UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Facoltà di Ingegneria

Istituzioni di Economia

Laurea Triennale in Ingegneria Gestionale

Lezione 14
Minimizzazione dei costi

Prof. Gianmaria Martini

Minimizzazione dei costi

- Un'impresa minimizza i costi se produce ciascun livello di output $y \geq 0$ ai costi più bassi possibili.
- $c(y,w)$ denota la funzione dei costi minimi totali per l'impresa connessi alla produzione di y unità di output, dati i prezzi dei fattori, w.
- $c(y,w)$ si definisce "funzione di costo totale" per l'impresa.

Il problema di minimizzazione dei costi

- Si consideri un'impresa che utilizza due inputs per produrre un output.
- La funzione di produzione è: $y = f(x_1,x_2)$.
- Si prenda come dato il livello di output $y \geq 0$.
- Dati i prezzi degli inputs w_1 e w_2, il costo di una tecnica (paniere di inputs) (x_1,x_2) è: $w_1x_1 + w_2x_2$.

- Dati w_1, w_2 e y, il problema di minimizzazione del costo per l'impresa è:

$$\min_{x_1, x_2 \geq 0} \; w_1 x_1 + w_2 x_2$$

sotto il vincolo: $f(x_1, x_2) = y.$

Ottenimento della funzione di costo

- Una curva che contenga tutti i panieri di inputs con lo stesso costo è una curva di iso-costo.
- Es., dati w_1 e w_2, la linea di iso-costo di 100 € ha equazione:

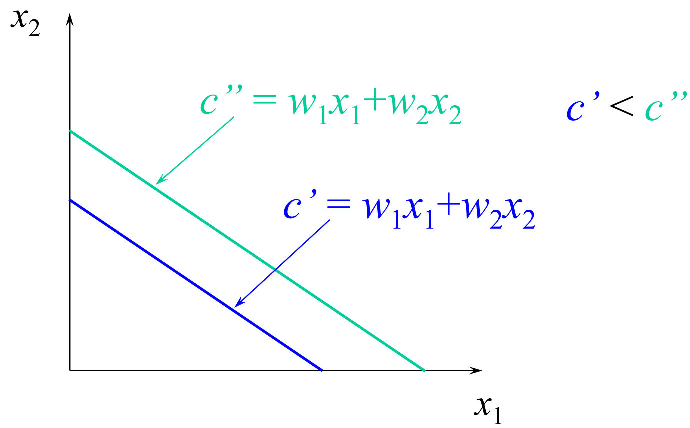
$$w_1x_1 + w_2x_2 = 100.$$

- In generale, dati w_1 e w_2, l'equazione della linea di iso-costo di c € è: $w_1x_1+w_2x_2=c$.

- cioè: $$x_2 = -\frac{w_1}{w_2}x_1 + \frac{c}{w_2}.$$

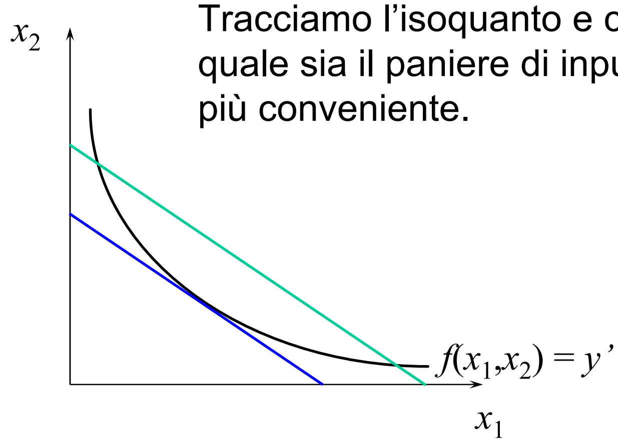
- Si noti che la pendenza è: - w_1/w_2.

Isocosti con pendenza = $-w_1/w_2$.



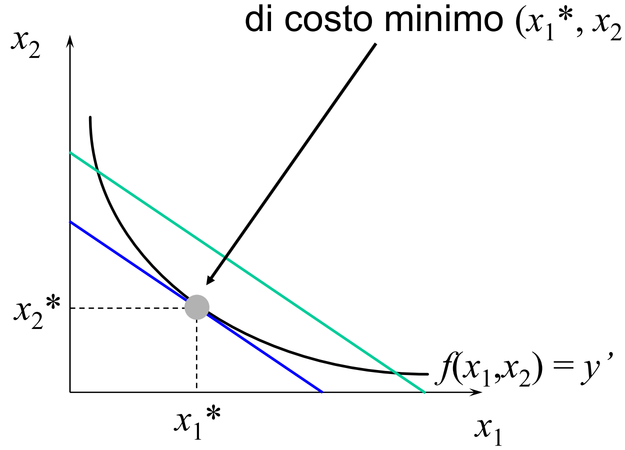
Università degli Studi di Bergamo
Facoltà di Ingegneria

Supponiamo di voler produrre y'.
Tracciamo l'isoquanto e chiediamoci
quale sia il paniere di input
più conveniente.



