A1. Considerazioni sul cambio di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale

Sia xyz un sistema di riferimento cartesiano ortogonale di origine O e $\overline{xyz}$ un secondo sistema di riferimento cartesiano pure di origine O.

Siano $\alpha_{x,\bar{x}}$, $\alpha_{y,\bar{x}}$ e $\alpha_{z,\bar{x}}$ i coseni direttori dell'asse $\bar{x}$ rispetto alla terna xyz. Sia **V** un vettore avente componenti, rispetto al sistema xyz, (V_x ; V_y; V_z). La componente $V_{\bar{x}}$ del vettore **V** secondo il nuovo asse $\bar{x}$ è la proiezione di **V** su $\bar{x}$ quindi il prodotto scalare tra **V** e il versore dell'asse $\bar{x}$ avente componenti ($\alpha_{x,\bar{x}}$; $\alpha_{y,\bar{x}}$; $\alpha_{z,\bar{x}}$)

Utilizzando la notazione matriciale si può scrivere:

$$[V_{\bar{x}}] = [V_x \quad V_y \quad V_z] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{x,\bar{x}} \\ \alpha_{y,\bar{x}} \\ \alpha_{z,\bar{x}} \end{bmatrix}$$

analogamente per le componenti di **V** secondo gli assi $\bar{y}$ e $\bar{z}$ si ottiene:

$$[V_{\bar{y}}] = [V_x \quad V_y \quad V_z] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{x,\bar{y}} \\ \alpha_{y,\bar{y}} \\ \alpha_{z,\bar{y}} \end{bmatrix}$$

$$[V_{\bar{z}}] = [V_x \quad V_y \quad V_z] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{x,\bar{z}} \\ \alpha_{y,\bar{z}} \\ \alpha_{z,\bar{z}} \end{bmatrix}$$

Possiamo scrivere le tre precedenti espressioni in un'unica equazione matriciale:

$$[V_{\bar{x}} \quad V_{\bar{y}} \quad V_{\bar{z}}] = [V_x \quad V_y \quad V_z] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{x,\bar{x}} & \alpha_{x,\bar{y}} & \alpha_{x,\bar{z}} \\ \alpha_{y,\bar{x}} & \alpha_{y,\bar{y}} & \alpha_{y,\bar{z}} \\ \alpha_{z,\bar{x}} & \alpha_{z,\bar{y}} & \alpha_{z,\bar{z}} \end{bmatrix}$$

Definendo

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{x,\bar{x}} & \alpha_{x,\bar{y}} & \alpha_{x,\bar{z}} \\ \alpha_{y,\bar{x}} & \alpha_{y,\bar{y}} & \alpha_{y,\bar{z}} \\ \alpha_{z,\bar{x}} & \alpha_{y,\bar{y}} & \alpha_{z,\bar{z}} \end{bmatrix} \qquad \text{(A1.1)}$$

si scrive in forma più sintetica:

$$[V_{\bar{x}} \quad V_{\bar{y}} \quad V_{\bar{z}}] = [V_x \quad V_y \quad V_z] \cdot [\alpha] \qquad \text{(A1.2a)}$$

oppure in forma analoga eseguendo la trasposta:

$$\begin{bmatrix} V_{\bar{x}} \\ V_{\bar{y}} \\ V_{\bar{z}} \end{bmatrix} = [\alpha]^T \cdot \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}. \qquad \text{(A1.2b)}$$

Con la medesima relazione si trasformano, passando dal sistema xyz al sistema $\overline{xyz}$, anche le coordinate (P_x ; P_y; P_z) di un punto P, basta considerare che quest'ultime coincidono con le componenti del vettore **PO.**

Si noti come le colonne di [α] rappresentano i coseni direttori degli assi del nuovo sistema di coordinate rispetto al vecchio. Quindi evidentemente, essendo i nuovi assi ortogonali tra loro, si ha che:

$$[\alpha_{x,\bar{x}} \quad \alpha_{y,\bar{x}} \quad \alpha_{z,\bar{x}}] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{x,\bar{x}} \\ \alpha_{y,\bar{x}} \\ \alpha_{z,\bar{x}} \end{bmatrix} = 1 \quad [\alpha_{x,\bar{y}} \quad \alpha_{y,\bar{y}} \quad \alpha_{z,\bar{y}}] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{x,\bar{y}} \\ \alpha_{y,\bar{y}} \\ \alpha_{z,\bar{y}} \end{bmatrix} = 1 \quad [\alpha_{x,\bar{z}} \quad \alpha_{y,\bar{z}} \quad \alpha_{z,\bar{z}}] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{x,\bar{z}} \\ \alpha_{y,\bar{z}} \\ \alpha_{z,\bar{z}} \end{bmatrix} = 1$$

