Università degli Studi di Bergamo
Dipartimento di Ingegneria

Sistemi vibranti ad 1 gdl

- vibrazioni forzate -

– rev. 1.2 –

Le vibrazioni forzate di un sistema ad 1 gdl sono descritte dall'equazione:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t) \tag{1}$$

dove, con riferimento alla figura 1, m, k e c sono i ben noti parametri caratteristici del sistema e $F_0 \sin(\omega t)$ è una forzante armonica.

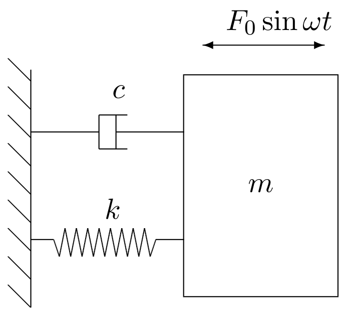


Figura 1: Sistema vibrante ad 1 gdl con forzante armonica generica

L'integrale (o soluzione) dell'equazione differenziale sarà dato dalla somma dell'integrale generale dell'omogenea associata e di un integrale particolare dell'equazione completa:

$$x = x_g + x_p \tag{2}$$

a cui andranno anche applicate le condizioni iniziali $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.
Il contributo dell'integrale x_g tende ad annullarsi in un tempo più o meno lungo a seconda del coefficiente di smorzamento del sistema; a regime permarrà quindi solo l'integrale particolare.
Per quanto riguarda x_g, valgono naturalmente le espressioni ricavate, a seconda del valore di ζ, nell'esercitazione precedente. Ricordiamo che le due costanti d'integrazione, da cui x_g dipende, si ricavano applicando le c.i. all'intera soluzione (2).

Soluzione a regime

L'integrale particolare dell'equazione completa, trattandosi di equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, è di tipo armonico con pulsazione uguale a quella della forzante e in ritardo rispetto a quest'ultima (d'ora innanzi faremo coincidere x con la sola x_g); utilizzando la notazione vettoriale[1] scriveremo:

$$F = F_0 e^{i\omega t} \quad ; \quad x = \mathbf{X} e^{i\omega t} \quad \text{con} \quad \mathbf{X} = e^{-i\delta}$$

Derivando la x si ottiene:

$$\dot{x} = i\omega \mathbf{X} e^{i\omega t} \qquad \ddot{x} = -\omega^2 \mathbf{X} e^{i\omega t}$$

e sostituendo nell'equazione completa:

$$-m\omega^2 \mathbf{X} e^{i\omega t} + ci\omega \mathbf{X} e^{i\omega t} + k\mathbf{X} e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t} \tag{3}$$

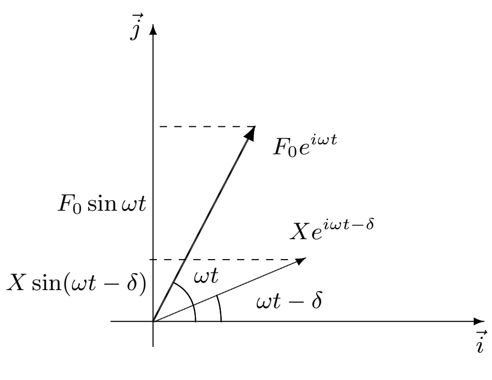
Si ottiene infine:

$$\mathbf{X} = \frac{F_0}{-m\omega^2 + ic\omega + k}$$

relazione valida ad ogni istante t (il termine $e^{i\omega t}$ si è semplificato). che, espressa in funzione della pulsazione naturale ω_n e del rapporto ζ tra il coefficiente di smorzamento e lo smorzamento critico, diventa:

$$\mathbf{X} = \frac{\dfrac{F_0}{k}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\,2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_n}} \tag{4}$$

[1] Per affrontare lo studio della soluzione a regime, risulta comodo introdurre la corrispondenza tra la funzione armonica $F_0 \sin(\omega t)$ e il vettore, nel piano di Gauss, $\mathbf{F} = F_0 e^{i\omega t}$ (vedi figura sottostante).



La corrispondenza è tale per cui $F_0 \sin(\omega t)$ rappresenta la proiezione del vettore $F_0 e^{i\omega t}$ sull'asse immaginario.