Combinazione di inputs

di costo minimo (x_1^*, x_2^*)

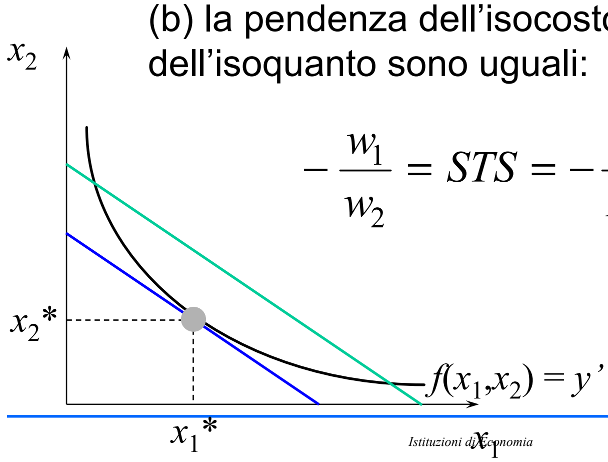


Caratteristiche della combinazione di inputs di minimo costo:

(a) $f(x_1^*, x_2^*) = y'$

(b) la pendenza dell'isocosto e quella dell'isoquanto sono uguali:

$$-\frac{w_1}{w_2} = STS = -\frac{PM_1}{PM_2} \text{ in } (x_1^*, x_2^*).$$



- Le quantità x_1^* e x_2^* dipendono dai prezzi dei fattori e dal livello di produzione.
- $x_1^*(w_1,w_2,y)$ e $x_2^*(w_1,w_2,y)$ nella combinazione di minimo costo sono le domande (condizionali) per gli inputs 1 e 2.
- Il minimo costo totale possibile per produrre y unità di output quindi è:

$$c(w_1, w_2, y) =$$
$$w_1 x_1^*(w_1, w_2, y) + w_2 x_2^*(w_1, w_2, y).$$

Minimizzazione dei costi: un esempio Cobb-Douglas

- La funzione di produzione per l'impresa è "Cobb-Douglas":

$$y=f(x_1,x_2)=x_1^{1/3}x_2^{2/3}.$$

- I prezzi degli inputs sono w_1 e w_2.

La combinazione (x_1*,x_2*) che minimizza il costo di produzione di y unità di output deve rispettare:

(a) $$y=(x_1^*)^{1/3}(x_2^*)^{2/3}$$

(b) $$-\frac{w_1}{w_2}=-\frac{\partial y/\partial x_1}{\partial y/\partial x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{w_1}{w_2}=\frac{(1/3)(x_1^*)^{-2/3}(x_2^*)^{2/3}}{(2/3)(x_1^*)^{1/3}(x_2^*)^{-1/3}}=\frac{x_2^*}{2x_1^*}.$$

(a) $y=(x_1^*)^{1/3}(x_2^*)^{2/3}$ (b) $\frac{w_1}{w_2}=\frac{x_2^*}{2x_1^*}.$

Dalla (b), $x_2^*=\frac{2w_1}{w_2}x_1^*.$

Sostituiamo x_2* nella (a) per ottenere:

$$y=(x_1^*)^{1/3}\left(\frac{2w_1}{w_2}x_1^*\right)^{2/3}=\left(\frac{2w_1}{w_2}\right)^{2/3}x_1^*.$$

da cui: $x_1^*=\left(\frac{w_2}{2w_1}\right)^{2/3}y$ che è la domanda condizionata dell'input 1.

Poichè $x_2^* = \frac{2w_1}{w_2} x_1^*$ e $x_1^* = \left(\frac{w_2}{2w_1}\right)^{2/3} y$

$$x_2^* = \frac{2w_1}{w_2}\left(\frac{w_2}{2w_1}\right)^{2/3} y = \left(\frac{2w_1}{w_2}\right)^{1/3} y$$

Si ottiene $x_2*(w_1,w_2,y)$, cioè la domanda condizionata dell'impresa per l'input 2.

