Macchina a regime periodico

– rev. 1.2 –

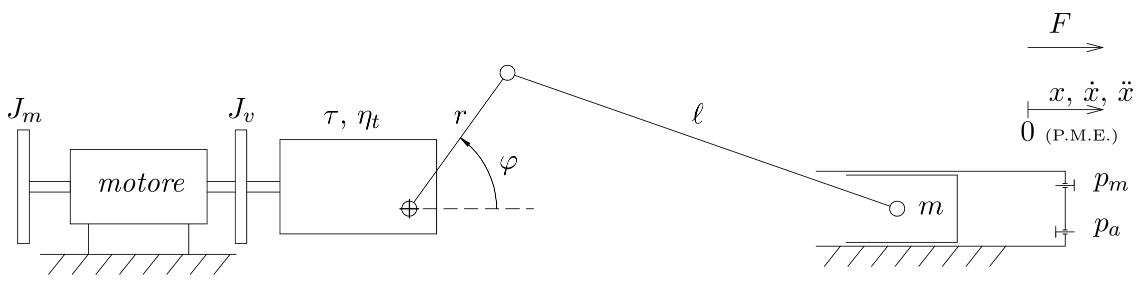

Figura 1: Schema dell'impianto di pompaggio

Della pompa volumetrica a stantuffo a singolo effetto rappresentata in figura 1 sono noti i seguenti dati:

- pressione di mandata $p_m = 4.8\, bar$
- pressione di aspirazione[1] $p_a = -0.5\, bar$
- corsa dello stantuffo $c = 280\, mm$
- diametro dello stantuffo $D = 210\, mm$
- momento d'inerzia del motore $J_m = 0.1\, kgm^2$
- massa del piede di biella $m = 54\, kg$
- velocità di rotazione media dell'albero di manovella $n = 195\, rpm$
- rapporto di trasmissione $\tau = 1/7.5$
- rendimento della trasmissione $\eta_t = 0.85$

Si chiede di:

- determinare il momento d'inerzia J_v del volano che garantisca di limitare il valore dell'irregolarità periodica i a 0.03;
- determinare la legge di moto a regime dell'albero di manovella della pompa considerando come curva caratteristica del motore quella rappresentata in figura 2 di equazione:

$$M_m = M_0 + K\, n_m$$

dove: $M_0 = 308\, Nm$, $K = -0.1225\, Nm/(rpm)$.

[1] Le pressioni sono da intendersi come pressione relative; si ricorda inoltre che: $1\, bar = 10\, N/cm^2$

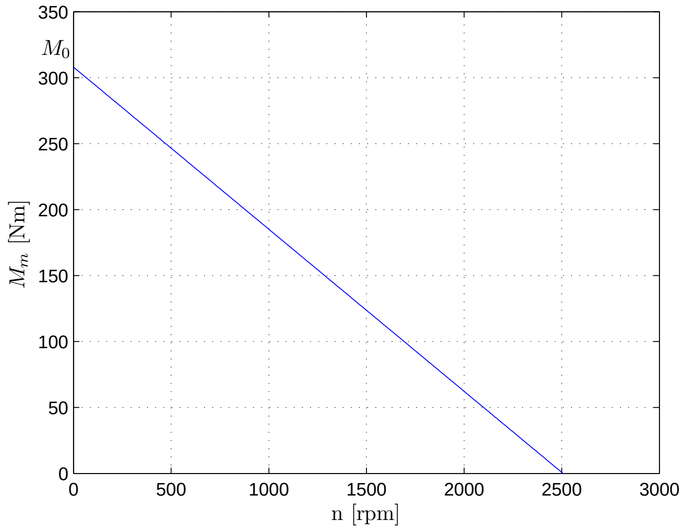

Figura 2: Curva caratteristica del motore

Traccia di soluzione

Momento motore. Per fare in modo che la condizione di moto periodico sia garantita, il motore deve esser in grado di produrre sul periodo un lavoro L_m pari al lavoro resistente più quello perduto L_r/η, dove η è il rendimento totale del sistema.[2]
La forza netta sul pistone, dovuta alle pressioni del fluido, è sempre opposta alla velocità, e quindi resistente; in particolare, i moduli delle forza di aspirazione e della forza di mandata possono essere espressi rispettivamente come:

$$F_a = |p_a| \frac{\pi D^2}{4} \qquad , \qquad F_m = p_m \frac{\pi D^2}{4}$$

Il lavoro resistente corrispondente sarà quindi:

$$L_r = F_a\, c + F_m\, c = \frac{\pi D^2}{4} c\,(|p_a| + p_m)$$

Il lavoro su un periodo del momento motore (considerato costante) ridotto all'albero della manovella sarà:

$$L_m^* = M_m^*\, 2\pi$$

Essendo nulle le perdite del manovellismo, si può scrivere:

$$L_m^* = L_r \qquad \rightarrow \qquad M_m^* = \frac{\frac{\pi D^2}{4} c\,(|p_a| + p_m)}{2\pi}$$