L'integrale particolare dell'equazione completa sarà anch'esso di tipo armonico con pulsazione pari a quella della forzante ma in ritardo rispetto a quest'ultima:

$$x = X \sin(\omega t - \delta)$$

Utilizzando anche per la soluzione la corrispondenza vista in precedenza, si può scrivere:

$$x = X \sin(\omega t - \delta) \hat{=} X e^{i(\omega t - \delta)} = \mathbf{X} e^{i\omega t}$$

dove $\mathbf{X} = e^{-i\delta}$.

da cui è possibile ricavare l'andamento del modulo e della fase al variare della pulsazione ω della forzante a ζ fissato.
Quando la pulsazione della forzante è pari alla pulsazione naturale si ottiene:

$$\mathbf{X} = -i\frac{F_0}{2\zeta k}$$

cioè la risposta del sistema risulta sfasata di $\delta = \pi/2$ in ritardo rispetto alla forzante.
La figura 2 mostra l'andamento dell'ampiezza e della fase in funzione della pulsazione della forzante e dello smorzamento adimensionale.

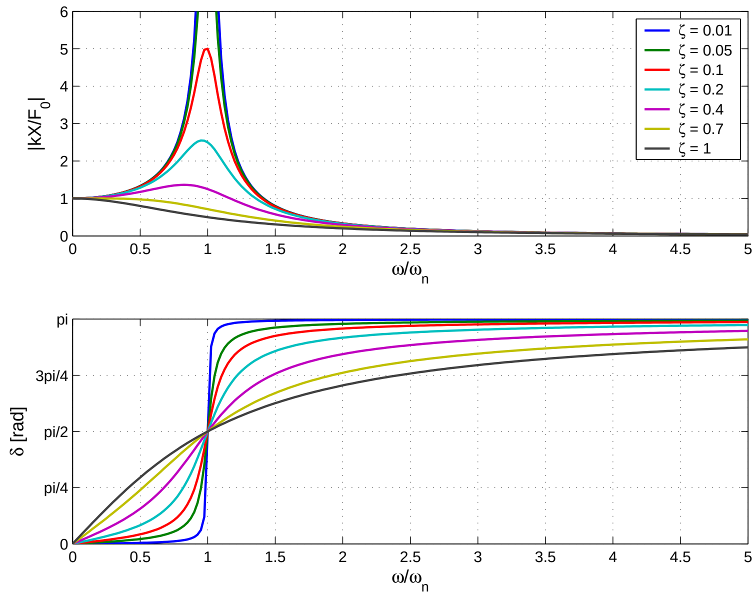


Figura 2: Ampiezza e fase con forzante generica

La forza trasmessa al vincolo è data da due contributi, uno dello smorzatore, l'altro della molla:

$$F_T = ci\omega\mathbf{X}e^{i\omega t} + k\mathbf{X}e^{i\omega t} \tag{5}$$

Sostituendo la relazione (4) in (5), si ottiene l'espressione della *trasmissibilità*:

$$\frac{F_T}{F_0} = T_R = \frac{1 + i\,2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\,2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}} \tag{6}$$

la cui rappresentazione grafica è mostrata in figura 4.

Oltre al caso di forzante generica, dovuta ad esempio all'azione di forze fluidodinamiche o magnetiche, esistono altri due tipi di forzanti derivanti da *spostamento di vincolo* e da *azioni d'inerzia*.

Spostamento di vincolo. Con riferimento al sistema di figura 3 in cui $y = Y_0 \sin\omega t$ rappresenta lo spostamento imposto al vincolo, si può scrivere l'equazione di equilibrio delle forze in direzione verticale:

$$m\ddot{x} + c\,(\dot{x} - \dot{y}) + k\,(x - y) = 0$$

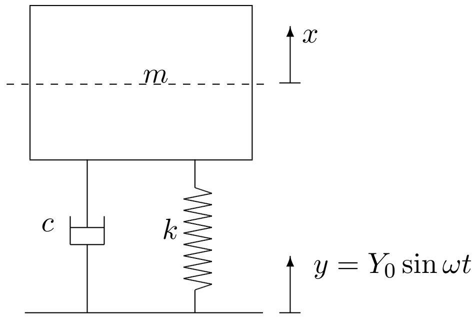


Figura 3: Sistema vibrante ad 1 gdl forzato da spostamento di vincolo

che, effettuando la sostituzione $z = x - y$, porta a:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y_0 \sin \omega t$$

