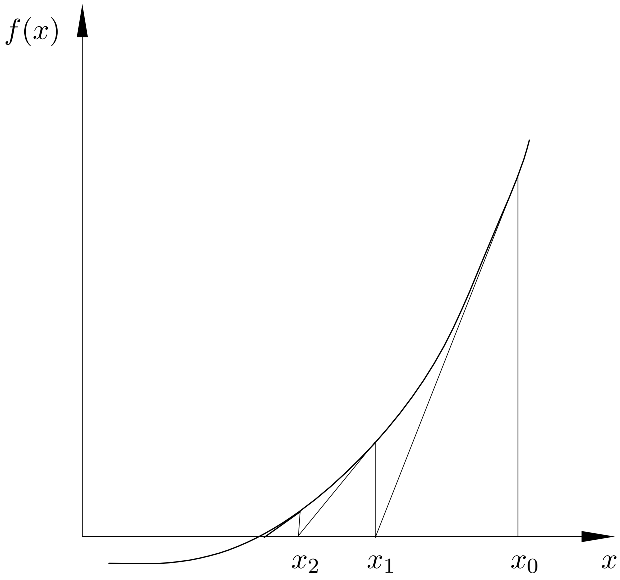
Note sulla risoluzione di equazioni non lineari

- rev. 1.1 -

1 Metodo di Newton–Raphson

Data la funzione non lineare $y = f(x)$ di figura



si vuole risolvere per via numerica l'equazione $f(x) = 0$.
Come soluzione si assume un valore di primo tentativo x_0 e si valuta la funzione in quel punto; in generale risulterà $f(x_0) \neq 0$ e a questa quantità si dà il nome di resto r_0 $[f(x_0) \equiv r_0]$.
Sulla base di questo primo tentativo si sceglie un nuovo valore approssimante x_1; a questo scopo si approssima la funzione con il suo sviluppo in serie di Taylor nell'intorno del punto x_0, arrestato al 1° ordine:

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = r_0 + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (1)$$

Come nuova approssimazione x_1 della soluzione si assume l'intersezione, con l'asse delle ascisse, della retta di equazione 1 che approssima $f(x)$ nell'intorno di x_0 (cioè la retta tangente a $f(x)$ in x_0):

$$r_0 + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = x_0 - \frac{r_0}{f'(x_0)}$$

A questo punto, analogamente a quanto fatto precedentemente, si valuta la funzione in x_1; in generale si otterrà $f(x_1) \neq 0$ e quindi un nuovo valore di resto r_1.

La nuova approssimazione della soluzione viene calcolata come intersezione dello sviluppo in serie di Taylor nell'intorno di x_1 arrestato al 1° ordine di $f(x)$ con l'asse delle ascisse; analogamente a quanto visto precedente si ottiene:

$$r_1 + f'(x_1)(x_2 - x_1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = x_1 - \frac{r_1}{f'(x_1)}$$

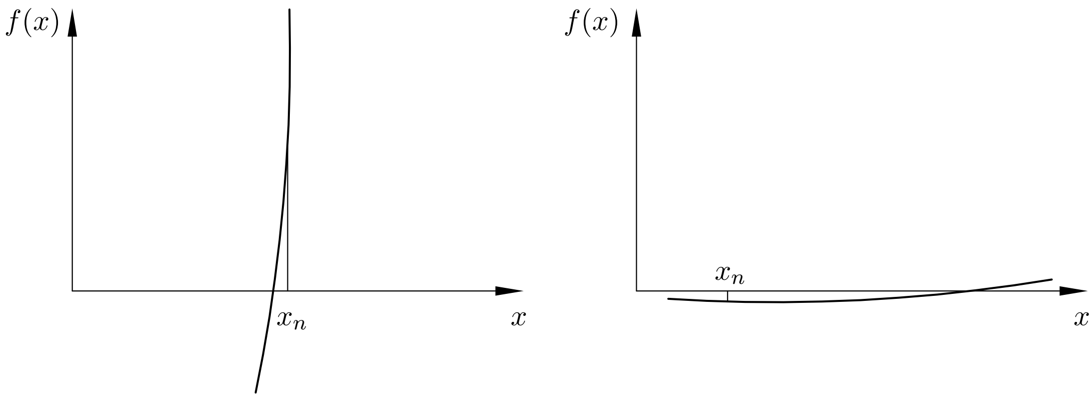
Procedendo iterativamente si ottiene la formula ricorsiva:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{r_i}{f'(x_i)} \qquad \text{dove:} \qquad r_i = f(x_i)$$

Il processo di calcolo viene arrestato dopo n iterazioni quando sia il modulo del resto che il modulo della differenza tra x_{n+1} e x_n diventano minori di una certa tolleranza desiderata:

$$\begin{cases} |r_n| & \leq \varepsilon \\ |x_n - x_{n+1}| & \leq \varepsilon \end{cases}$$

L'opportunità di utilizzare entrambe le condizioni è evidente dall'osservazione delle due situazioni limite seguenti.



Nel primo caso, pur essendo rispettata la condizione di tolleranza sulla x, non viene rispettata quella sul resto; nel secondo caso si nota invece che il rispetto della tolleranza sul resto può non garantire il rispetto della tolleranza sulla x.
Nel caso in cui l'equazione abbia più di una soluzione, è la scelta dell'approssimazione iniziale che determina quale di queste verrà calcolata dal processo iterativo.