LS FIME

a.a. 2008-2009

Teoria delle opzioni

e

Prodotti strutturati

Giorgio Consigli

giorgio.consigli@unibg.it

Uff 258 – ricevimento merc: 11.00-13.00

Programma

1. **Mercato delle opzioni e contratti derivati**
2. ***Teoria delle opzioni***
3. **Tecniche di valutazione**
4. **Hedging**
5. **Ingegneria finanziaria**
6. **Procedure numeriche**
7. **Derivatives disasters**

Opzioni e ProdStrutt 2

Teoria delle opzioni

- 2a. Opzioni su titoli azionari
- 2b. Relazioni di parità per opzioni europee ed americane
- 2c. Strategie basate su opzioni azionarie
- 2d. Opzioni su titoli a reddito fisso
- 2e. Opzioni composite su contratti futures
- 2f. Opzioni reali
- 2g. Opzioni su indici di mercato

2a. Opzioni su titoli azionari

- Da cosa dipende il valore di un'opzione?

$$c, p = g(S_0, X, \sigma, r, T, q)$$

All'aumentare del prezzo del titolo sottostante al di sopra dello strike, aumenta il valore della call e diminuisce il valore della put. E viceversa. Di quanto?

All'aumentare della volatilità del sottostante, aumenta sia il valore delle call che delle put (cf esempi). Qui giace il valore dell'assicurazione!

All'aumentare dei tassi d'interesse (aumenta il rendimento atteso sul sottostante e diminuisce il valore attuale dei flussi attesi dal detentore dell'opzione) aumenta il valore di una call e diminuisce il valore di una put

Opzioni su titoli azionari

- Se l’azione paga dividendi durante la vita dell’opzione poiché il prezzo dell’azione dopo lo stacco risulterà ridotto, ciò accresce il valore di una put e riduce il valore di una call
- Al crescere delle scadenza infine aumenta il valore dell’assicurazione offerta dal contratto e ne beneficiano sia le call che le put

Black-Scholes-Merton 1973

- Sotto ipotesi di lognormalità del prezzo di un'azione B-S-M hanno dimostrato la relazione:

$$c(S, X, T, \sigma, r) = S_0 N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

- Vale anche:

$$p(S, X, T, \sigma, r) = Xe^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

2b. Relazioni di parità (europee, no dividendi)

- Si considerino due portafogli:
  - Pflio A: pos lunga call europea e ammontare monetario necessario a scadenza per eventuale esercizio
  - Pflio B: pos.lunga put europea e titolo azionario da vendere a scadenza
- Legge del prezzo unico: in assenza di flussi intermedi a parità di payoff alla scadenza i due portafogli devono avere lo stesso valore alla data corrente
- Dimostrazione: mostrare che i due portafogli hanno il medesimo payoff → ricavare valore corrente

Relazioni di parità (europee, dividendi)

- La relazione di parità è $S_0 + p = c + Xe^{-rT}$
- Da cui: $S_t + p_t = c_t + Xe^{-r(T-t)} \qquad t \in \left]0, T\right]$

$$c_t - p_t = S_t - Xe^{-r(T-t)} = \begin{cases} >0 \ \text{se}\ S_t > Xe^{-r(T-t)} \\ =0 \ \text{se}\ S_t = Xe^{-r(T-t)} \\ <0 \ \text{se}\ S_t < Xe^{-r(T-t)} \end{cases}$$

Call ITM

Put ITM

$$ATM - options:$$

$$c_t - p_t = X\left(1 - e^{-r(T-t)}\right) > 0 \to 0, t \to T$$

Relazioni di parità (europee, dividendi)

- Con dividendi:

$$S_0 e^{-qT} + p = c + Xe^{-rT}$$

$$S_0 - D + p = c + Xe^{-rT}$$

$$\Rightarrow c(q) = S_0 - D + p - Xe^{-rT} < S_0 + p - Xe^{-rT} = c$$

$$\Rightarrow p(q) = c + Xe^{-rT} + D - S_0 > c + Xe^{-rT} - S_0 = p$$

- NB: il valore iniziale del portafoglio è al netto dei dividendi da incassare

Relazioni tra opzioni americane (no dividendi)

- Nel caso di opzioni americane si ha una relazione di disuguaglianza, non di parità
- Si considerino due portafogli:
  - Uno consistente di un'opzione europea call ed un ammontare monetario X
  - Il secondo consistente di un'opzione americana put più un titolo azionario

per mostrare che $S_0 - X \leq C - P$

Relazione tra opzioni americane (no dividendi)

- Si considerino poi i seguenti due portafogli:
  - Uno consistente di un'opzione call american ed un ammontare monetario sufficiente a pagare lo strike a scadenza
  - Il secondo consistente di un'opzione put europea più il titolo azionario sottostante

  per mostrare che $C - P \leq S_0 - Xe^{-rT}$
- Da cui:

