

Analisi dinamica inversa di un quadrilatero articolato

(bozza)

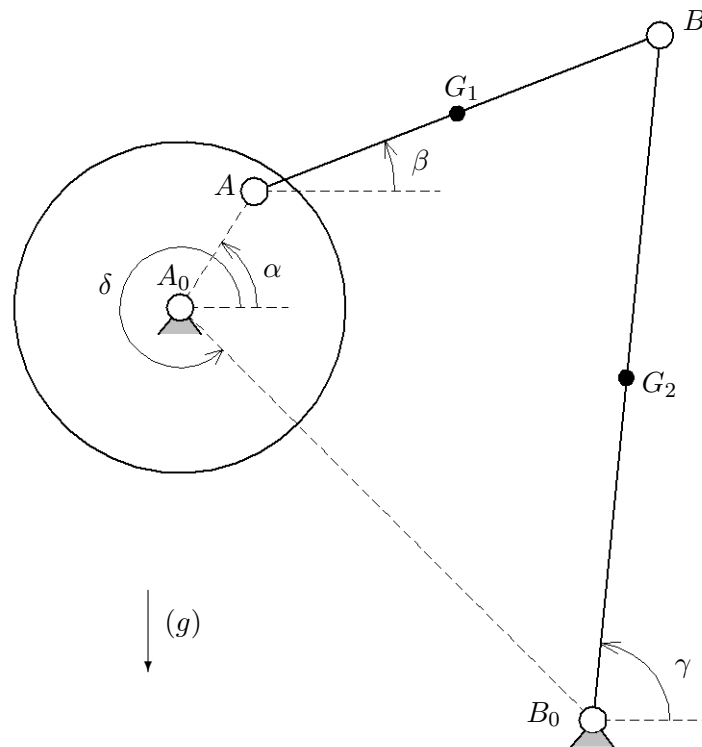


Figura 1: Rappresentazione schematica del sistema

In figura 1 è rappresentato un quadrilatero articolato, giacente in un piano verticale, caratterizzato dai seguenti parametri:

- raggio della manovella A_0A : $r = 100 \text{ mm}$;
- lunghezza della biella AB : $b = 315 \text{ mm}$;
- lunghezza della bilanciere B_0B : $c = 500 \text{ mm}$;
- lunghezza del telaio A_0B_0 : $d = 425 \text{ mm}$;
- angolo di inclinazione del telaio: $\delta = (7/4)\pi$;
- momento d'inerzia della manovella $J_{A_0} = 0.0245 \text{ kg m}^2$;
- massa della biella $m_2 = 2 \text{ kg}$;
- momento d'inerzia baricentrico della biella $J_2 = 0.016 \text{ kg m}^2$;
- massa del bilanciere $m_3 = 3.5 \text{ kg}$;
- momento d'inerzia baricentrico del bilanciere $J_3 = 0.066 \text{ kg m}^2$.

Ipotizzando che la manovella ruoti con velocità angolare costante pari a $n = 150 \text{ rpm}$, si chiede di determinare l'andamento della coppia motrice, rispetto all'angolo di manovella, che consente di mantenere la condizione di moto.

TRACCIA DI SOLUZIONE

Il problema può essere affrontato mediante la scrittura dell'equazione di bilancio delle potenze; con riferimento alla simbologia utilizzata:

$$M_m \dot{\alpha} + \vec{P}_2 \cdot \vec{v}_{G2} + \vec{P}_3 \cdot \vec{v}_{G3} + (-m_2 \vec{a}_{G2}) \cdot \vec{v}_{G2} + (-m_2 \vec{a}_{G3}) \cdot \vec{v}_{G3} + (-J_2 \dot{\beta}) \ddot{\beta} + (-J_3 \dot{\gamma}) \ddot{\gamma} = 0 \quad (1)$$

dove \vec{P}_2 e \vec{P}_3 rappresentano le forze peso applicate rispettivamente nei baricentri di biella e bilanciere. L'equazione può essere riscritta utilizzando la notazione matriciale:

$$M_m \dot{\alpha} + \mathbf{P}_2^T \cdot \mathbf{v}_{G2} + \mathbf{P}_3^T \cdot \mathbf{v}_{G3} + (-m_2 \mathbf{a}_{G2}^T) \cdot \mathbf{v}_{G2} + (-m_2 \mathbf{a}_{G3}^T) \cdot \mathbf{v}_{G3} + (-J_2 \dot{\beta}) \ddot{\beta} + (-J_3 \dot{\gamma}) \ddot{\gamma} = 0 \quad (2)$$

dove:

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 g \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_3 g \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_{G2} = \begin{bmatrix} v_{G2x} \\ v_{G2y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{G3} = \begin{bmatrix} v_{G3x} \\ v_{G3y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_{G2} = \begin{bmatrix} a_{G2x} \\ a_{G2y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_{G3} = \begin{bmatrix} a_{G3x} \\ a_{G3y} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{cases} v_{G2x} = -\dot{\alpha} r \sin \alpha - \dot{\beta} A G_2 \sin \beta \\ v_{G2y} = \dot{\alpha} r \cos \alpha + \dot{\beta} A G_2 \cos \beta \\ v_{G3x} = -\dot{\gamma} B_0 G_3 \sin \gamma \\ v_{G3y} = \dot{\gamma} B_0 G_3 \cos \gamma \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} a_{G2x} = -\dot{\alpha}^2 r \cos \alpha - \ddot{\alpha} r \sin \alpha - \dot{\beta}^2 A G_2 \cos \beta - \ddot{\beta} A G_2 \sin \beta \\ a_{G2y} = -\dot{\alpha}^2 r \sin \alpha + \ddot{\alpha} r \cos \alpha - \dot{\beta}^2 A G_2 \sin \beta + \ddot{\beta} A G_2 \cos \beta \\ a_{G3x} = -\dot{\gamma}^2 B_0 G_3 \cos \gamma - \ddot{\gamma} B_0 G_3 \sin \gamma \\ a_{G3y} = -\dot{\gamma}^2 B_0 G_3 \sin \gamma + \ddot{\gamma} B_0 G_3 \cos \gamma \end{cases} \quad (6)$$

I termini che contengono $\ddot{\alpha}$ saranno nulli poiché la velocità della manovella è considerata costante.

Per la determinazione delle velocità e delle accelerazioni, si può ricorrere all'analisi cinematica condotta mediante il "metodo dei loop vettoriali", trattato nella corrispondente dispensa.¹

In particolare, con riferimento alla simbologia utilizzata in figura 1:

Analisi di posizione

$$r e^{i\alpha} + b e^{i\beta} = c e^{i\gamma} + d e^{i\delta} \quad (7)$$

$$\begin{cases} r \cos \alpha + b \cos \beta - c \cos \gamma - d \cos \delta = 0 \\ r \sin \alpha + b \sin \beta - c \sin \gamma - d \sin \delta = 0 \end{cases} \quad (8)$$

¹Si veda la dispensa: "Analisi cinematica di meccanismi articolati (rev. 1.0)".

Analisi di velocità

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -b \sin \beta & c \sin \gamma \\ b \cos \beta & -c \cos \gamma \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} -r \sin \alpha \\ r \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = -\dot{\alpha} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{k} \quad (10)$$

Analisi di accelerazione

$$\dot{\mathbf{x}}^2 \equiv \begin{bmatrix} \dot{\beta}^2 \\ \dot{\gamma}^2 \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_p = \begin{pmatrix} -b \cos \beta & c \cos \gamma \\ -b \sin \beta & c \sin \gamma \end{pmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \left(-\ddot{\alpha} \mathbf{k} + \dot{\alpha}^2 \mathbf{h} - \mathbf{J}_p \dot{\mathbf{x}}^2 \right) \quad (12)$$

Anche in questo caso, i termini contenenti $\ddot{\alpha}$ saranno nulli poiché la velocità della manovella è costante.

