(\frac{i-1}{100}, \frac{i}{100}\right)$$

....

MC valuation of a European call option

- Applichiamo al caso di una call:

$$V(S_T^i, T) = \max(S_T^i - X, 0)$$

$$V(S_0, 0) = e^{-rT}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1,\ldots,n} V(S_T^i, T)\right] = e^{-rT}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1,\ldots,n} \max(S_T^i - X, 0)\right]$$

$$\Leftarrow$$

1) $\max(S_T^i - X, 0) = \max(0, S_0 e^{(r-0.5\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}e_i} - X) \qquad i = 1,2,\ldots,n$

2) $E\left[\max(S_T^i - X, 0)\right] = \dfrac{1}{n}\sum_i \max(S_T^i - X, 0)$

3) $c(S, X, r, \sigma, T) = e^{-rT}\dfrac{1}{n}\sum_i \max(S_T^i - X, 0)$

Monte Carlo

- Un grado aggiuntivo di complessità nella metodologia sottostante la quale non incide peraltro sulla procedura di pricing è rappresentato dall'introduzione di sottostanti tra loro correlati
- Nel caso di due soli sottostanti abbiamo:

$$
\begin{aligned}
f_0 &= e^{-rT} E\left[f_T\left(S(\omega), P(\omega)\right)\right] \\
corr\,(S, P) &= \rho
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

- La procedura vale per qualunque numero di sottostanti

correlated stock prices

- Assumiamo i due titoli con distribuzione lognormale

$$\begin{cases} S_t = S_0 e^{\left(\mu_S - 0.5\sigma_S^2\right)t + \sigma_S W_t^1} & S_0 \text{ noto} \\ P_t = P_0 e^{\left(\mu_P - 0.5\sigma_P^2\right)t + \sigma_P W_t^2} & P_0 \text{ noto} \end{cases}$$

$$W_t^1, W_t^2 \in N(0, dt) \quad \text{correlati} \tag{17}$$

$$corr(W_t^1, W_t^2) = \rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \propto N(0,1)$, tra loro indipendenti avremo

$$W_t^1 = \varepsilon_1 \sqrt{t}$$

$$W_t^2 = \left(\rho\varepsilon_1 + \sqrt{1-\rho^2}\,\varepsilon_2\right)\sqrt{t}$$

correlated stock prices

- Su n titoli, in notazione matriciale

$$ds_t^i = \mu_i dt + \sum_{j=1}^{N} \sigma_i c_{ji} d\widetilde{W}_t^j \qquad i = 1,..,N,\ d\widetilde{W}_t^j \text{ independenti}$$

$$ds_t = \mu dt + diag\{\sigma\} C^T d\widetilde{W}_t, \quad C^T \mid \mathrm{P} = C^T C, C^T \text{ triangolare bassa}$$

$$s_T = s_0 + (\mu - \sigma^2/2)T + diag\{\sigma\} C^T e\sqrt{T} \qquad e \propto MVN(0, I) \qquad (18)$$

$$= diag\{\sigma\} C^T e\sqrt{T} \qquad \text{se } \mu = \sigma^2/2$$

correlated stock prices

- La scelta di C in (18) non è unica.
- La scomposizione di Choleski è la più adottata in pratica

$$c_{ij} = \frac{1}{c_{jj}}\left[\rho_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{jk} c_{ik}\right] \quad i > j \qquad (19)$$

$$c_{jj} = \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{j-1} c_{jk}^2}$$

Monte Carlo (ctd)

- Esempio con due titoli:

$$ds_t^1 = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1$$

$$ds_t^2 = \mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^2$$

$$\Sigma := \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \sigma \Gamma \sigma \Rightarrow C \mid \Gamma = CC', C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$ds_t^1 = \mu_1 dt + \sigma_1 c_{11} dW_t^1$$

$$ds_t^2 = \mu_2 dt + \sigma_2 (c_{21} dW_t^1 + c_{22} dW_t^2)$$

Metodo di Monte Carlo, valutazione di un derivato e PDE

- Da sopra:

Valore atteso sotto la misura neutrale rispetto al rischio o di martingala

$$f(0) = e^{-rT} E\left[f_T(\omega)\right]$$

Principio generale di valutazione in assenza di arbitraggio

$$\Leftarrow df = \frac{\partial f}{\partial S} d\omega + 0.5 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} d\omega^2 + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Equazione alle derivate parziali (lemma di Ito) o dinamica del derivato in funzione del sottostante

