

Esercitazione funicolare

(dinamica del punto, integrazione delle equazioni di moto)

– rev. 1.2 –

Una piccola vettura di un impianto funicolare viene trainata da una fune (detta fune traente) che esercita una forza variabile in funzione della velocità secondo la tabella seguente:

| | | | | | | | | |
|-----------------------|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|
| velocità [m/s] | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
| forza [kg] | 1800 | 1780 | 1650 | 1380 | 1050 | 780 | 550 | 350 |



Schematizzando il sistema nella maniera più semplice, trascurando tutte le resistenze passive e ammettendo che il percorso sia sufficientemente lungo, determinare la velocità massima raggiunta dalla vettura.

Dati: massa della vettura 2000 kg
pendenza del percorso 30°

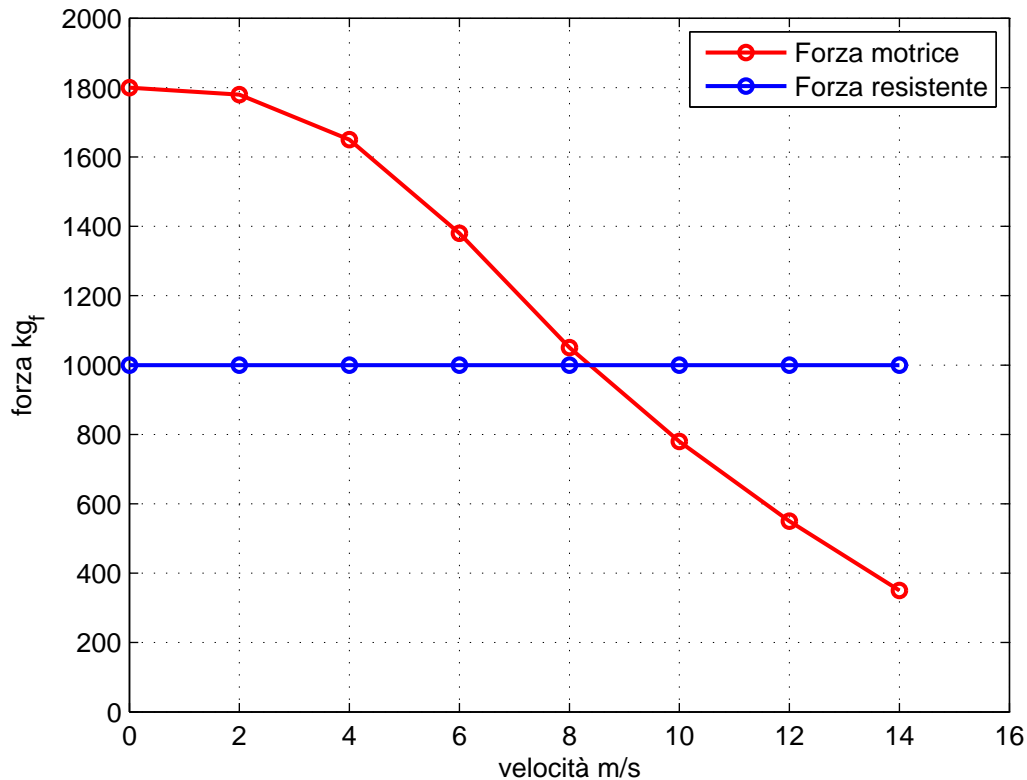
Se, a partire dalla condizione precedente, la vettura affronta un secondo tratto di pendenza pari a 20° , determinare l'accelerazione massima e la velocità limite in tale tratto; stimare anche il tempo necessario a raggiungere la nuova situazione di regime.

Osservazioni per la soluzione

MOTO A REGIME

La velocità massima è quella raggiunta a regime e si determina in corrispondenza dell'intersezione tra la curva della forza motrice (F_m) e quella della forza resistente (F_r), quando cioè il sistema assume accelerazione nulla. In questo caso, la forza resistente non dipende dalla velocità, poiché coincide soltanto con la componente del peso nella direzione del moto.

La forza motrice, invece, è nota per punti, quindi, per poter conoscere i valori di forza anche per velocità diverse da quelle assegnate, si può ad esempio farne un'*interpolazione lineare a tratti*. Secondo questo approccio, la curva viene approssimata con una linea spezzata congiungente tutti i punti assegnati. Ad esempio, per il primo tratto di salita, la situazione sarebbe la seguente:



Dal grafico si nota che la velocità massima (velocità di regime) è compresa tra 8 e 10 m/s; per trovarne il valore è sufficiente calcolare l'intersezione tra due segmenti di retta.

Operando in MATLAB, si può ricorrere alla funzione `YI=interp1(X,Y,XI)` che implementa, tra gli altri, un algoritmo di interpolazione lineare: a partire dai due vettori di dati `X` e `Y`, consente di determinare il valore `YI` corrispondente ad un valore `XI` diverso da quelli appartenenti al vettore `X`.

MOTO IN TRANSITORIO

Accelerazione massima. Per un punto di massa costante m soggetto alle forze F_r e F_m con uguale direzione ma verso opposto, l'accelerazione è:

$$a = \frac{F_m - F_r}{m}$$

Il valore massimo si avrà in corrispondenza della massima differenza tra F_m e F_r .

Integrazione numerica dell'equazione di moto. La determinazione della velocità di regime, del tempo di transitorio e dell'accelerazione massima può essere effettuata integrando direttamente l'equazione differenziale del moto:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{F_m(v) - F_r}{m}$$

con la condizione iniziale $v(0) = v_0$. Per l'integrazione si può procedere per via numerica, sostituendo la derivata in un istante generico con il corrispondente rapporto incrementale, ossia:

$$\frac{dv}{dt} = a(t) \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

da cui

$$v(t + \Delta t) \approx v(t) + a(t) \Delta t \quad (1)$$

Una volta assegnato un opportuno passo di integrazione $\Delta t = h$, definendo il generico istante $t_i = i \cdot h$ a cui corrisponde la velocità $v_i = v(t_i)$ e l'accelerazione $a_i = a(t_i)$, si ottiene la formula ricorsiva:

$$v_{i+1} = v_i + a_i h$$

dove: $v_{i+1} = v(t_i + h)$, $a_i = \frac{F_m(v_i) - F_r}{m}$

Il procedimento è un metodo di integrazione numerica del I ordine che va sotto il nome di *metodo di EULERO esplicito*. Implementando la formula ricorsiva, ad esempio in MATLAB, si ottengono gli andamenti nel tempo della velocità e dell'accelerazione. Il momento in cui arrestare il processo di integrazione corrisponde al momento in cui gli incrementi di velocità tra un passo e l'altro risultano inferiori ad una tolleranza prefissata; il tempo corrispondente è il tempo di transitorio cercato.