Il momento sul motore sarà infine:

$$M_m = M_m^* \frac{\tau}{\eta_t}$$

[2]Si ricorda che, in condizioni di regime periodico, la variazione dell'energia cinetica sul periodo è nulla ($\Delta E = 0$).

Calcolo di ΔE_{max}. Scrivendo l'equazione di bilancio delle potenze del sistema si ottiene:

$$W_m^* + W_r = \frac{dE}{dt}$$

dove: W_m^* è la potenza motrice a valle della trasmissione (quindi già depurata della potenza perduta nella trasmissione stessa), W_r è la potenza resistente, E è l'energia cinetica associata a tutte le inerzie presenti nel sistema.
L'energia cinetica può essere suddivisa in due distinti contributi, uno dovuto alle masse rotanti, l'altro dovuto alle masse in moto alterno. Per quanto riguarda le masse in moto alterno, il loro contributo può essere tenuto in conto attraverso la potenza delle loro forze d'inerzia[3]; in particolare si puo scrivere:

$$W_m^* + W_r + W_i = \frac{dE_r}{dt}$$

dove: W_i è la potenza delle forze d'inerzia delle masse in moto alterno, E_r è l'energia cinetica delle masse rotanti.
Procedendo al calcolo del momento d'inerzia del volano secondo la metodologia a *rigidezza nulla*, si ottiene:

$$\Delta E_{rmax} = J^* \, i \, \overline{\omega}^2$$

dove: ΔE_{rmax} è la variazione massima di energia cinetica delle masse rotanti, J^* è il momento d'inerzia di tutte le masse rotanti ridotto all'albero di manovella, i è l'irregolarità periodica, $\overline{\omega}$ è la velocità media di rotazione dell'albero.
Esplicitando i termini della precedente equazione di bilancio delle potenze, si ottiene:

$$M_m^* \dot{\varphi} + M_r^* \dot{\varphi} + F_i \dot{x} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(J_v^* + J_m^*\right)\dot{\varphi}^2\right]$$

dove: $F_i = -m\ddot{x}$ è la forza d'inerzia associata al piede di biella, J_v^* è il momento d'inerzia del volano, J_m^* è il momento d'inerzia dell'albero motore ridotto all'albero della manovella.
Pensando di ridurre anche la forza d'inerzia all'albero della manovella, l'equazione precedente può essere riscritta come:

$$M_m^* \dot{\varphi} + M_r^* \dot{\varphi} + M_i^* \dot{\varphi} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(J_v^* + J_m^*\right)\dot{\varphi}^2\right]$$

dove: M_i^* è la coppia d'inerzia ridotta all'albero di manovella corrispondente alla forza d'inerzia F_i.
Considerando che $\omega = d\varphi/dt$ si può scrivere:

$$\left(M_m^* + M_r^* + M_i^*\right) d\varphi = dE_r$$

Integrando da 0 ad un generico angolo φ, si ottiene l'andamento dell'energia cinetica E_r in funzione dell'angolo di manovella:

$$\int_0^{\varphi} \left(M_m^* + M_r^* + M_i^*\right) d\varphi = E_r(\varphi) - E_r(0)$$

da cui, estendendo l'integrale all'intero periodo, è possibile trovare il valore massimo, il minimo e quindi la loro differenza ΔE_{rmax}[4].
Per il calcolo dell'integrale si può procedere per via numerica valutando l'area sottesa dalla funzione integranda, ad esempio con il *metodo dei trapezi*.

[3]Si ricorda che la potenza delle forze d'inerzia è pari alla derivata dell'energia cinetica cambiata di segno: $W_i = -\dfrac{dE}{dt}$.

[4]Si noti che il calcolo di ΔE_{rmax} non dipende dal valore $E_r(0)$.