$$S_0 - X \leq C - P \leq S_0 - Xe^{-rT}$$

2c. Strategie con opzioni

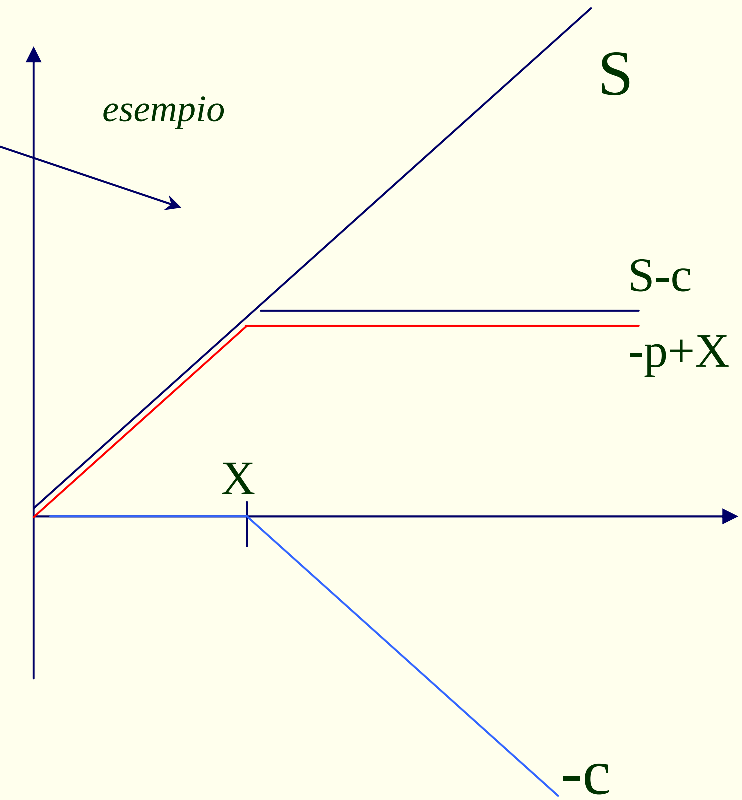
- La parità tra opzioni put e call europee può essere vista come relazione tra il valore di due portafogli:

$$p + S_0 e^{-qT} = c + Xe^{-rT}$$

- E' possibile definire un insieme di strategie costruite unicamente sulle opzioni le quali beneficino del fattore leva proprio dei titoli opzionari sia disallineamenti dovuti ad opportunità di arbitraggio

Strategie con opzioni

+S	-c	=	-p	+X
-S	+c	=	+p	-X
+c	+X	=	+p	+S
-c	-X	=	-p	-S



Strategie con opzioni

- Notate l'equivalenza dei seguenti payoffs:
  - Una posizione lunga sul sottostante e corta sull'opzione call è equivalente ad una posizione corta put con medesime caratteristiche
  - Una posizione lunga su una put è equivalente ad una call lunga più una posizione corta sul sottostante
  - Una call lunga può essere replicata con un portfoglio lungo una put e lungo il sottostante
  - Una call corta è equivalente ad un portafoglio corto il sottostante e la put