Portafoglio di replicazione

- Il valore atteso esprime anche la soluzione della PDE

Modelli stocastici con r(t) aleatorio

- Per chiarire ulteriormente la relazione fondamentale tra PDE e principio di valutazione generalizziamo al caso di contratti dipendenti dai tassi d'interesse
- La PDE origina dall'applicazione dell'**espansione di Taylor**:

$$dP_{t,T} = \frac{\partial P_{t,T}}{\partial r} dr + \frac{\partial P_{t,T}}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_{t,T}}{\partial r^2} (dr)^2 + o(dt) \qquad (20)$$

- Nella (20) possiamo distinguere l'incremento aleatorio del rendimento alla scadenza e la variazione temporale del contratto, laddove: $P_{T,T} = 1$

r(t) aleatorio

- Da cui dividendo per il prezzo corrente e discretizzando recuperiamo la dipendenza del prezzo da duration e convessità:

$$\frac{\Delta P_{t,T}}{P_{t,T}} = \frac{1}{P_{t,T}}\frac{\partial P_{t,T}}{\partial r}\Delta r_t + \frac{1}{P_{t,T}}\frac{\partial P_{t,T}}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2P_{t,T}}\frac{\partial^2 P_{t,T}}{\partial r^2}(\Delta r_t)^2$$

$$= -D_t \Delta r_t + r_t \Delta t + \frac{1}{2} C_t \Delta r_t^{\;2}$$

modelli stocastici (ctd)

- Il rendimento del titolo è scomposto in tre parti:
  - la variazione istantanea

$$r_t \Delta t = \frac{1}{P_{t,T}} \frac{\partial P_{t,T}}{\partial t} \Delta t$$

  - il rendimento moltiplicato per la **duration** (relazione inversa)

$$D_t \Delta r_t = -\frac{1}{P_{t,T}} \frac{\partial P_{t,T}}{\partial y} \Delta r_t$$

  - il quadrato del rendimento moltiplicato per la **convexity** (dipendenza non lineare del secondo ordine)

$$\frac{1}{2} C_t \Delta r_t^2 = \frac{1}{2 P_{t,T}} \frac{\partial^2 P_{t,T}}{\partial y^2} \Delta r_t^2$$

- Le relazioni valgono indipendentemente da ipotesi di natura probabilistica sulle variazioni dei rendimenti

r aleatorio

- Si possono considerare due casi:
  1. Rendimenti gaussiani e distribuzione di prezzo lognormale
  2. incrementi modellati da un processo stocastico della curva dei rendimenti
- Nel primo caso abbiamo il modello di Black.
- Nel secondo caso rimaniamo nel dominio del **calcolo stocastico** e la procedura di pricing è basata sui principi introdotti precedentemente

Modello di Vasicek

- Il modello di Black non assume alcuna particllare evoluzione stocastica del tasso d'interesse non rischioso
- Vasicek (1977) per primo ipotizzò una legge di evoluzione del tasso a breve di tipo diffusivo:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dz_t$$

- Vogliamo considerare le implicazioni per il pricing di un derivato sempre in ipotesi di neutralità rispetto al rischio

Modello di Vasicek

- Sia f_T un generico payoff associato ad uno strumento il cui valore dipende dai tassi di interesse e *v* il valore corrente del derivato

$$v = E\left[e^{-\int_0^T r_t \, dt} f_T \right]$$

- Per uno ZCB varrà $$Z(t,T) = E\left[e^{-\bar{r}(T-t)}\right] \approx E\left[e^{-\int_t^T r_s(\omega)\,ds} \right] \qquad (21)$$

- Da cui, indicando con *R(t,T)* il rendimento in capitalizzazione continua conoscendo *r(t)* e la sua evoluzione tra *t* e *T* ricaviamo la struttura dei rendimenti, al variare di *T*

$$R_{t,T} = -\frac{1}{T-t}\ln(Z(t,T)) = -\frac{1}{T-t}\ln\left\{E\left[e^{-\bar{r}(T-t)}\right]\right\} \qquad (22)$$