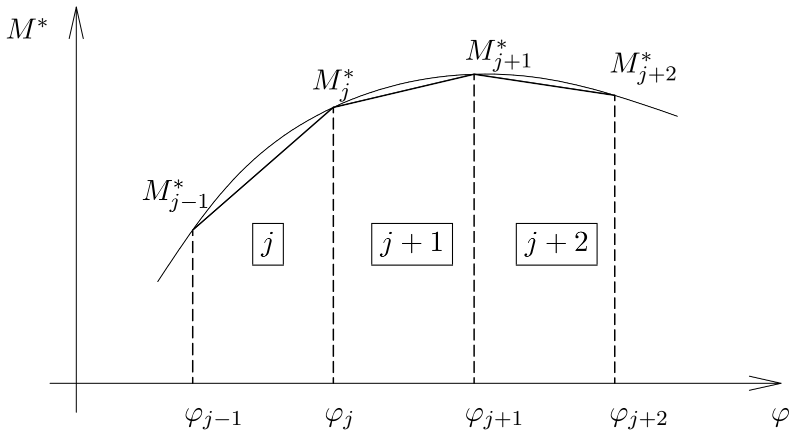

Figura 3: Esemplificazione grafica del *metodo dei trapezi*

Posto $M^*(\varphi) = (M^*_m + M^*_r + M^*_i)$, l'applicazione del metodo dei trapezi porta alla seguente formula ricorsiva:

$$E_r\left(\varphi_{j+1}\right) = E_r\left(\varphi_j\right) + \frac{\left[M^*\left(\varphi_{j+1}\right) + M^*\left(\varphi_j\right)\right]\Delta\varphi}{2}$$

In questo modo, salvando tutti i valori di E_r calcolati ai vari passi, si ottiene l'andamento dell'energia cinetica in funzione dell'angolo di manovella, da cui si possono possono poi ricavare il valore minimo e il valore massimo.
Dal punto di vista grafico, con riferimento alla figura 3, il generico valore $E_r\left(\varphi_{j+1}\right)$ è la somma delle aree di tutti i trapezi in cui è stata suddivisa l'area sottesa dalla funzione $M^*\left(\varphi\right)$, dalla prima alla $(j+1)$.
Un altro modo per calcolare ΔE_{rmax} è osservare che l'energia cinetica avrà il suo massimo e il suo minimo in corrispondenza degli zeri della funzione integranda, come mostrato in figura 4 dove si è assunto zero come valore iniziale dell'energia cinetica.
Una volta calcolata la variazione massima di energia cinetica delle masse rotanti, è immediato calcolare il momento d'inerzia del volano che garantisce una determinata irregolarità periodica:

$$J^* = \frac{\Delta E_{rmax}}{i\,\overline{\omega}^2}$$

Il corrispondente momento d'inerzia ridotto all'albero motore (l'albero veloce) sarà:

$$J = J^* \frac{\tau^2}{\eta_t}$$

Momento resistente. Per il calcolo del momento resistente ridotto all'albero della manovella, si considerino positive le forze dirette verso destra (figura 1).
In figura 5 è rappresentato l'andamento della forza resistente in funzione dell'angolo di manovella.
Nota la forza resistente, occorre ridurla all'albero di rotazione della manovella; per questo si deve allora sviluppare l'analisi cinematica del manovellismo per poter determinare il rapporto di trasmissione tra piede di biella e albero di manovella.
In particolare, considerando anche lo spostamento x positivo verso destra e con origine in corrispondenza del P.M.E (punto morto esterno), e l'angolo di rotazione φ positivo se

