Esercizio 1.

Si calcoli il valore atteso e la varianza di una variabile casuale X Binomiale di parametri n e π

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x} =$$

$$= \pi \sum_{x=0}^{n} x \frac{n(n-1)!}{x(x-1)!(n-x)!} \pi^{x-1} (1-\pi)^{n-x} =$$

$$= n\pi \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-1-(x-1))!} \pi^{x-1} (1-\pi)^{n-1-(x-1)} =$$

$$= n\pi \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \pi^i (1-\pi)^{n-1-i} = n\pi$$

Relativamente al calcolo della varianza iniziamo con:

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x} = \sum_{x=2}^{n} x(x-1) \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x}$$

$$= \pi^2 \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{n(n-1)(n-2)!}{x(x-1)(x-2)!(n-x)!} \pi^{x-2} (1-\pi)^{n-x} =$$

$$= n(n-1)\pi^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-2-(x-2))!} \pi^{x-2} (1-\pi)^{n-2-(x-2)} =$$

$$= n(n-1)\pi^2 \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} \pi^i (1-\pi)^{n-2-i} = n(n-1)\pi^2$$

Quindi: $var(X) = n(n-1)\pi^2 + n\pi - (n\pi)^2 = n\pi(1-\pi)$.

Esercizio 2.

Si calcoli il valore atteso e la varianza di una variabile casuale X Poisson di parametro λ

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \lambda$$

Relativamente al calcolo della varianza iniziamo con:

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \lambda^2$$

Quindi: $Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Esercizio 3.

Si calcoli il valore atteso di una variabile casuale X Binomiale Negativa di parametri r e π.

$$E(X) = \pi^r \sum_{x=r}^{\infty} x \binom{x-1}{r-1} (1-\pi)^{x-r} =$$

pongo $q = x - r$

$$= \pi^r \sum_{q=0}^{\infty} (q+r) \binom{q+r-1}{r-1} (1-\pi)^q =$$

$$= \pi^r (1-\pi) \sum_{q=0}^{\infty} q \binom{q+r-1}{r-1} (1-\pi)^{q-1} + r\pi^r \sum_{q=0}^{\infty} \binom{q+r-1}{r-1} (1-\pi)^q =$$

$$= \pi^r \frac{r(1-\pi)}{\pi^{r+1}} + \pi^r \frac{r}{\pi^r} = \frac{r}{\pi}$$

Le uguaglianze dell'ultima riga derivano dai noti risultati:

$$\frac{1}{(1-x)^a} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+a-1}{a-1} x^i$$

$$\frac{a}{(1-x)^{a+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} i \binom{i+a-1}{a-1} x^{i-1}$$

Si noti che la seconda uguaglianza si ottiene derivando entrambi i termini della prima uguaglianza.

Esercizio 4.

Si calcoli la varianza di una variabile casuale X Binomiale Negativa di parametri r e π.

Si deve utilizzare il seguente risultato che si ottiene derivando entrambi i termini dell'ultima uguaglianza nell'esercizio precedente.

$$\frac{a(a+1)}{(1-x)^{a+2}} = \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) \binom{i+a-1}{a-1} x^{i-2}$$

Iniziamo con il calcolo di:

$$E(X(X-1)) == \pi^r \sum_{x=r}^{\infty} x(x-1)\binom{x-1}{r-1}(1-\pi)^{x-r} =$$

$$pongo\ q = x-r$$

$$= \pi^r \sum_{q=0}^{\infty}(q+r)(q+r-1)\binom{q+r-1}{r-1}(1-\pi)^q =$$

$$= \pi^r \sum_{q=0}^{\infty}\left[q(q-1)+2rq+r(r-1))\right]\binom{q+r-1}{r-1}(1-\pi)^q =$$

$$= (1-\pi)^2\frac{r(r+1)}{\pi^2} + 2r^2(1-\pi)\frac{1}{\pi} + r(r-1)$$

e quindi : $var(X) = r\frac{1-\pi}{\pi^2}$

Esercizio 5 Si calcoli valore atteso e varianza di $X = \mu+\sigma Z$, con Z normale standard.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma Z)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz + \int_{-\infty}^{+\infty}\sigma Z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz =$$

$$= \mu$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma Z-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz =$$

$$= \sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}(Z^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = \sigma^2$$

Esercizio 6 Siano $X_i, i = 1, 2, ..., n$, n variabili casuali indipendenti con valore atteso μ e varianza σ^2.

Si calcoli il valore atteso di $\sum_{i=1}^{n}(\ X_i - m)^2$.

Innanzitutto da $(X_i - m)^2 = X_i^2 + m^2 - 2X_i m$ deriva che:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 + n(m-\mu)^2$$

Quindi:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right) + nE\left((m-\mu)^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}E\left((X_i-\mu)^2\right) + n\frac{\sigma^2}{n} = (n-1)\sigma^2.$$

Si noti che $E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right)=\sum_{i=1}^{n}E\left((X_i-\mu)^2\right)=n\sigma^2$ perchè le variabili casuali X_i sono indipendenti. Se cosi non fosse l'uguaglianza non sarebbe valida. Perchè?. Infine $E\left((m-\mu)^2\right)=\frac{\sigma^2}{n}$ per quanto detto a proposito del teorema di normalità asintotica.