$$[\alpha_{x,\bar{x}} \quad \alpha_{y,\bar{x}} \quad \alpha_{z,\bar{x}}] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{x,\bar{y}} \\ \alpha_{y,\bar{y}} \\ \alpha_{z,\bar{y}} \end{bmatrix} = 0 \quad [\alpha_{x,\bar{y}} \quad \alpha_{y,\bar{y}} \quad \alpha_{z,\bar{y}}] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{x,\bar{z}} \\ \alpha_{y,\bar{z}} \\ \alpha_{z,\bar{z}} \end{bmatrix} = 0 \quad [\alpha_{x,\bar{z}} \quad \alpha_{y,\bar{z}} \quad \alpha_{z,\bar{z}}] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{x,\bar{x}} \\ \alpha_{y,\bar{x}} \\ \alpha_{z,\bar{x}} \end{bmatrix} = 0$$

Che sono le condizioni per definire $[\alpha]$ una matrice ortonormale, in particolare e facile ricavare che:

$$[\alpha]^T \cdot [\alpha] = [\alpha] \cdot [\alpha]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] \text{ (matrice identità)}$$

Dalla relazione precedente si può ricavare $[\alpha]^T = [\alpha]^{-1}$

Quindi le A1.2 possono essere scritte in forma inversa:

$$[V_{\bar{x}} \quad V_{\bar{y}} \quad V_{\bar{z}}] \cdot [\alpha]^{-1} = [V_x \quad V_y \quad V_z] \cdot [\alpha] \cdot [\alpha]^{-1} = [V_x \quad V_y \quad V_z]$$

$$[V_x \quad V_y \quad V_z] = [V_{\bar{x}} \quad V_{\bar{y}} \quad V_{\bar{z}}] \cdot [\alpha]^T \tag{A1.2c}$$

oppure in forma analoga eseguendo la trasposta:

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = [\alpha] \cdot \begin{bmatrix} V_{\bar{x}} \\ V_{\bar{y}} \\ V_{\bar{z}} \end{bmatrix} \tag{A1.2d}$$

A2. Definizione della matrice $[e]$ e sua trasformazione al variare del sistema di riferimento.

Si consideri un sistema di riferimento cartesiano ortogonale x, y, z, sia $\mathbf{U}(\mathrm{P}(x, y, z))$ un vettore funzione del punto P avente coordinate x, y, z a loro volta funzioni di $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ tramite le equazioni: $x = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $y = g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $z = h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ l'analisi matematica insegna che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial \bar{x}} \\
\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial \bar{y}} \\
\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}
\end{aligned} \qquad (A2.1)$$

In particolare consideriamo $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ le coordinate del punto P secondo un nuovo sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ che abbia origine coincidente con il sistema x, y, z, siano inoltre $\alpha_{x,\bar{x}}$; $\alpha_{y,\bar{x}}$; $\alpha_{z,\bar{x}}$ i coseni direttori del nuovo asse $\bar{x}$ rispetto agli assi x, y, z, con notazione analoga si identificano i coseni direttori degli assi $\bar{y}, \bar{z}$.

Ricordando le A1.2 le relazioni fra le componenti di un generico vettore V secondo il sistema di riferimento x,y,z (V_x; V_y; V_z) e secondo un secondo sistema $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ($V_{\bar{x}}$; $V_{\bar{y}}$; $V_{\bar{z}}$) sono:

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = [\alpha] \cdot \begin{bmatrix} V_{\bar{x}} \\ V_{\bar{y}} \\ V_{\bar{z}} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} V_{\bar{x}} \\ V_{\bar{y}} \\ V_{\bar{z}} \end{bmatrix} = [\alpha]^T \cdot \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \qquad (A2.2a)$$

Come detto le medesime relazioni si hanno per le coordinate x, y, z del punto P che sono legate alle coordinate $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ (sempre del punto P) dalla seguente equazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [\alpha] \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = [\alpha]^T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad (A2.2)$$

Le A2.2 altro non sono che le relazione $x = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $y = g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $z = h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Chiamiamo il vettore $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \boldsymbol{e_x}$; analogamente $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \boldsymbol{e_y}$; $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = \boldsymbol{e_z}$; $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \bar{x}} = \boldsymbol{e_{\bar{x}}}$; $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \bar{y}} = \boldsymbol{e_{\bar{y}}}$; $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \bar{z}} = \boldsymbol{e_{\bar{z}}}$.

