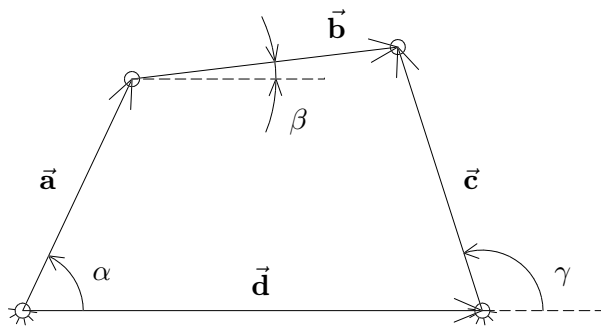


Analisi cinematica di meccanismi articolati

– metodo dei numeri complessi –

(rev. 1.0)

1 Il quadrilatero articolato



Posizione

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$$

$$a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} = c e^{i\gamma} + d$$

$$\begin{cases} a \cos \alpha + b \cos \beta = c \cos \gamma + d \\ a \sin \alpha + b \sin \beta = c \sin \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underbrace{a \cos \alpha + b \cos \beta - c \cos \gamma + d}_{f_1} = 0 \\ \underbrace{a \sin \alpha + b \sin \beta - c \sin \gamma}_{f_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(\beta, \gamma, \alpha) = 0 \\ f_2(\beta, \gamma, \alpha) = 0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema non lineare può essere determinata in forma chiusa oppure numericamente utilizzando il metodo di **Newton–Raphson**.

Velocità

$$\begin{cases} -a \dot{\alpha} \sin \alpha - b \dot{\beta} \sin \beta = -c \dot{\gamma} \sin \gamma \\ a \dot{\alpha} \cos \alpha + b \dot{\beta} \cos \beta = c \dot{\gamma} \cos \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b \dot{\beta} \sin \beta + c \dot{\gamma} \sin \gamma = a \dot{\alpha} \sin \alpha \\ b \dot{\beta} \cos \beta - c \dot{\gamma} \cos \gamma = -a \dot{\alpha} \cos \alpha \end{cases}$$

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -b \sin \beta & c \sin \gamma \\ b \cos \beta & -c \cos \gamma \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \sin \alpha \\ a \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} \dot{\underline{\mathbf{x}}} = -\dot{\alpha} \underline{\mathbf{k}}$$

Una volta noti i valori di β e γ dal passo precedente (in funzione della posizione angolare α della manovella) la soluzione del sistema in funzione di $\dot{\alpha}$ è immediata (si tratta di un sistema lineare):

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}} = -\dot{\alpha} \mathbf{J}^{-1} \underline{\mathbf{k}}$$

Accelerazione

$$\begin{cases} -b \dot{\beta}^2 \cos \beta - b \ddot{\beta} \sin \beta + c \dot{\gamma}^2 \cos \gamma + c \ddot{\gamma} \sin \gamma = a \dot{\alpha}^2 \cos \alpha + a \ddot{\alpha} \sin \alpha \\ -b \dot{\beta}^2 \sin \beta + b \ddot{\beta} \cos \beta + c \dot{\gamma}^2 \sin \gamma - c \ddot{\gamma} \cos \gamma = a \dot{\alpha}^2 \sin \alpha - a \ddot{\alpha} \cos \alpha \end{cases}$$

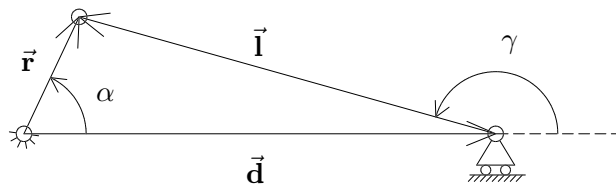
$$\dot{\underline{\mathbf{x}}}^2 \equiv \begin{bmatrix} \dot{\beta}^2 \\ \dot{\gamma}^2 \end{bmatrix} \quad \ddot{\underline{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_p = \begin{pmatrix} -b \cos \beta & c \cos \gamma \\ -b \sin \beta & c \sin \gamma \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} \ddot{\underline{\mathbf{x}}} + \mathbf{J}_p \dot{\underline{\mathbf{x}}}^2 = -\ddot{\alpha} \underline{\mathbf{k}} + \dot{\alpha}^2 \underline{\mathbf{h}}$$