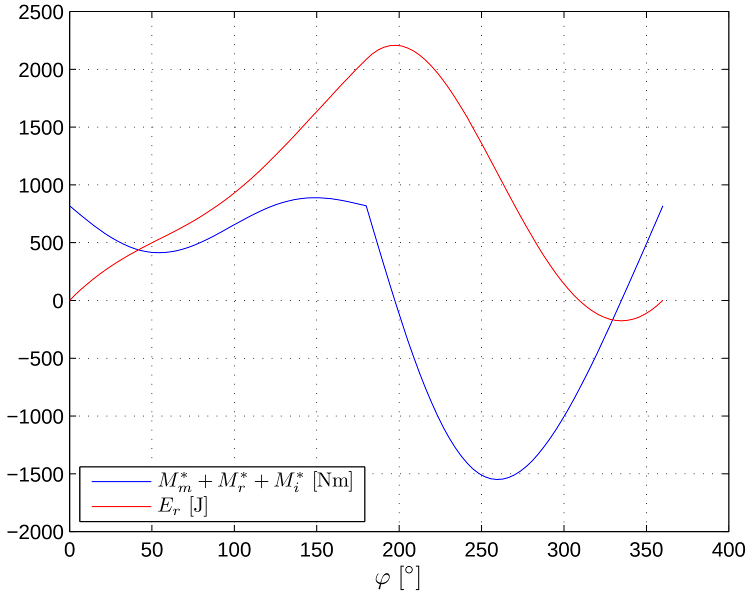

Figura 4: Andamento di M^* e di E_r

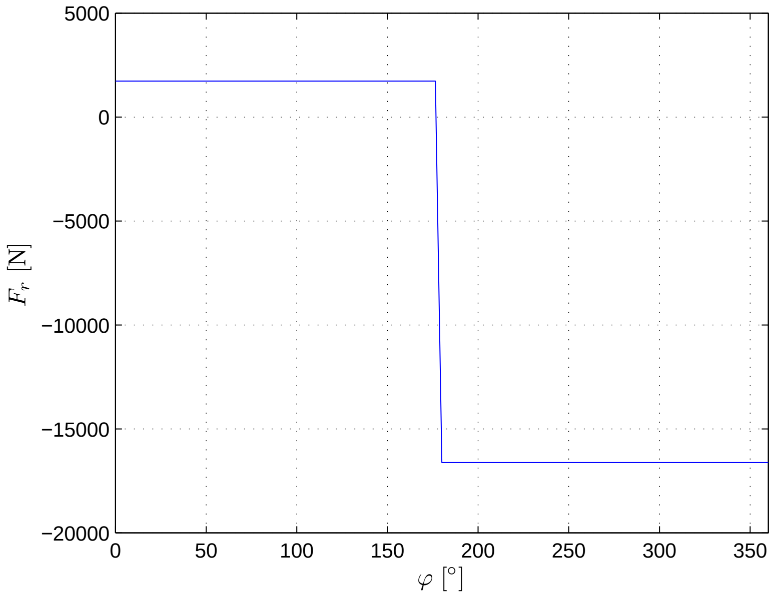

Figura 5: Andamento della forza resistente in funzione dell'angolo di manovella

antiorario, la relazione tra x e φ può essere scritta, in forma semplificata[5], come:

$$x = -r\left[1 - \cos\left(\varphi\right)\right]$$

[5] La forma semplificata è tanto più valida quanto più il rapporto tra la lunghezza della biella e della manovella è piccolo: $\lambda = r/\ell \ll 1$.

Di conseguenza la velocità, considerata anch'essa positiva verso destra, sarà:

$$\dot{x} = -r\,\sin(\varphi)\,\dot{\varphi}$$

dove il termine $[-r\,\sin(\varphi)]$ rappresenta il rapporto di trasmissione τ_m tra la velocità angolare della manovella e del piede di biella.
Una volta determinato il rapporto di trasmissione, il momento resistente ridotto M_r^*, rappresentato in figura 6, sarà:

$$M_r^* = F_r \tau_m = F_r\,[-r\,\sin(\varphi)]$$

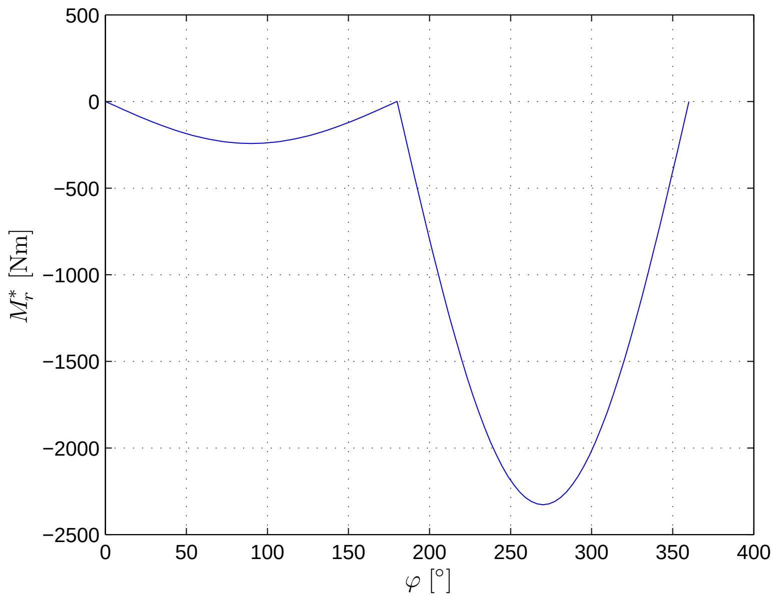

Figura 6: Andamento del momento resistente ridotto in funzione dell'angolo di manovella