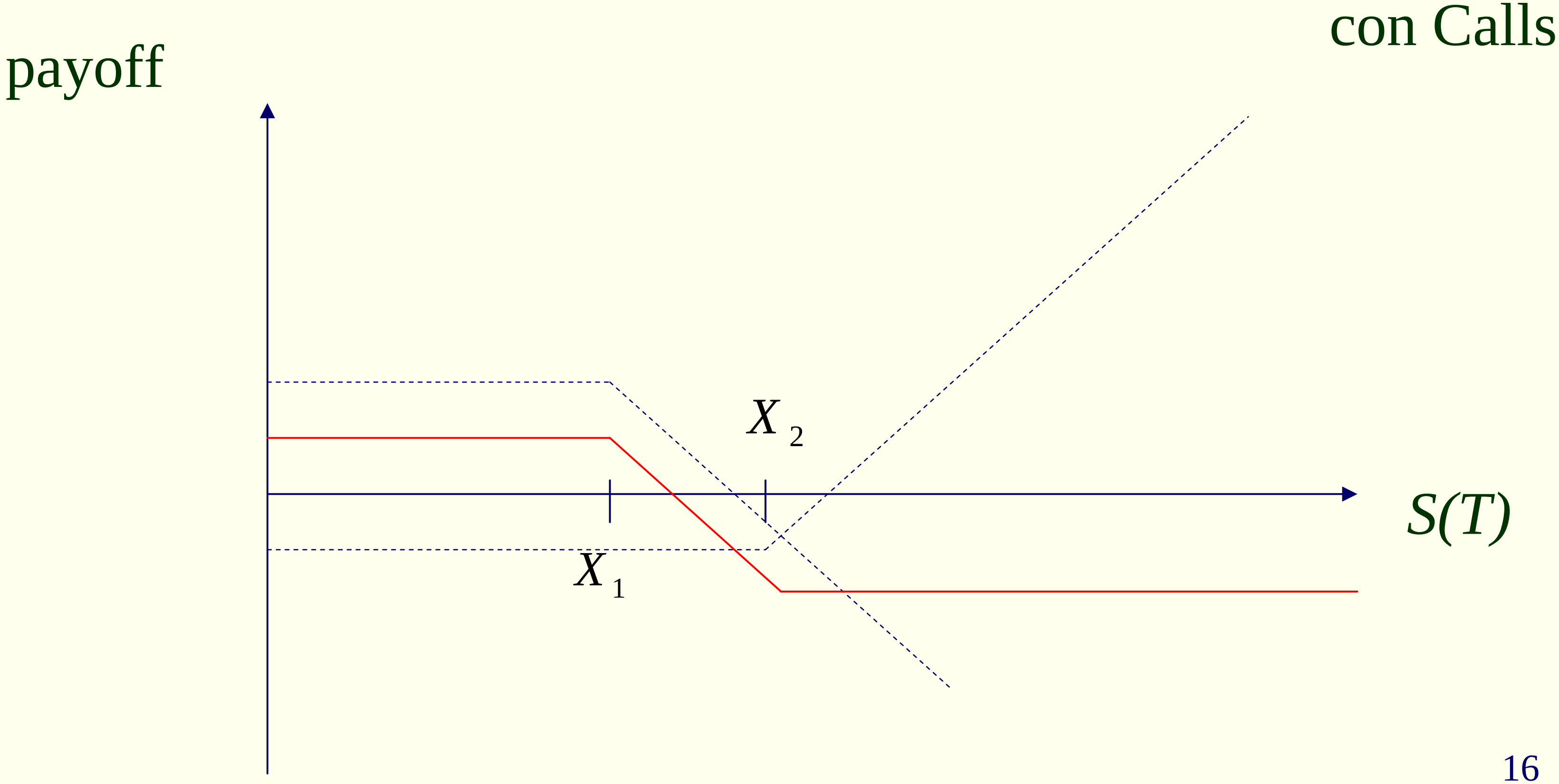
Strategie con opzioni

- Considereremo i seguenti tipi di strategia, largamente utilizzate nell’operatività in titoli derivati:
  - Gli spreads
    - Bear spreads (con contratti Call o Put)
    - Bull spreads (con contratti Call o Put)
    - Butterfly spreads (con Calls o Puts)
  - Gli straddles e gli strangles (call e put)
- Ciascuna di queste strategie può implicare posizioni corte o lunghe.
- Le analizziamo graficamente e mostriamo come combinazioni di opzioni possono definire payoffs estremamente compositi.

Bear call spread

- Bear spread o spread al ribasso:

$$X_1 < X_2 \qquad \begin{cases} -c(X_1) + c(X_2) \\ -p(X_1) + p(X_2) \end{cases}$$



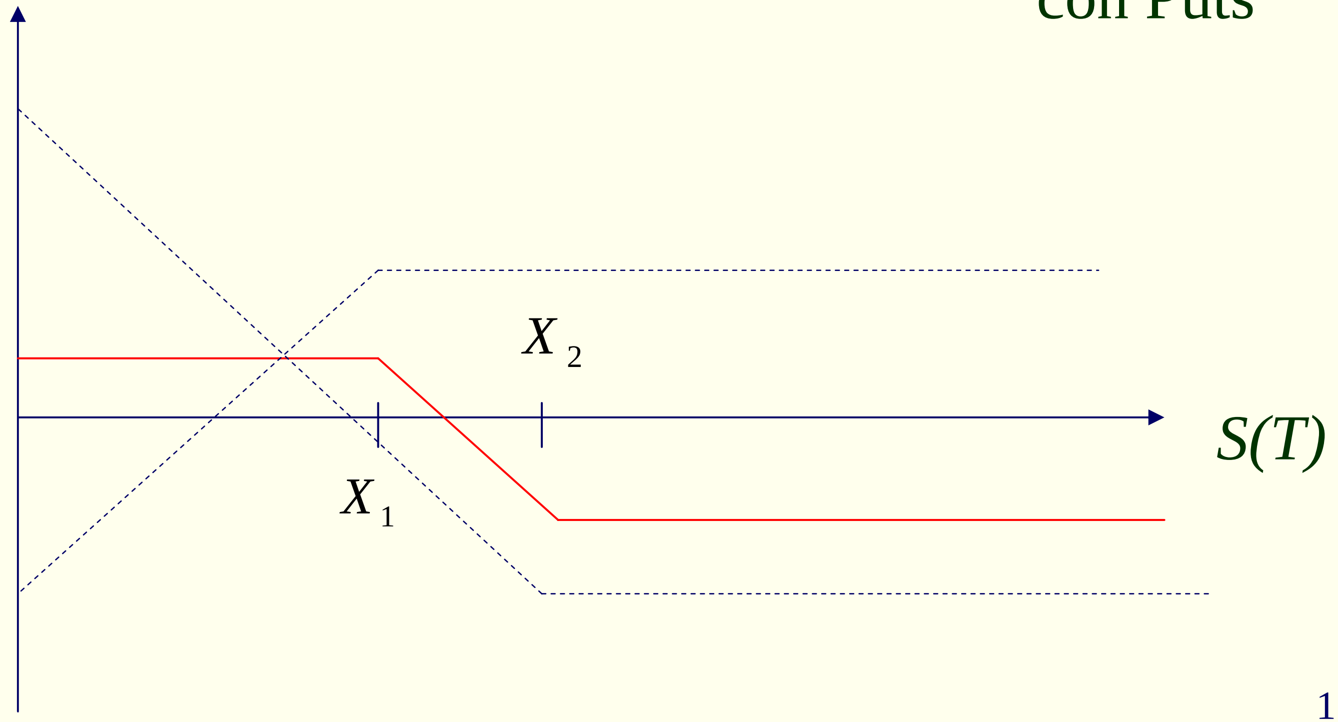
Bear put spread

- Bear spread o spread al ribasso:

$$X_1 < X_2 \qquad \begin{cases} -c(X_1) + c(X_2) \\ -p(X_1) + p(X_2) \end{cases}$$