Attenzione il pedice non indica la componente del vettore e, indica viceversa la direzione in cui si è effettuata la derivata parziale del vettore* U*!

Osserviamo inoltre dalle A2.2 che $\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} = \alpha_{x,\bar{x}}$; $\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} = \alpha_{y,\bar{x}}$; $\frac{\partial h}{\partial \bar{x}} = \alpha_{z,\bar{x}}$

Sostituendo nella prima delle A2.1 otteniamo

$$\boldsymbol{e_{\bar{x}}} = \boldsymbol{e_x}\,\alpha_{x,\bar{x}} + \boldsymbol{e_y}\,\alpha_{y,\bar{x}} + \boldsymbol{e_z}\,\alpha_{z,\bar{x}} \qquad (A2.3a)$$

che in forma matriciale diventa:

$$\boldsymbol{e_{\bar{x}}} = [\boldsymbol{e_x} \quad \boldsymbol{e_y} \quad \boldsymbol{e_z}] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{x,\bar{x}} \\ \alpha_{y,\bar{x}} \\ \alpha_{z,\bar{x}} \end{bmatrix} \qquad (A2.3a)$$

analogamente si possono riscrivere la seconda e la terza delle A2.1:

$$\boldsymbol{e}_{\bar{y}} = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}\, \alpha_{x,\bar{y}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}}\, \alpha_{y,\bar{y}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}}\, \alpha_{z,\bar{y}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{e}_{\bar{y}} = [\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} \quad \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}}] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{x,\bar{y}} \\ \alpha_{y,\bar{y}} \\ \alpha_{z,\bar{y}} \end{bmatrix} \qquad \text{(A2.3b)}$$

$$\boldsymbol{e}_{\bar{z}} = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}\, \alpha_{x,\bar{z}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}}\, \alpha_{y,\bar{z}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}}\, \alpha_{z,\bar{z}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{e}_{\bar{z}} = [\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} \quad \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}}] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{x,\bar{z}} \\ \alpha_{y,\bar{z}} \\ \alpha_{z,\bar{z}} \end{bmatrix} \qquad \text{(A2.3c)}$$

In forma matriciale possiamo scrivere le tre equazioni precedenti, sempre ricordando la definizione della matrice $[\alpha]$:

$$[\boldsymbol{e}_{\bar{x}} \quad \boldsymbol{e}_{\bar{y}} \quad \boldsymbol{e}_{\bar{z}}] = [\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} \quad \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}}] \cdot [\alpha]$$

oppure:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{\bar{x}} \\ \boldsymbol{e}_{\bar{y}} \\ \boldsymbol{e}_{\bar{z}} \end{bmatrix} = [\alpha]^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}} \\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}} \end{bmatrix}$$

Ognuna delle equazioni vettoriali (A2.3a, b, c) corrisponde a tre equazioni scalari ad esempio la A2.3a può essere riscritta, considerando le componenti secondo il sistema x, y, z, come segue:

$$e_{\bar{x}x} = e_{xx}\, \alpha_{x,\bar{x}} + e_{yx}\, \alpha_{y,\bar{x}} + e_{zx}\, \alpha_{z,\bar{x}}$$

$$e_{\bar{x}y} = e_{xy}\, \alpha_{x,\bar{x}} + e_{yy}\, \alpha_{y,\bar{x}} + e_{zy}\, \alpha_{z,\bar{x}}$$

$$e_{\bar{x}z} = e_{xz}\, \alpha_{x,\bar{x}} + e_{yz}\, \alpha_{y,\bar{x}} + e_{zz}\, \alpha_{z,\bar{x}}$$

Si noti che e_{xx} rappresenta la componente del vettore $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}$ secondo l'asse x, che vale, per le regole di derivazione dei vettori, $e_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x}$ analogamente $e_{xy} = \frac{\partial U_y}{\partial x}$ ecc. In generale $e_{ij} = \frac{\partial U_j}{\partial i}$ dove i e j assumono i valori di x, y, z.

$$e_{xx} = e_{xx}\, \alpha_{x,\bar{x}} + e_{yx}\, \alpha_{y,\bar{x}} + e_{zx}\, \alpha_{z,\bar{x}}$$