Anche in questo caso, noti i valori di β , γ , $\dot{\beta}$ e $\dot{\gamma}$ dai passi precedenti (in funzione della posizione angolare α della manovella e della sua velocità angolare $\dot{\alpha}$), è immediato trovare la soluzione del sistema lineare in funzione di $\ddot{\alpha}$:

$$\ddot{\underline{\mathbf{x}}} = \mathbf{J}^{-1} \left(-\ddot{\alpha} \underline{\mathbf{k}} + \dot{\alpha}^2 \underline{\mathbf{h}} - \mathbf{J}_p \dot{\underline{\mathbf{x}}}^2 \right)$$

2 Il manovellismo ordinario centrato



Posizione

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{l}} + \vec{\mathbf{d}}$$

$$r e^{i\alpha} = l e^{i\gamma} + d$$

$$\begin{cases} r \cos \alpha = l \cos \gamma + d \\ r \sin \alpha = l \sin \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overbrace{\begin{matrix} r \cos \alpha - l \cos \gamma - d \\ r \sin \alpha - l \sin \gamma \end{matrix}}^{f_1} = 0 \\ \underbrace{}_{f_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(\gamma, d, \alpha) = 0 \\ f_2(\gamma, d, \alpha) = 0 \end{cases}$$

È semplice in questo caso risolvere il sistema in forma chiusa. In alternativa si può sempre ricorrere al metodo di **Newton–Raphson**.

Velocità

$$\begin{cases} -r \dot{\alpha} \sin \alpha + l \dot{\gamma} \sin \gamma - \dot{d} = 0 \\ r \dot{\alpha} \cos \alpha - l \dot{\gamma} \cos \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l \dot{\gamma} \sin \gamma - \dot{d} = r \dot{\alpha} \sin \alpha \\ -l \dot{\gamma} \cos \gamma = -r \dot{\alpha} \cos \alpha \end{cases}$$

$$\underline{\dot{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{d} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} l \sin \gamma & -1 \\ -l \cos \gamma & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \sin \alpha \\ r \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} \underline{\dot{\mathbf{x}}} = -\dot{\alpha} \underline{\mathbf{k}}$$

Una volta noti i valori di γ e d dal passo precedente (in funzione della posizione angolare α della manovella) la soluzione del sistema in funzione di $\dot{\alpha}$ è immediata (si tratta di un sistema lineare):

$$\underline{\dot{\mathbf{x}}} = -\dot{\alpha} \mathbf{J}^{-1} \underline{\mathbf{k}}$$

Accelerazione

$$\begin{cases} l \dot{\gamma}^2 \cos \gamma + l \ddot{\gamma} \sin \gamma - \ddot{d} = r \dot{\alpha}^2 \cos \alpha + r \ddot{\alpha} \sin \alpha \\ l \dot{\gamma}^2 \sin \gamma - l \ddot{\gamma} \cos \gamma = r \dot{\alpha}^2 \sin \alpha - r \ddot{\alpha} \cos \alpha \end{cases}$$

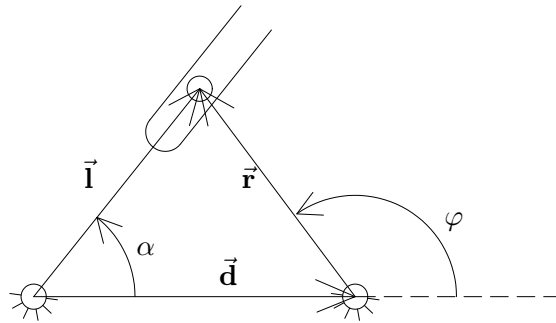
$$\underline{\dot{\mathbf{x}}}^2 \equiv \begin{bmatrix} \dot{\gamma}^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\ddot{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{d} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_p = \begin{pmatrix} l \cos \gamma & 0 \\ l \sin \gamma & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} \underline{\ddot{\mathbf{x}}} + \mathbf{J}_p \underline{\dot{\mathbf{x}}}^2 = -\ddot{\alpha} \underline{\mathbf{k}} + \dot{\alpha}^2 \underline{\mathbf{h}}$$