payoff

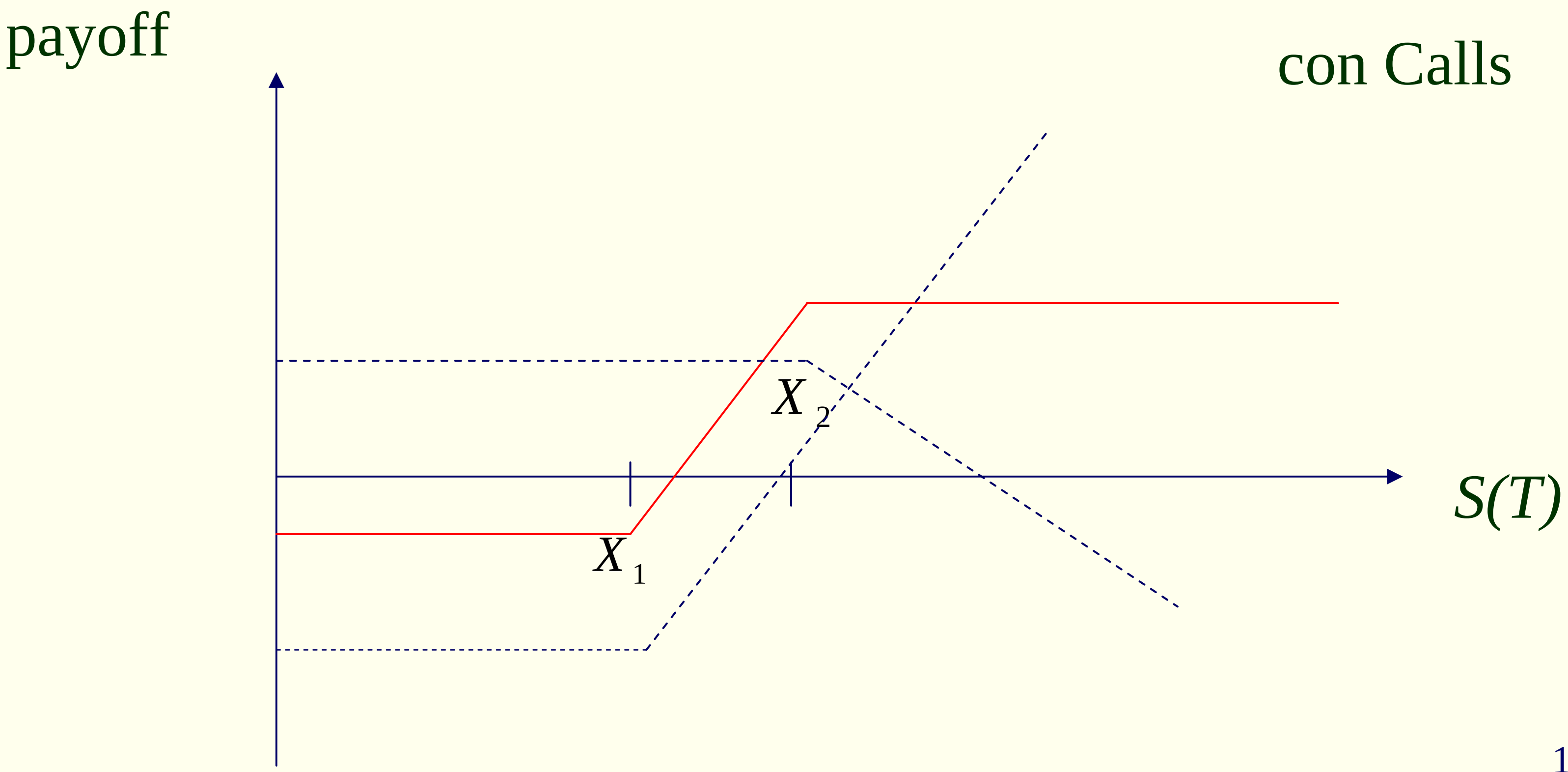
con Puts



Bull call spread

- Bull spread o spread al rialzo:

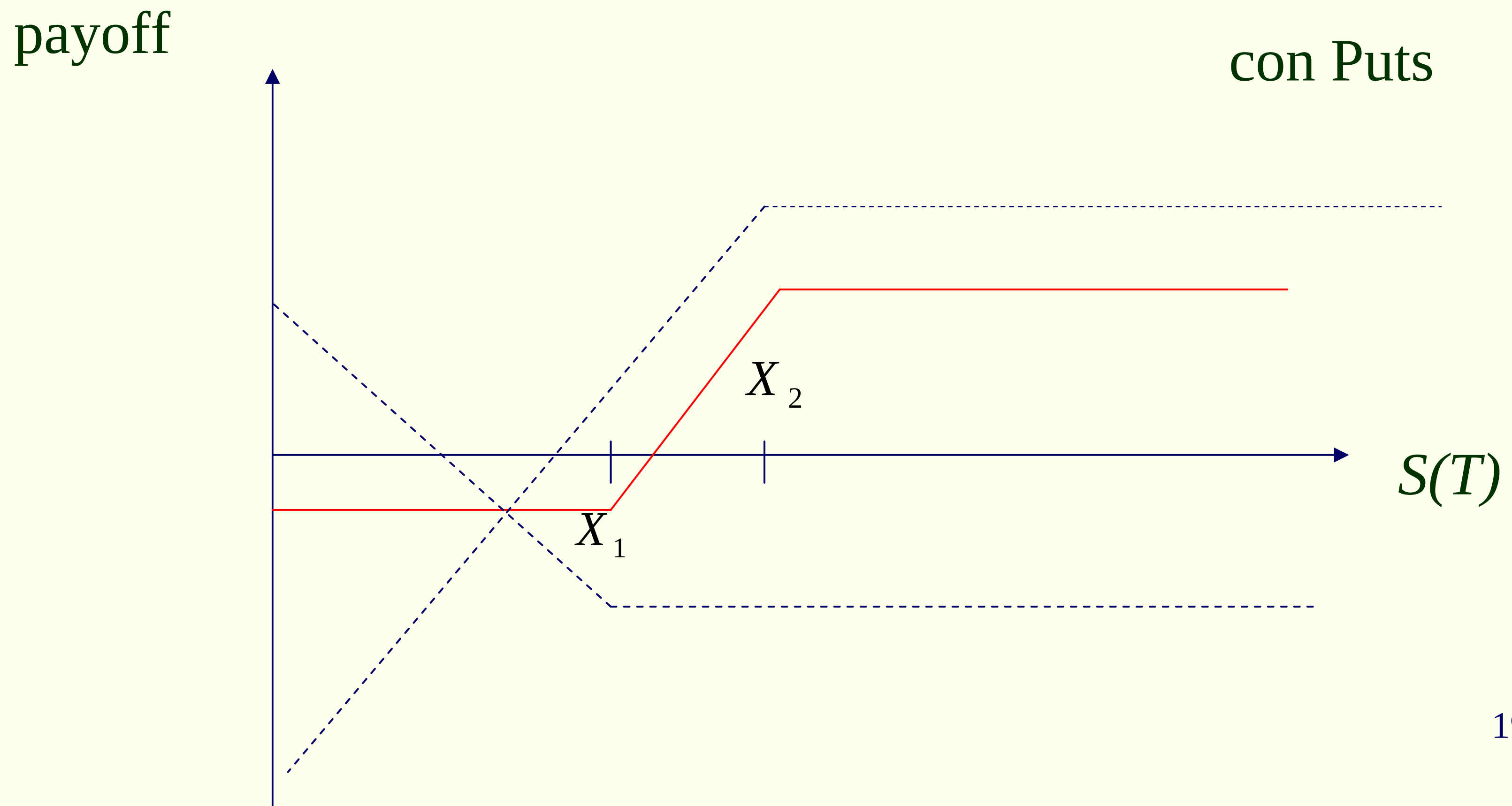
$$X_1 < X_2 \qquad \begin{cases} c(X_1) - c(X_2) \\ p(X_1) - p(X_2) \end{cases}$$



Bull put spread

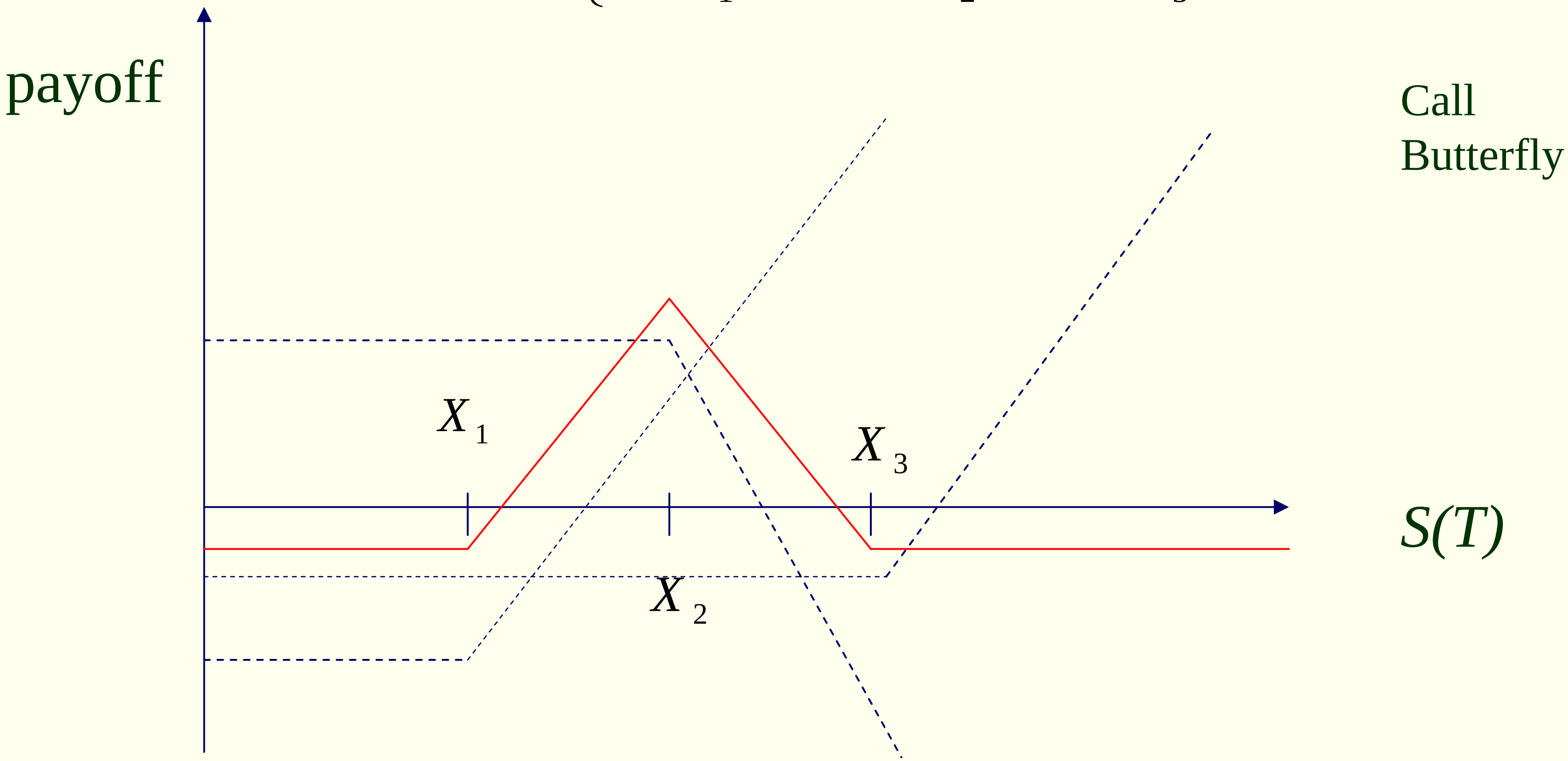
- Bull spread o spread al rialzo:

$$X_1 < X_2 \qquad \begin{cases} c(X_1) - c(X_2) \\ p(X_1) - p(X_2) \end{cases}$$



- Consideriamo ora le strategie a farfalla, del tipo:

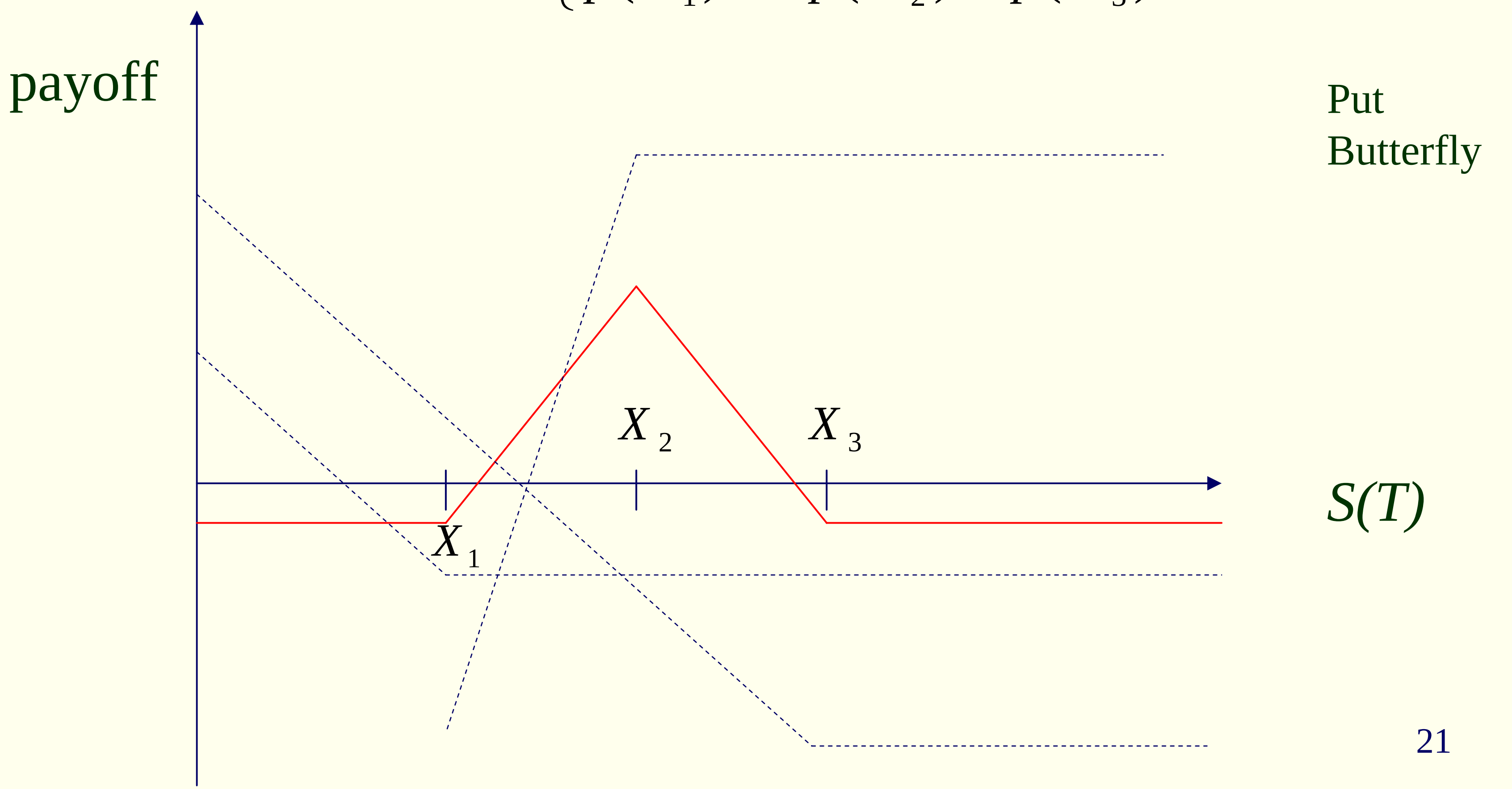
$$X_1 < X_2 < X_3 \qquad \begin{cases} c(X_1) - 2c(X_2) + c(X_3) \\ p(X_1) - 2p(X_2) + p(X_3) \end{cases}$$