Coppia d'inerzia. Per poter procedere al calcolo dell'integrale ed arrivare così a determinare ΔE_{rmax}, manca solo la coppia d'inerzia associata alle masse in moto alterno M_i^*:

$$M_i^* = F_i \tau_m = -m\ddot{x}\,[-r\,\sin(\varphi)]$$

Derivando l'espressione della velocità $\dot{x}$, considerando $\dot{\varphi}$ costante (pari alla velocità media $\overline{\omega}$), si ottiene:

$$\ddot{x} = -r\,\dot{\varphi}^2\,\cos(\varphi)$$

da cui:

$$M_i = -mr^2\,\dot{\varphi}^2\,\cos(\varphi)\,\sin(\varphi)$$

La figura 7 ne rappresenta l'andamento.
La figura 8 rappresenta i tre contributi (M_m^*, M_r^*, M_i^*) che costituiscono la funzione integranda.
Una volta determinato ΔE_{rmax}, è immediato calcolare l'inerzia del volano J_v^*:

$$\Delta E_{rmax} = (J_v^* + J_m^*)\,i\,\overline{\omega}^2 \qquad \rightarrow \qquad J_v^* = \frac{\Delta E_{rmax}}{i\,\overline{\omega}^2} - J_m^*$$

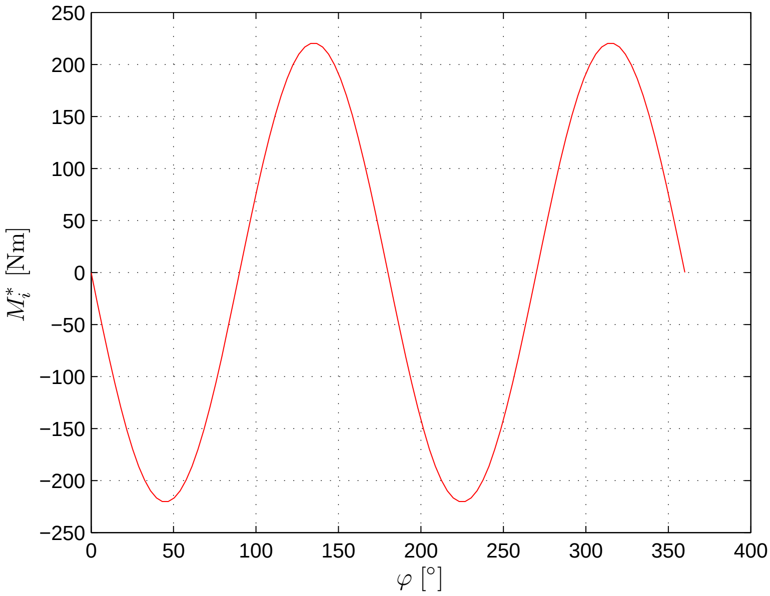

Figura 7: Andamento della coppia d'inerzia dovuta alle masse in moto alterno

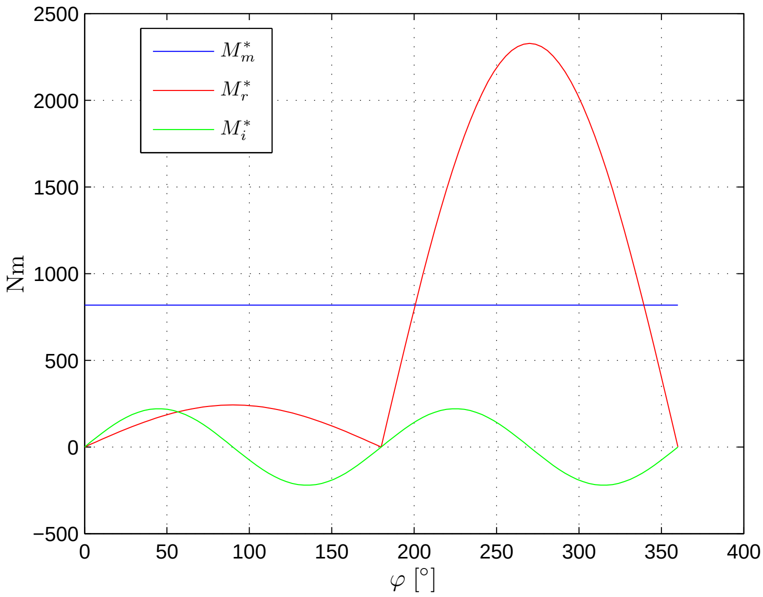

Figura 8: Andamento dei vari contributi

Legge di moto. Per la determinare la legge di moto dell'albero della manovella, bisogna integrare l'equazione di moto del sistema.
Dal bilancio delle potenze si ottiene:

$$M_m^*(\dot{\varphi})\omega + M_r^*\omega + M_i^*\omega = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(J_v^* + J_m^*\right)\omega^2\right]$$

dove: $M_m^*(\dot{\varphi})$ è l'espressione della curva caratteristica del motore, M_r^* è ancora il momento resistente ridotto e M_i^* è ancora la coppia d'inerzia associata alle masse in moto alterno, con la differenza che ora, per il calcolo dell'accelerazione $\ddot{x}$, la velocità $\dot{\varphi}$ non è ritenuta costante. In particolare:

$$\ddot{x} = -r\,\dot{\varphi}^2\,\cos(\varphi) - \ddot{\varphi}\,r\,\sin(\varphi)$$

da cui:

$$M_i^* = -m\ddot{x}\,\tau_m = -m\,r^2\sin(\varphi)\left[\dot{\varphi}^2\,\cos(\varphi) + \ddot{\varphi}\,\sin(\varphi)\right]$$

L'equazione di moto diventa quindi:

$$M_m^*(\dot{\varphi}) + M_r^*(\varphi) - m\,r^2\sin(\varphi)\left[\dot{\varphi}^2\,\cos(\varphi) + \ddot{\varphi}\,\sin(\varphi)\right] = (J_v^* + J_m^*)\,\ddot{\varphi}$$

da cui:

$$\ddot{\varphi} = \frac{M_m^*(\dot{\varphi}) + M_r^*(\varphi) - m\,r^2\,\dot{\varphi}^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\left[J_v^* + J_m^* + m\,r^2\,\sin^2(\varphi)\right]}$$

La figura 9 mostra il risultato dell'integrazione ottenuto considerando come velocità iniziale del sistema un valore prossimo al regime. Si noti che la velocità angolare della manovella si assesta attorno ad un valor medio pari a quello di progetto e che l'irregolarità periodica, visto che nella simulazione è stata utilizzato come momento d'inerzia del volano quello precedentemente calcolato, rimane entro il valore di 0.03.

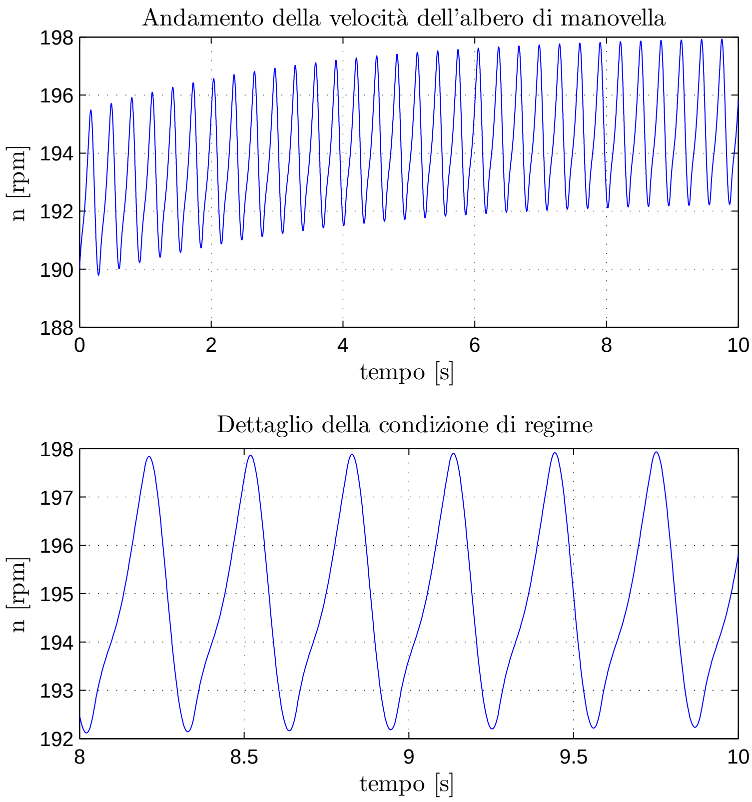

Figura 9: Legge di moto dell'albero di manovella