Anche in questo caso, noti i valori di γ , d , $\dot{\gamma}$ e \dot{d} dai passi precedenti (in funzione della posizione angolare α della manovella e della sua velocità angolare $\dot{\alpha}$), è immediato trovare la soluzione del sistema lineare in funzione di $\ddot{\alpha}$:

$$\underline{\ddot{\mathbf{x}}} = \mathbf{J}^{-1} \left(-\ddot{\alpha} \underline{\mathbf{k}} + \dot{\alpha}^2 \underline{\mathbf{h}} - \mathbf{J}_p \underline{\dot{\mathbf{x}}}^2 \right)$$

3 Il manovellismo a glifo



Posizione

$$\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{d}} + \vec{\mathbf{r}}$$

$$l e^{i\alpha} = d + r e^{i\varphi}$$

$$\begin{cases} l \cos \alpha = d + r \cos \varphi \\ l \sin \alpha = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underbrace{l \cos \alpha - d - r \cos \varphi}_{f_1} = 0 \\ \underbrace{l \sin \alpha - r \sin \varphi}_{f_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(l, \alpha, \varphi) = 0 \\ f_2(l, \alpha, \varphi) = 0 \end{cases}$$

È semplice in questo caso risolvere il sistema in forma chiusa. In alternativa si può sempre ricorrere al metodo di **Newton-Raphson**.

Velocità

$$\begin{cases} \dot{l} \cos \alpha - \dot{\alpha} l \sin \alpha + r \dot{\varphi} \sin \varphi = 0 \\ \dot{l} \sin \alpha + \dot{\alpha} l \cos \alpha - r \dot{\varphi} \cos \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{l} \cos \alpha - \dot{\alpha} l \sin \alpha = -r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{l} \sin \alpha + \dot{\alpha} l \cos \alpha = r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{l} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -l \sin \alpha \\ \sin \alpha & l \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin \varphi \\ -r \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} \dot{\mathbf{x}} = -\dot{\varphi} \mathbf{k}$$

Una volta noti i valori di α e l dal passo precedente (in funzione della posizione angolare φ della manovella) la soluzione del sistema in funzione di $\dot{\varphi}$ è immediata (si tratta di un sistema lineare):

$$\dot{\mathbf{x}} = -\dot{\varphi} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{k}$$

Accelerazione

$$\begin{cases} \ddot{l} \cos \alpha - \dot{l} \dot{\alpha} \sin \alpha - \ddot{\alpha} l \sin \alpha - \dot{l} \dot{\alpha} \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 l \cos \alpha = -r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - r \ddot{\varphi} \sin \varphi \\ \ddot{l} \sin \alpha + \dot{l} \dot{\alpha} \cos \alpha + \ddot{\alpha} l \cos \alpha + \dot{l} \dot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 l \sin \alpha = -r \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + r \ddot{\varphi} \cos \varphi \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{x}}^2 \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha}^2 \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{l} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_p = \begin{pmatrix} 0 & -l \cos \alpha \\ 0 & -l \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} -r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_p \dot{\mathbf{x}}^2 + 2 \dot{l} \dot{\alpha} \mathbf{w} = -\ddot{\varphi} \mathbf{k} + \dot{\varphi}^2 \mathbf{h}$$

Anche in questo caso, noti i valori di α , l , $\dot{\alpha}$ e \dot{l} dai passi precedenti (in funzione della posizione angolare φ della manovella e della sua velocità angolare $\dot{\varphi}$), è immediato trovare la soluzione del sistema lineare:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \left(-\ddot{\varphi} \mathbf{k} + \dot{\varphi}^2 \mathbf{h} - \mathbf{J}_p \dot{\mathbf{x}}^2 - 2 \dot{l} \dot{\alpha} \mathbf{w} \right)$$

4 Formulazione generale (per meccanismi ad un solo loop vettoriale)

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, q) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, q) = 0 \end{cases}$$

Derivando il sistema di equazioni rispetto al tempo t si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial f_1}{\partial q} \dot{q} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial f_2}{\partial q} \dot{q} = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} \dot{\mathbf{x}} = -\dot{q} \mathbf{k}$$

Derivando l'equazione in forma matriciale sempre rispetto al tempo t si ottiene:

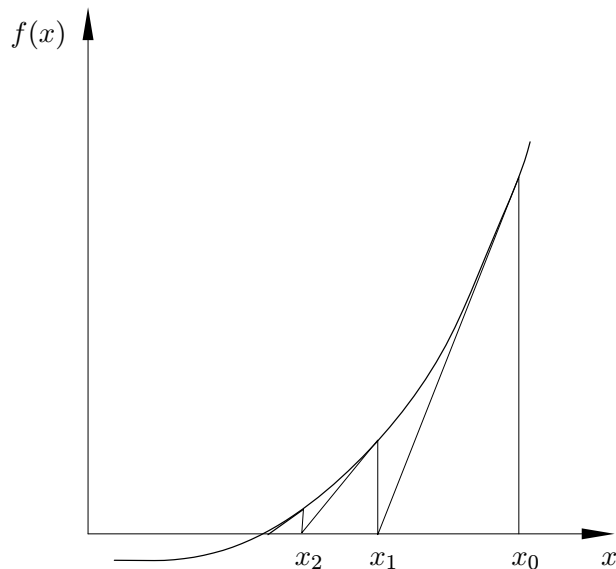
$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J} \ddot{\mathbf{x}} = -\ddot{q} \mathbf{k} - \dot{q} \frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial x_1} \dot{\mathbf{x}} \dot{x}_1 + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial x_2} \dot{\mathbf{x}} \dot{x}_2 + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial q} \dot{\mathbf{x}} \dot{q} + \mathbf{J} \ddot{\mathbf{x}} = -\ddot{q} \mathbf{k} - \dot{q} \left\{ \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial q} \dot{q} \right\}$$

5 Metodo di Newton–Raphson

5.1 Risoluzione di un'equazione non lineare (metodo di Newton o delle tangenti)

Data la funzione non lineare $y = f(x)$ di figura



si vuole risolvere per via numerica l'equazione $f(x) = 0$.

Come soluzione si assume un valore di primo tentativo x_0 e si valuta la funzione in quel punto; in generale risulterà $f(x_0) \neq 0$ e a questa quantità si dà il nome di resto r_0 [$f(x_0) \equiv r_0$].

Sulla base di questo primo tentativo si sceglie un nuovo valore approssimante x_1 ; a questo scopo si approssima la funzione con il suo sviluppo in serie di Taylor nell'intorno del punto x_0 , arrestato al 1° ordine:

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = r_0 + f'(x_0)(x - x_0) \quad (1)$$

Come nuova approssimazione x_1 della soluzione si assume l'intersezione, con l'asse delle ascisse, della retta di equazione 1 che approssima $f(x)$ nell'intorno di x_0 (cioè la retta tangente a $f(x)$ in x_0):

$$r_0 + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{r_0}{f'(x_0)}$$

A questo punto, analogamente a quanto fatto precedentemente, si valuta la funzione in x_1 ; in generale si otterrà $f(x_1) \neq 0$ e quindi un nuovo valore di resto r_1 .

La nuova approssimazione della soluzione viene calcolata come intersezione dello sviluppo in serie di Taylor nell'intorno di x_1 arrestato al 1° ordine di $f(x)$ con l'asse delle ascisse; analogamente a quanto visto precedente si ottiene:

$$r_1 + f'(x_1)(x_2 - x_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_1 - \frac{r_1}{f'(x_1)}$$