Strategie con opzioni

- Analogo payoff è ottenuto con le put

$$X_1 < X_2 < X_3 \qquad \begin{cases} c(X_1) - 2c(X_2) + c(X_3) \\ p(X_1) - 2p(X_2) + p(X_3) \end{cases}$$



Strategie con opzioni

- L'analisi delle strategie sulle opzioni è completata dalle combinazioni di call e put.
  - Lo straddle è definito da un portafoglio lungo o corto su due contratti (call e put) scritti su un medesimo strike
  - Lo strangle è invece associato ad un portafoglio con una put ed una call, la prima su uno strike inferiore alla seconda

$c(X_1) + p(X_1)$ lungo

$-c(X_1) - p(X_1)$ corto

$p(X_1) + c(X_2)$ lungo

$-p(X_1) - c(X_2)$ corto

2d. Opzioni su titoli a reddito fisso

- Il valore di un titolo a reddito fisso dipende dalla struttura per scadenza dei tassi d'interesse e di flussi di cassa previsti dal contratto
- All'avvicinarsi della scadenza la volatilità di prezzo tende a zero
- Sono prevalentemente europee ed OTC
- Si ipotizza in generale che il prezzo dell'obbligazione alla scadenza sia lognormale

Opzioni su titoli a reddito fisso

- Ricordiamo il valore di un contratto obbligazionario sul mercato a pronti:

$$p(t,T)=\sum_{i=1}^{n} x_{t_i} e^{-r(t,t_i)(t_i-t)} \qquad t<t_1<t_2<\ldots<t_n=T$$

$$p(s,T)-p(t,T)=\sum_{i=1}^{n} x_{t_i} e^{-r(s,t_i)(t_i-s)}-\sum_{i=1}^{n} x_{t_i} e^{-r(t,t_i)(t_i-t)} \quad t<s<t_1\ldots<t_n=T$$

- Il valore in *s* definito al tempo *0* sul mercato future deve soddisfare la relazione:

$$F(0,s,T)=\sum_{i=1}^{n} x_{t_i} e^{-f(0,s,t_i)(t_i-s)}$$

$$f(0,s,t_i)=\frac{r(0,t_i)\cdot t_i-r(0,s)\cdot s}{t_i-s}, \quad i=1,2,\ldots,n$$

Opzioni su titoli a reddito fisso

- Risultato: in assenza di arbitraggio il valore sul mercato future ad una data futura *s* coincide con il valore capitalizzato fino a quella data del prezzo spot odierno

$$F(0,s,T)=\sum_{i=1}^{n} x_{t_i} e^{-f(0,s,t_i)(t_i-s)} = \sum_{i=1}^{n} x_{t_i} e^{-r(0,t_i)\cdot t_i} e^{r(0,s)\cdot s} \qquad i=1,2,\ldots,n$$

$$= P(0,T)e^{r(0,s)\cdot s}$$

Questo risultato è indipendente dalla tipologia di contratto sottostante (obbligazione, titolo azionario, materia prima) ed è alla base del principio di valutazione sui mercati future

2e. Opzioni su futures

- Le call futures inducono una posizione lunga sui futures, le put un posizione corta.
- I futures sono contratti standardizzati che in generale sono scambiati su una molteplicità di strumenti reali e finanziari.
- Consideriamo i futures sui tassi di interesse.
- Per la valutazione delle opzioni su futures si utilizza tipicamente il modello di valutazione di Black
- Tra tassi di interesse, prezzi e futures sussiste la relazione

$$r(t,T)\uparrow\downarrow \Rightarrow P(t,T)\downarrow\uparrow \Rightarrow F(t,T)\downarrow\uparrow$$

Opzioni su futures

- Le opzioni su futures al momento dell'esercizio inducono un flusso monetario legato alla differenza tra lo strike concordato ed il prezzo future corrente (*marking-to-market)*
- Il modello di Black per la valutazione delle opzioni su futures è sempre basato su un'ipotesi di lognormalità dei rendimenti:

$$c(F_0, X, \sigma, r, T) = e^{-rT}\left[F_{0,T} N(d_1) - XN(d_2)\right]$$

$$p(F_0, X, \sigma, r, T) = e^{-rT}\left[XN(-d_2) - F_{0,T} N(-d_1)\right]$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_{0,T}}{X}\right) + \left(0.5\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Opzioni su futures

- Analizziamo la put-call parity per opzioni su futures ed il modello di valutazione delle opzioni prima nel caso di opzioni europee e poi di opzioni americane.
- Consideriamo due portafogli
  - A: lungo una call su future ed un deposito monetario
  - B: lungo una put su future, un contratto future ed un importo liquido

	A	B
$t = 0$	$c + Xe^{-rT}$	$p + F_0 + F_0 e^{-rT}$
$t = T$	$\max(F_T - X, 0) + X$ $= \max(F_T, X)$	$\max(X - F_T, 0) + F_T - F_0 + F_0$ $= \max(X, F_T)$

Opzioni su futures

- Per le opzioni americane vale invece la disuguaglianza

$$F_0 e^{-rT} - X \leq C - P \leq F_0 - Xe^{-rT}$$

- Per dimostrarla consideriamo i seguenti portafogli:
  - Per la disuguaglianza di sinistra: un portafoglio A, lungo una call europea ed un importo monetario pari ad X, ed un portafoglio B, lungo una put americana, un future con scad. T, ed un importo monetario pari al valore attuale del future
  - Per la disuguaglianza di destra: un portafoglio C, lungo una call americana ed un importo monetario pari al valore attuale dello strike ed un portafoglio D, con una put europea, un future ed un importo monetario pari al valore del forward