DIAGRAMMI

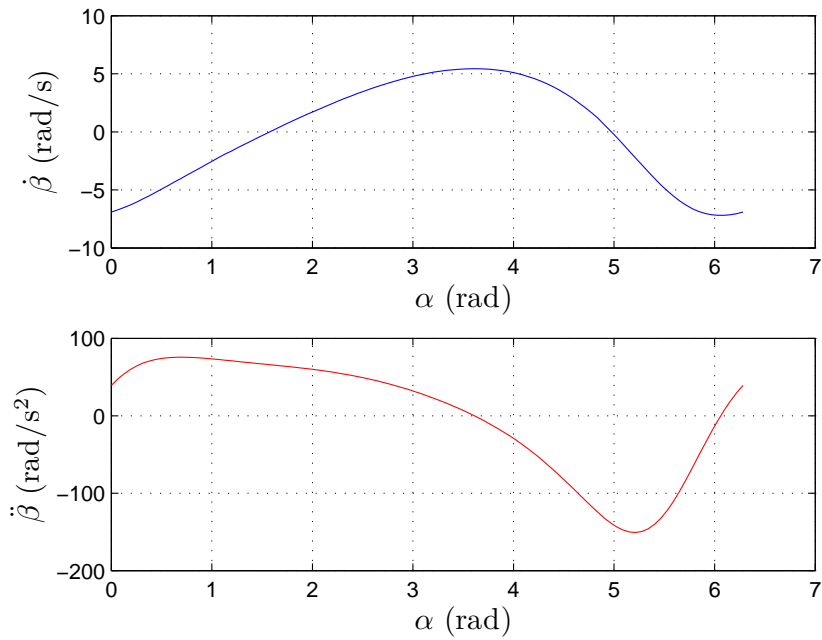


Figura 2: Velocità e accelerazione angolare della biella

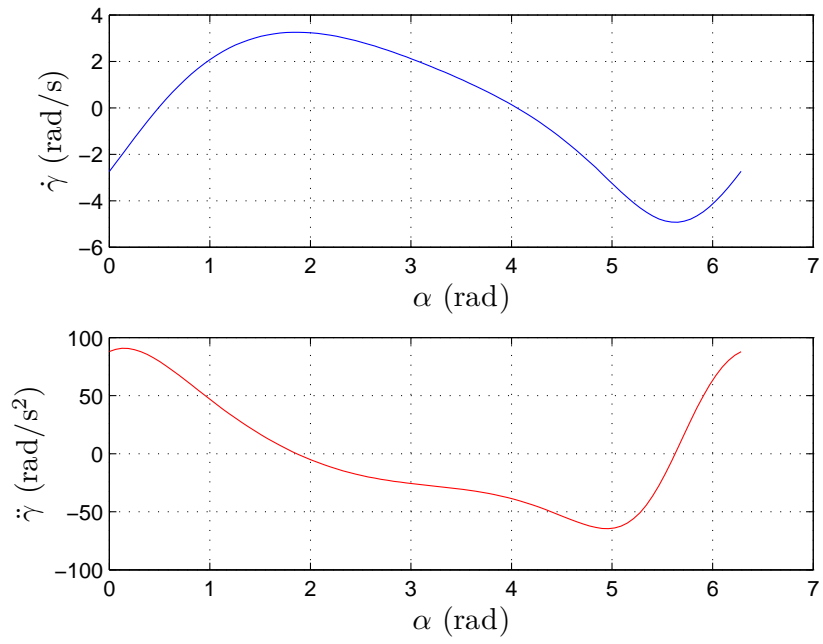


Figura 3: Velocità e accelerazione angolare del bilanciere

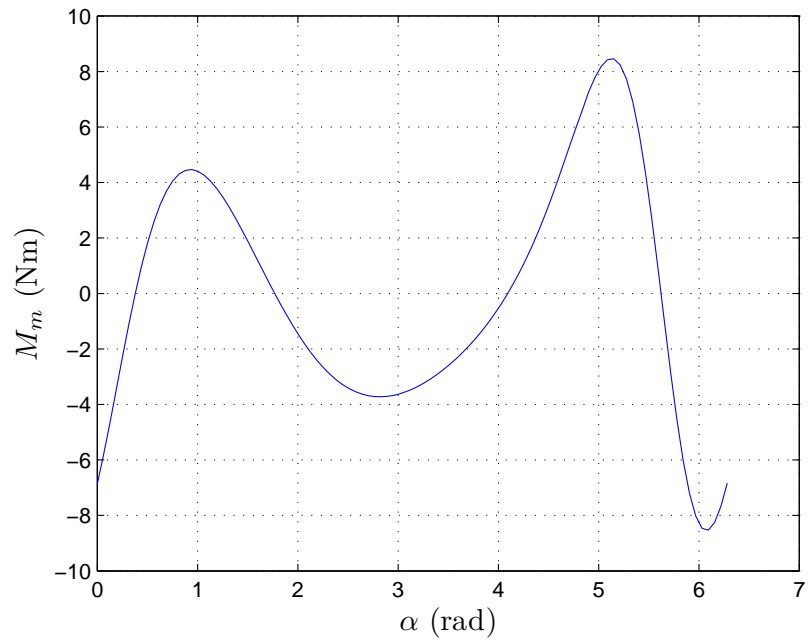


Figura 4: Coppia motrice