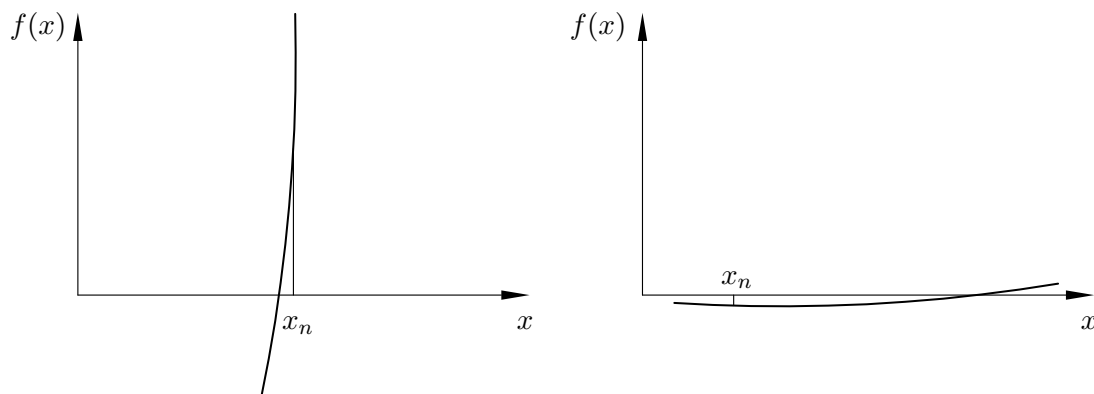
Procedendo iterativamente si ottiene la formula ricorsiva:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{r_i}{f'(x_i)} \quad \text{dove:} \quad r_i = f(x_i)$$

Il processo di calcolo viene arrestato dopo n iterazioni quando sia il modulo del resto che il modulo della differenza tra x_{n+1} e x_n diventano minori di una certa tolleranza desiderata:

$$\begin{cases} |r_n| & \leq \varepsilon \\ |x_n - x_{n+1}| & \leq \varepsilon \end{cases}$$

L'opportunità di utilizzare entrambe le condizioni è evidente dall'osservazione delle due situazioni limite seguenti.



Nel primo caso, pur essendo rispettata la condizione di tolleranza sulla x , non viene rispettata quella sul resto; nel secondo caso si nota invece che il rispetto della tolleranza sul resto può non garantire il rispetto della tolleranza sulla x .

Nel caso in cui l'equazione abbia più di una soluzione, è la scelta dell'approssimazione iniziale che determina quale di queste verrà calcolata dal processo iterativo.

5.2 Risoluzione di un sistema di equazioni non lineari (metodo di Newton-Raphson)

Il procedimento visto in precedenza per la risoluzione di un'equazione non lineare può essere esteso al caso di un sistema di k equazioni non lineari in k incognite:

$$\begin{cases} f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) = 0 \\ f_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) = 0 \end{cases}$$

che in forma matriciale assume la forma:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{dove:} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_k \end{bmatrix}$$

Analogamente a quanto fatto per il caso precedente, si sceglie un vettore soluzione \mathbf{x}_0 di primo tentativo che dà origine ad un vettore di resti $\mathbf{R}_0 \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

Il nuovo vettore approssimante \mathbf{x}_1 lo si ottiene sviluppando in serie di Taylor le equazioni

del sistema nell'intorno del punto $\underline{\mathbf{x}}_0$, arrestandosi al 1° ordine:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \simeq f_1(\xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{k0}) + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_{10}} (\xi_1 - \xi_{10}) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_k} \Big|_{\xi_{k0}} (\xi_k - \xi_{k0}) \\ f_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \simeq f_2(\xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{k0}) + \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_{10}} (\xi_1 - \xi_{10}) + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial \xi_k} \Big|_{\xi_{k0}} (\xi_k - \xi_{k0}) \\ \dots\dots\dots \\ f_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \simeq f_k(\xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{k0}) + \frac{\partial f_k}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_{10}} (\xi_1 - \xi_{10}) + \dots + \frac{\partial f_k}{\partial \xi_k} \Big|_{\xi_{k0}} (\xi_k - \xi_{k0}) \end{array} \right.$$

In forma matriciale si può scrivere:

$$\underline{\mathbf{f}} \simeq \underline{\mathbf{R}}_0 + \mathbf{J}_0 [\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}_0]$$

dove:

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} r_{10} \\ r_{20} \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{k0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{k0}) \\ f_2(\xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{k0}) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_k(\xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{k0}) \end{bmatrix} \quad \text{è il vettore dei resti}$$

$$\mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_{10}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_k} \Big|_{\xi_{k0}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_{10}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_k} \Big|_{\xi_{k0}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_{10}} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial \xi_k} \Big|_{\xi_{k0}} \end{pmatrix} \quad \text{è lo Jacobiano valutato in } \underline{\mathbf{x}}_0$$

Come nuova approssimazione della soluzione si assume:

$$\underline{\mathbf{x}}_1 = \underline{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{J}_0^{-1} \underline{\mathbf{R}}_0$$