Procedendo analogamente a quanto fatto precedentemente, si ottiene la funzione complessa:

$$\mathbf{Z} = \frac{Y_0 \left(\dfrac{\omega}{\omega_n} \right)^2}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + i\,2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_n}} \tag{7}$$

La forza trasmessa al vincolo è data da due contributi, uno dello smorzatore, l'altro della molla:

$$F_T = ci\omega \mathbf{Z} e^{i\omega t} + k\mathbf{Z} e^{i\omega t} \tag{8}$$

Sostituendo (7) in (8) si ottiene:

$$F_T = (k + ic\omega) \frac{Y_0 \left(\dfrac{\omega}{\omega_n} \right)^2}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + i\,2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_n}} \tag{9}$$

$$F_T = k \left(1 + \frac{ic\omega}{k} \right) \frac{Y_0 \left(\dfrac{\omega}{\omega_n} \right)^2}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + i\,2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_n}} \tag{10}$$

dove: $\dfrac{c\omega}{k} = 2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_n}$.

La (10) può essere quindi scritta come:

$$\frac{F_T}{kY_0} = \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \frac{1 + i\,2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + i\,2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_n}} \tag{11}$$

Ciò a cui si è interessati, però, è lo spostamento assoluto della massa, non quello relativo al vincolo; per calcolarlo è sufficiente utilizzare ancora la precedente relazione di cambio variabile ottenendo:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Z} + \mathbf{Y} = \frac{Y_0 \left(1 + i\, 2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\, 2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_n}} \tag{12}$$

che può essere scritta evidenziando la *trasmissibilità*:

$$\frac{\mathbf{X}}{Y_0} = \frac{\left(1 + i\, 2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\, 2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_n}} = T_R \tag{13}$$

In figura 4 sono rappresentati i relativi andamenti di modulo e fase.

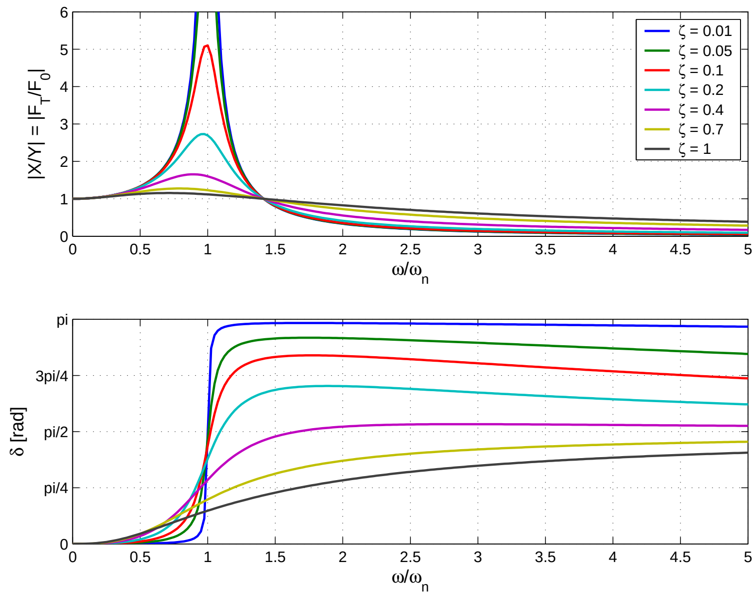


Figura 4: Ampiezza e fase con spostamento di vincolo

Forzante inerziale. Con riferimento alla figura 5 in cui m indica la massa totale dl sistema e m_0 la massa eccentrica, l'equilibrio delle forze in direzione verticale porta all'equazione:

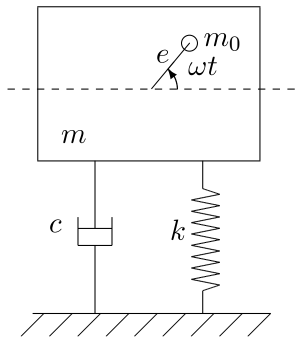


Figura 5: Sistema vibrante ad 1 gdl con forzante inerziale

$$(m - m_0)\,\ddot{x} + m_0\left(\ddot{x} - \omega^2 e \sin\omega t\right) + kx + c\dot{x} = 0$$

da cui si ottiene:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_0\omega^2 e \sin\omega t$$

Procedendo con lo stesso approccio utilizzato per il caso di forzante generica, imponendo cioè come soluzione $x = \mathbf{X}e^{i\omega t}$, si ottiene:

$$\mathbf{X} = \frac{\dfrac{m_0\,e}{m}\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\,2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}} \tag{14}$$

L'andamento dell'ampiezza e della fase corrispondenti sono rappresentati in figura 6.

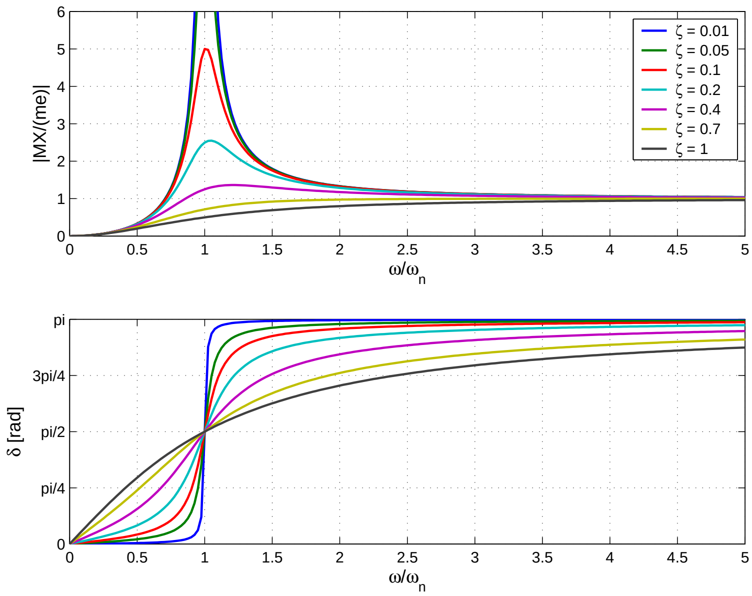


Figura 6: Ampiezza e fase con forzante inerziale

La forza trasmessa al vincolo è data da due contributi, uno dello smorzatore, l'altro della molla:

$$F_T = ci\omega\mathbf{X}e^{i\omega t} + k\mathbf{X}e^{i\omega t} \tag{15}$$

Sostituendo (14) in (15) si ottiene:

$$F_T = (k + ic\omega)\,\frac{\dfrac{m_0\,e}{m}\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\,2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}} \tag{16}$$

che può essere scritta come:

$$F_T = m_0\,e\omega_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\frac{1 + i\,2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\,2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}} \tag{17}$$

che può essere scritta come:

$$\frac{F_T}{m_0\, e\omega_n^2} = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \frac{1 + i\, 2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\, 2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_n}} \tag{18}$$

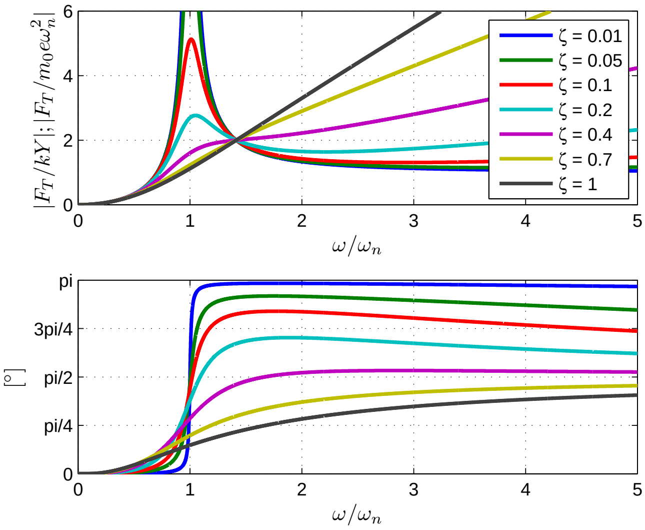


Figura 7: Ampiezza e fase con forzante inerziale

Osservazioni

In relazione a quanto introdotto precedentemente, con MATLAB possono essere affrontate due attività:

Risoluzione dell'equazione completa: risoluzione, per i diversi casi, dell'equazione differenziale completa, mediante la funzione `ode45`; per far ciò è sufficiente inserire nel `function file sistema.m` (introdotto nell'esercitazione precedente) il termine forzante, la cui espressione varierà a seconda di quale dei tre casi si vuole analizzare.

