Stimatori e Intervalli di Confidenza

1 Esercizi sugli stimatori

1.1

Da una v.c. X di media μ e varianza $\sigma^2 = 1$ viene estratto un campione di ampiezza n. Siano T_1 e T_2 due stimatori per μ tali che:

$$T_1 = X_1 + X_2 - X_n$$
$$T_2 = \frac{X_1 + X_2}{2} - X_n$$

1. Calcolare la distorsione di entrambi gli stimatori
2. Determinare la varianza di entrambi gli stimatori
3. Indicare per quali valori della media μ T_2 risulta più efficiente di T_1.

Soluzione

1. Si definisce distorsione di uno stimatore:

$$bias(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

Ne consegue:

$$\begin{aligned} bias(T_1) &= E(T_1) - \mu \\ &= E(X_1 + X_2 - X_n) - \mu \\ &= E(X_1) + E(X_2) - E(X_n) - \mu \\ &= \mu + \mu - \mu - \mu = 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
bias(T_2) &= E(T_2) - \mu \\
&= E\left(\frac{X_1 + X_2}{2} - X_n\right) - \mu \\
&= \frac{1}{2}\left[E(X_1) + E(X_2) - 2E(X_n)\right] - \mu \\
&= \frac{1}{2}(\mu + \mu - 2\mu) - \mu = -\mu
\end{aligned}
$$

2. Varianza

$$
\begin{aligned}
V(T_1) &= V(X_1 + X_2 - X_n) \\
&= V(X_1) + V(X_2) + V(X_n) \\
&= 1 + 1 + 1 = 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(T_2) &= V\left(\frac{X_1 + X_2}{2} - X_n\right) \\
&= V\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) + V(X_n) \\
&= \frac{1}{4}\left[V(X_1) + V(X_2)\right] + V(X_n) \\
&= \frac{2}{4} + 1 = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

3. Si stabilisce se uno stimatore è più o meno efficiente rispetto ad un altro stimatore in base al rapporto:

$$e(T_1, T_2) = \frac{MSE(T_2)}{MSE(T_1)} \quad \text{con} \quad MSE(T_i) = E\left[(T_i - \theta)^2\right] = V(T_i) + bias(T_i)^2$$

Ne consegue:

$$
\begin{aligned}
MSE(T_1) &= V(T_1) + bias(T_1)^2 \\
&= 3 + 0 = 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
MSE(T_2) &= V(T_2) + bias(T_2)^2 \\
&= \frac{3}{2} + \mu^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e(T_1, T_2) &= \frac{MSE(T_2)}{MSE(T_1)} \\
&= \frac{\frac{3}{2} + \mu^2}{3} \\
&= \frac{3 + 2\mu^2}{6}
\end{aligned}
$$

Ora, se T_2 è più efficinete di T_1 allora $e(T_1, T_2) < 1$. Pertanto:

$$
\begin{aligned}
&\frac{3 + 2\mu^2}{6} < 1 \\
&\mu^2 < \frac{3}{2} \\
&\text{ovvero per } -\sqrt{\frac{3}{2}} < \mu < \sqrt{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

1.2

Si supponga di voler stimare il valore atteso di una variabile X. Si considerino tre stimatori T_1, T_2 e T_3 con le seguenti distribuzioni di probabilità:

$$
\begin{aligned}
&P_{T_1}(t_1) = \frac{1}{3} \quad \text{per} \quad t_1 = 1, 3, 5 \\
&P_{T_2}(t_2) = 1 \quad \text{per} \quad t_2 = 3 \\
&P_{T_3}(t_3) = \frac{t_3}{10} \quad \text{per} \quad t_3 = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
$$

Sapendo che $E(X) = 4$, calcolare la distorsione dei tre stimatori.

Soluzione

Si definisce distorsione di uno stimatore:

$$
bias(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta) = E(\hat{\theta}) - \theta
$$

Occorre dunque calcolare il valore atteso dei tre stimatori. Riportando le informazioni a disposizione in forma tabellare, si ha:

$T_1 = t_1$	$P(T_1 = t_1)$
1	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3}$
5	$\frac{1}{3}$
	1

$T_2 = t_2$	$P(T_2 = t_2)$
3	1
	1

$T_3 = t_3$	$P(T_3 = t_3)$
1	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{2}{10}$
3	$\frac{3}{10}$
4	$\frac{4}{10}$
	1

Passando al calcolo del valore atteso di ogni stimatore si ottiene:

$$\begin{aligned}
E(T_1) &= 1 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} = 3 \\
E(T_2) &= 3 \cdot 1 = 3 \\
E(T_3) &= 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{2}{10} + 3 \cdot \frac{3}{10} + 4 \cdot \frac{4}{10} = 3
\end{aligned}$$

Ne consegue che, essendo $\mu = E(X) = 4(= \theta)$:

$$\begin{aligned}
bias(T_1) &= E(T_1) - \theta = 3 - 4 = -1 \\
bias(T_2) &= E(T_2) - \theta = 3 - 4 = -1 \\
bias(T_3) &= E(T_3) - \theta = 3 - 4 = -1
\end{aligned}$$