Che in forma matriciale diventa:

$$\begin{bmatrix} e_{\bar{x}x} \\ e_{\bar{x}y} \\ e_{\bar{x}z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{x,\bar{x}} \\ \alpha_{y,\bar{x}} \\ \alpha_{z,\bar{x}} \end{bmatrix}$$

Si possono ottenere le componenti secondo il sistema di riferimento $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ utilizzando la seconda delle A2.2a, premoltiplicando quindi entrambi i membri per la matrice $[\alpha]^{\mathrm{T}}$:

$$\begin{bmatrix} e_{\bar{x}\bar{x}} \\ e_{\bar{x}\bar{y}} \\ e_{\bar{x}\bar{z}} \end{bmatrix} = [\alpha]^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} e_{\bar{x}x} \\ e_{\bar{x}y} \\ e_{\bar{x}z} \end{bmatrix} = [\alpha]^{T} \cdot \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{x,\bar{x}} \\ \alpha_{y,\bar{x}} \\ \alpha_{z,\bar{x}} \end{bmatrix}$$

Analogamente per le 3b e 3c si ottengono altre 6 equazioni scalari:

$$\begin{bmatrix} e_{\bar{y}\bar{x}} \\ e_{\bar{y}\bar{y}} \\ e_{\bar{y}\bar{z}} \end{bmatrix} = [\alpha]^T \cdot \begin{bmatrix} e_{\bar{y}x} \\ e_{\bar{y}y} \\ e_{\bar{y}z} \end{bmatrix} = [\alpha]^T \cdot \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{x,\bar{y}} \\ \alpha_{y,\bar{y}} \\ \alpha_{z,\bar{y}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_{\bar{z}\bar{x}} \\ e_{\bar{z}\bar{y}} \\ e_{\bar{z}\bar{z}} \end{bmatrix} = [\alpha]^T \cdot \begin{bmatrix} e_{\bar{z}x} \\ e_{\bar{z}y} \\ e_{\bar{z}z} \end{bmatrix} = [\alpha]^T \cdot \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{x,\bar{z}} \\ \alpha_{y,\bar{z}} \\ \alpha_{z,\bar{z}} \end{bmatrix}$$

Possiamo scrivere le nove equazioni scalari in un'unica equazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} e_{\bar{x}\bar{x}} & e_{\bar{y}\bar{x}} & e_{\bar{z}\bar{x}} \\ e_{\bar{x}\bar{y}} & e_{\bar{y}\bar{y}} & e_{\bar{z}\bar{y}} \\ e_{\bar{x}\bar{z}} & e_{\bar{y}\bar{z}} & e_{\bar{z}\bar{z}} \end{bmatrix} = [\alpha]^T \cdot \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix} \cdot [\alpha]$$

Definiamo $[e_{xyz}]=\begin{bmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix}$ e analogamente $[e_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}] = \begin{bmatrix} e_{\bar{x}\bar{x}} & e_{\bar{y}\bar{x}} & e_{\bar{z}\bar{x}} \\ e_{\bar{x}\bar{y}} & e_{\bar{y}\bar{y}} & e_{\bar{z}\bar{y}} \\ e_{\bar{x}\bar{z}} & e_{\bar{y}\bar{z}} & e_{\bar{z}\bar{z}} \end{bmatrix}$

I pedici xyz oppure $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ verranno aggiunti solo ne caso in cui sia importante identificare in sistema di riferimento. Quindi in generale:

$$[e_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}] = [\alpha]^T \cdot [e_{xyz}] \cdot [\alpha] \qquad (A2.4)$$

Scomponiamo la matrice nella somma di due matrici, una simmetrica $[\varepsilon]$ ed una emisimmetrica $[\emptyset]$ i cui elementi siano cosi definiti $\varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji})$ e $[\emptyset]_{i,j} = \frac{1}{2}(e_{ij} - e_{ji})$ dove i,j assumono di volta in volta il valore di x, y, z (oppure $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$).

In termini matriciali: $[\varepsilon] = \frac{1}{2}([e] + [e]^T)$ e $[\emptyset] = \frac{1}{2}([e] - [e]^T)$

Evidentemente $[e] = [\varepsilon] + [\emptyset]$ il significato fisico delle due matrici è già stato illustrato ed in particolare la matrice $[\varepsilon]$ descrive la deformazione e la matrice $[\emptyset]$ la rotazione rigida.