Una volta messo a punto il programma, si suggerisce di provare, ad esempio nel caso di forzante generica, a simulare la condizione di sistema non smorzato ($\zeta = 0$) con condizioni inizali nullle e pulsazione della forzante coincidente con quella naturale del sistema ($\omega = \omega_n$); in questo caso si dovrebbe ottenere un andamento simile a quello di figura 8.

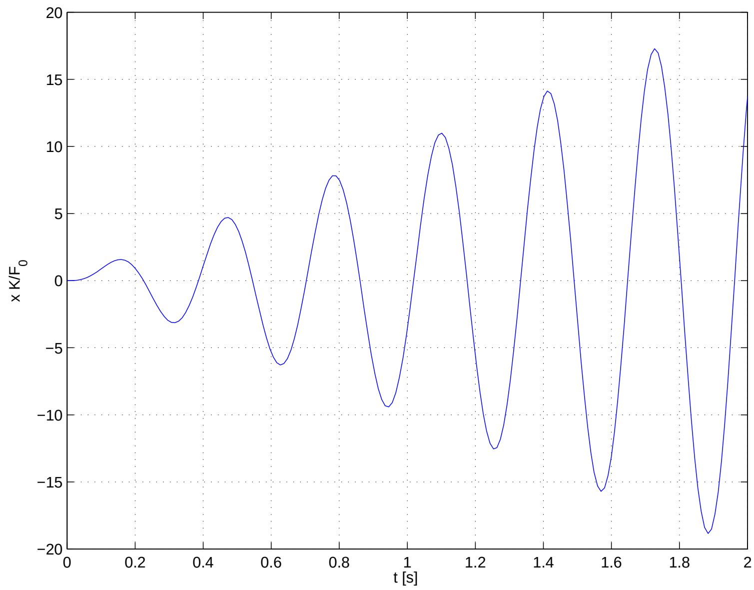


Figura 8: Risposta dl sistema con $\omega = \omega_n$, $\zeta = 0$, $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$

La ragione di questo andamento risiede nel fatto che, nel caso di forzante con pulsazione coincidente con la pulsazione propria del sistema, l'integrale particolare assume la forma:

$$x_p = -\frac{1}{2}\frac{F_0}{m\,\omega_n}\,t\cos\omega_n t$$

e quindi l'integrale generale sarà:

$$x_g = A\,\cos\omega_n t + B\,\sin\omega_n t - \frac{1}{2}\frac{F_0}{m\,\omega_n}\,t\cos\omega_n t$$

dove i coefficienti A e B sono da determinare in base alle condizioni iniziali; imponendo $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ si ottiene:

$$\begin{cases} A = x_0 \\ B = \dfrac{\dot{x}_0}{\omega_n} + \dfrac{1}{2}\dfrac{F_0}{m\,\omega_n^2} \end{cases}$$

Naturalmente, la rappresentazione grafica di questa funzione dovrà coincidere con il risultato ottenuto per via numerica mediante la funzione `ode45`.

Rappresentazione di moduli e fasi: per la rappresentazione dei diagrammi di modulo fase delle relazioni (4), (12) e (14) si suggerisce di sfruttare la capacità di MATLAB di lavorare con i numeri complessi: per calcolare modulo e fase di un numero complesso è sufficiente utilizzare le funzioni `abs` e `angle`.

Alla luce di queste considerazioni, risulta conveniente creare, utilizzando le espressioni (4), (12) e (14), dei vettori di numeri complessi da cui poi ricavare facilmente il modulo e la fase, piuttosto che determinarne le espressioni analitiche.