Opzioni su divise – un sottocaso di scambio a termine

- La valutazione delle opzioni su divise richiede l'introduzione del tasso di cambio a pronti e dei tassi di interesse interni ed esterni non rischiosi per la data scadenza.
- Il tasso di cambio forward (stessa scadenza dell'opzione) è definito come montante del cambio a pronti capitalizzato per il differenziale di tasso, in regime che ipotizziamo esponenziale:

$$\xi_0, r_{0,T}, r^f_{0,T}, F_{0,T} \quad = \xi_0 e^{\left(r_{0,T} - r^f_{0,T}\right)T}$$

- La relazione si può dimostrare considerando l'opportunità di arbitraggio che insorgerebbe se essa non fosse verificata

$$\xi_0 e^{rT} \left(F_{0,T}\right)^{-1} = e^{r^f T} \qquad \longleftarrow \text{Foreign vs foreign}$$

$$\xi_0 e^{rT} = F_{0,T} e^{r^f T} \qquad \longleftarrow \text{Local vs local}$$

Opzioni su divise

- Sotto queste ipotesi è possibile estendere l'eq. B&S al contesto in oggetto ed avremo:

$$c(0) = c(F_0, X, \sigma, r, r^f, T) = \xi_0 e^{-r_{0,T}^f T} N(d_1) - Xe^{-r_{0,T} T} N(d_2)$$

$$p(0) = p(F_0, X, \sigma, r, r^f, T) = Xe^{-r_{0,T} T} N(-d_2) - \xi_0 e^{-r_{0,T}^f T} N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{\xi_0}{X}\right) + \left(r_{0,T} - r_{0,T}^f + 0.5\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

- La formula di valutazione può essere semplificata considerando la relazione precedentemente richiamata

$$F_{0,T} = \xi_0 e^{\left(r_{0,T} - r_{0,T}^f\right)T}$$

Opzioni su divise

- Avremo:

$$c(0) = e^{-rT}\left[F_{0,T}N(d_1) - XN(d_2)\right]$$

$$p(0) = e^{-rT}\left[XN(-d_2) - F_{0,T}N(-d_1)\right]$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_{0,T}}{X}\right) + \left(0.5\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

- La semplificazione è possibile solo se la scadenza del contratto forward coincide con la scadenza dell'opzione.

2f. Opzioni reali

- Le opzioni reali si distinguono da quelle di natura finanziaria per la natura dell'attività sottostante: terreni, fabbricati, fabbriche, investimenti fissi e reali in generale
- Approccio tradizionale: NPV (REA !...)
- Approccio avanzato alla scelta di investimenti basato sulla teoria delle opzioni.
- Si consideri il payoff: $V_0 - e^{-rt} E\left[K(t) \cdot \max\left(V(\omega) - 35{,}0\right)\right]$
- Sulla base del confronto tra valore corrente di mercato e rendimento attualizzato di un investimento (eventuale) futuro

2g. Opzioni su portafogli azionari – indici di mercato

- Estendiamo ora l’analisi classica di Black and Scholes al caso di sottostanti non rappresentati da semplici titoli azionari, ma da portafogli di titoli (indici o benchmarks azionari)
- Definiamo un indice azionario, costituito da *n* titoli

$$I(t) = \sum_{j=1,..,n} w^j S_t^j$$

$$w^j = \frac{S_0^j}{\sum_j S_0^j}$$

Opzioni su indici

- Alcuni dei titoli del paniere pagano dividendi per cui è definito implicitamente un dividend payout pari a *q*
- Sotto queste ipotesi è possibile estendere l'eq. B&S al contesto in oggetto ed avremo:

$$c(0) = c(I_0, X, \sigma, r, T, q) = I_0 e^{-qT} N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2)$$

$$p(0) = p(I_0, X, \sigma, r, T, q) = X e^{-rT} N(-d_2) - I_0 e^{-qT} N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{I_0}{X}\right) + \left(r - q + 0.5\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Opzioni su indici

- La parità tra put e call risulta anche in questo caso verificata

$$c + Xe^{-rT} = p + I_0 e^{-qT}$$

$$c - p = I_0 e^{-qT} - Xe^{-rT}$$

$$\Leftarrow I_0 e^{-qT} N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) - Xe^{-rT} N(-d_2) + I_0 e^{-qT} N(-d_1)$$

$$= I_0 e^{-qT} \left[N(d_1) + N(-d_1) \right] - Xe^{-rT} \left[N(d_2) + N(-d_2) \right]$$

$$= I_0 e^{-qT} \left[N(d_1) + 1 - N(d_1) \right] - Xe^{-rT} \left[N(d_2) + 1 - N(d_2) \right]$$

$$= I_0 e^{-qT} - Xe^{-rT}$$

- La relazione può anche essere verificata attraverso il principio di assenza di arbitraggio (esempio)

Opzioni su indici

- Un'applicazione di particolare rilevanza sul mercato delle opzioni sugli indici è rappresentata dalla protezione dei rendimenti dei gestori di investimenti

ESEMPIO DI ASSICURAZIONE DI PORTAFOGLI