Sostituendo nella A2.4

$$[e_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}] = [\alpha]^T \cdot ([\varepsilon_{xyz}] + [\emptyset_{xyz}]) \cdot [\alpha] = [\alpha]^T \cdot [\varepsilon_{xyz}] \cdot [\alpha] + [\alpha]^T \cdot [\emptyset_{xyz}] \cdot [\alpha]$$

$$[\varepsilon_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}] = \frac{1}{2}([e_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}] + [e_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}]^T) =$$

$$= \frac{1}{2}([\alpha]^T \cdot [\varepsilon_{xyz}] \cdot [\alpha] + [\alpha]^T \cdot [\emptyset_{xyz}] \cdot [\alpha] + ([\alpha]^T \cdot [\varepsilon_{xyz}] \cdot [\alpha] + [\alpha]^T \cdot [\emptyset_{xyz}] \cdot [\alpha])^T)$$

considerando che, essendo $[\varepsilon_{xyz}]$ simmetrica,

$$([\alpha]^T \cdot [\varepsilon_{xyz}] \cdot [\alpha])^T = [\alpha]^T \cdot [\varepsilon_{xyz}] \cdot [\alpha]$$

e che, essendo $[\emptyset_{xyz}]$ emisimmetrica,

$$([\alpha]^T \cdot [\emptyset_{xyz}] \cdot [\alpha])^T = -[\alpha]^T \cdot [\emptyset_{xyz}] \cdot [\alpha]$$

si ottiene:

$$[\varepsilon_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}] = [\alpha]^T \cdot [\varepsilon_{xyz}] \cdot [\alpha] \qquad (A2.5)$$

e analogamente:

$$[\emptyset_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}] = [\alpha]^{\mathrm{T}} \cdot [\emptyset_{\mathrm{xyz}}] \cdot [\alpha]$$

A3. Traccia di una matrice.

Si definisce traccia di una matrice quadrata di ordine n la somma degli elementi della diagonale principale:

$$\mathrm{TR}([A]) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

La traccia del prodotto di due matrici vale:

$$\mathrm{TR}([A] \cdot [B]) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ji}$$

si ricava:

$$\mathrm{TR}([A] \cdot [B]) = \mathrm{TR}([B] \cdot [A])$$

$$\mathrm{TR}([A] \cdot [B] \cdot [C]) = \mathrm{TR}(([A] \cdot [B]) \cdot [C]) = \mathrm{TR}([C] \cdot [A] \cdot [B]) = \mathrm{TR}([B] \cdot [C] \cdot [A])$$

$$\mathrm{TR}([A] \cdot [A]^{T}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{2}$$

A4. Alcune caratteristiche della trasformazione $[\alpha]^T \cdot [A] \cdot [\alpha]$.

Si noti come sia la matrice della stato di sforzo che di deformazione si trasformano al variare del sistema di riferimento con una equazione del tipo $[\alpha]^T \cdot [A] \cdot [\alpha]$ con $[A]$ matrice simmetrica e $[\alpha]$ matrice ortonormale, studiamone alcune caratteristiche.

Sia

$$[B] = [\alpha]^T \cdot [A] \cdot [\alpha]$$

consideriamo innanzitutto che anche $[B]$ è simmetrica, infatti $[B]^T = [B]$.

Calcoliamo la traccia di B

$$TR([B]) = TR([\alpha]^T \cdot [A] \cdot [\alpha]) = TR([A] \cdot [\alpha] \cdot [\alpha]^T) = TR([A])$$

Quindi la trasformazione non modifica la traccia di una matrice.

Calcoliamo la traccia del prodotto di B per la sua trasposta (che coincide con B essendo simmetrica).

$$\begin{aligned} TR([B] \cdot [B]^T) &= TR(([\alpha]^T \cdot [A] \cdot [\alpha]) \cdot ([\alpha]^T [A] \cdot [\alpha])) = TR([\alpha]^T \cdot [A] \cdot [A] \cdot [\alpha]) \\ &= TR([A] \cdot [A]) \end{aligned}$$

quindi $\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$, la trasformazione non modifica la somma dei quadrati degli elementi la matrice.

Considerando ora $[B] = [\sigma'_{123}]$ e $[A] = [\sigma'_{xyz}]$ si ha che:

$$\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2 = \sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = \frac{2}{3}\ \sigma_{eff}^2$$

analogamente considerando $[B] = [\varepsilon_{123}]$ e $[A] = [\varepsilon_{xyz}]$ si ottiene

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + 2(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) = \frac{3}{2}\ \varepsilon_{eff}^2$$