Valutando le equazioni del sistema nel punto $\underline{\mathbf{x}}_1$ si ottiene un nuovo vettore dei resti $\underline{\mathbf{R}}_1$; viene quindi ricercata una nuova approssimazione $\underline{\mathbf{x}}_2$ della soluzione:

$$\underline{\mathbf{x}}_2 = \underline{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{J}_1^{-1} \underline{\mathbf{R}}_1$$

Ripetendo iterativamente il procedimento si ottiene la formula ricorsiva:

$$\underline{\mathbf{x}}_{i+1} = \underline{\mathbf{x}}_i - \mathbf{J}_i^{-1} \underline{\mathbf{R}}_i$$

Il calcolo viene arrestato dopo un certo numero n di iterazioni quando, sia i moduli di tutte le componenti del vettore dei resti sia i moduli delle componenti del vettore $[\underline{\mathbf{x}}_n - \underline{\mathbf{x}}_{n+1}]$, sono minori di una certa tolleranza ε .

5.3 Applicazione al caso di meccanismi ad un solo loop vettoriale

La chiusura del loop vettoriale porta alla scrittura di un sistema di equazioni del tipo:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, q) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, q) = 0 \end{cases}$$

dove q è la coordinata libera e x_1, x_2 le incognite.

Nel caso di un *quadrilatero articolato* (si veda par.1) $q = \alpha$ (è il grado di libertà), $x_1 = \beta, x_2 = \gamma$ e il sistema diventa quindi:

$$\begin{cases} f_1(\beta, \gamma, \alpha) = 0 \\ f_2(\beta, \gamma, \alpha) = 0 \end{cases}$$

L'obiettivo è determinare la configurazione del quadrilatero per diverse posizioni della manovella: fissato un valore $\alpha = \alpha^*$ si calcola la soluzione $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$ del sistema in base alla formula ricorsiva:

$$\underline{\mathbf{x}}_{i+1} = \underline{\mathbf{x}}_i - \mathbf{J}_i^{-1} \underline{\mathbf{R}}_i$$

dove:

$$\underline{\mathbf{R}}_i = \begin{bmatrix} f_1(\beta_i, \gamma_i, \alpha^*) \\ f_2(\beta_i, \gamma_i, \alpha^*) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} r_{1i} \\ r_{2i} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} -b \sin \beta_i & c \sin \gamma_i \\ b \cos \beta_i & -c \cos \gamma_i \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{x}}_n = \begin{bmatrix} \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix}$$

Le condizioni per valutare quando arrestare il ciclo di calcolo sono:

$$\begin{cases} |r_{1i}| \leq \varepsilon \\ |r_{2i}| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Quando entrambe risultano verificate, per cautelarsi rispetto a casi limite simili a quelli descritti in par.5.1, è bene verificare anche che i moduli delle componenti del vettore $|\underline{\mathbf{x}}_n - \underline{\mathbf{x}}_{n+1}|$ siano inferiori ad una certa tolleranza (che in generale può anche essere diversa dalla precedente):

$$\begin{cases} |\beta_i - \beta_{i+1}| \leq \delta \\ |\gamma_i - \gamma_{i+1}| \leq \delta \end{cases}$$

Generalmente, per questa classe di problemi, il metodo converge molto rapidamente (orientativamente il n° di iterazioni n è ≤ 20); problemi di convergenza del metodo possono manifestarsi ad esempio se i valori di primo tentativo sono troppo distanti dalla soluzione o se il meccanismo presenta configurazioni singolari.

La condizione di singolarità viene evidenziata dall'annullamento del determinante dello Jacobiano: durante il processo di calcolo conviene quindi tenere sotto controllo anche quest'ultima grandezza.

Una volta trovata la soluzione per una certa posizione della manovella, si ripete il calcolo per la posizione successiva.

Per quanto riguarda i valori di primo tentativo (β_0, γ_0) conviene procedere nel modo seguente:

- per la prima posizione della manovella si fa una stima grafica della configurazione assunta dal meccanismo;
- per le successive posizioni della manovella si usano come valori di primo tentativo le soluzioni ottenute per la configurazione immediatamente precedente.