Riassumendo, per la funzione di produzione:

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$$

la combinazione di inputs più conveniente per ottenere y unità di output è:

$$\left(x_1^*(w_1, w_2, y), x_2^*(w_1, w_2, y)\right)$$

$$= \left(\left(\frac{w_2}{2w_1}\right)^{2/3} y,\ \left(\frac{2w_1}{w_2}\right)^{1/3} y\right).$$

Pertanto, la funzione di costo minimo per l'impresa è:

$$c(w_1, w_2, y) = w_1 x_1^*(w_1, w_2, y) + w_2 x_2^*(w_1, w_2, y)$$

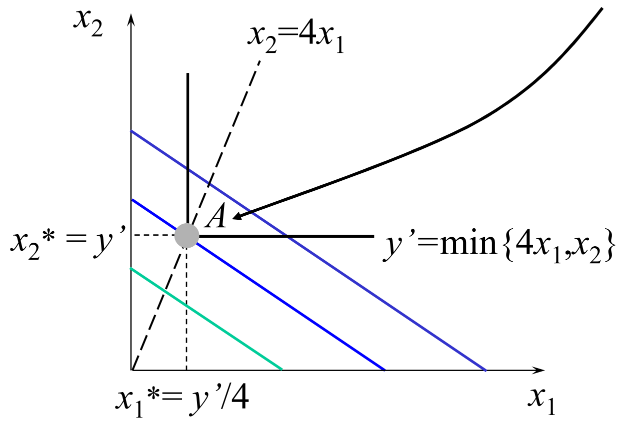
$$= w_1 \left(\frac{w_2}{2w_1} \right)^{2/3} y + w_2 \left(\frac{2w_1}{w_2} \right)^{1/3} y$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^{2/3} w_1^{1/3} w_2^{2/3} y + 2^{1/3} w_1^{1/3} w_2^{2/3} y = 3 \left(\frac{w_1 w_2^2}{4} \right)^{1/3} y.$$

Minimizzazione dei costi: un esempio alla "Leontief".

- La funzione di produzione per l'impresa è:
  $$y = min\ (4x_1, x_2)$$
- I prezzi degli inputs w_1 e w_2 sono dati.
- Calcoliamo le funzioni di domanda condizionata e la funzione di minimo costo per l'impresa.

“A” è la combinazione di inputs di minimo costo per ottenere y’ unità di output



Le domande condizionate per gli inputs sono:

$$x_1^*(w_1, w_2, y) = \frac{y}{4} \qquad \text{e} \qquad x_2^*(w_1, w_2, y) = y.$$

La funzione di costo totale quindi è:

$$c(w_1, w_2, y)$$

$$= w_1 x_1^*(w_1, w_2, y) + w_2 x_2^*(w_1, w_2, y)$$

$$= w_1 \frac{y}{4} + w_2 y = \left(\frac{w_1}{4} + w_2\right) y.$$

Costi medi totali di produzione

- Il costo medio totale per la produzione di y unità (per y positivo) è:

$$CMe(w_1, w_2, y) = \frac{c(w_1, w_2, y)}{y}.$$

Il costo medio è il rapporto tra costo totale e livello di produzione.

Ritorni-di-scala e costi medi totali

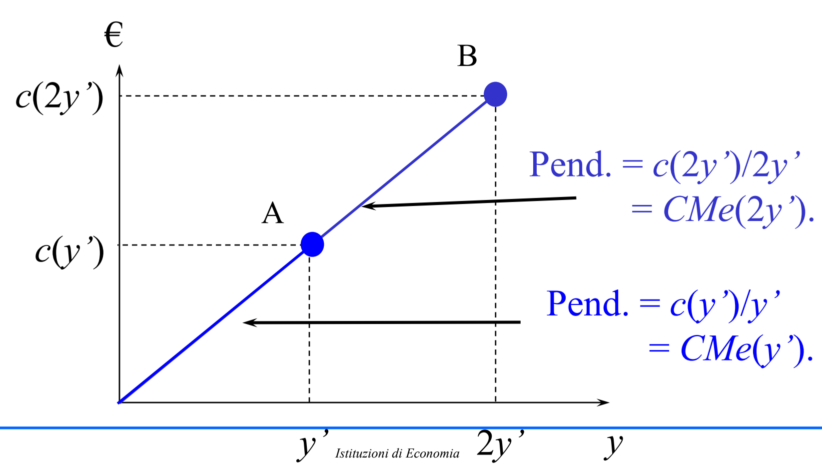
- La proprietà della tecnologia riguardo ai ritorni-di-scala determina come cambiano i costi medi di produzione al variare dell'output.
- Supponiamo che un'impresa produca y' unità di output.
- Chiediamoci come cambiano i costi medi di produzione se essa decide di produrre $2y'$ unità di output.

- Se la tecnologia di un impresa presenta ritorni-di-scala costanti, raddoppiare la produzione (da y' a $2y'$) richiede la duplicazione di tutti i livelli di input.

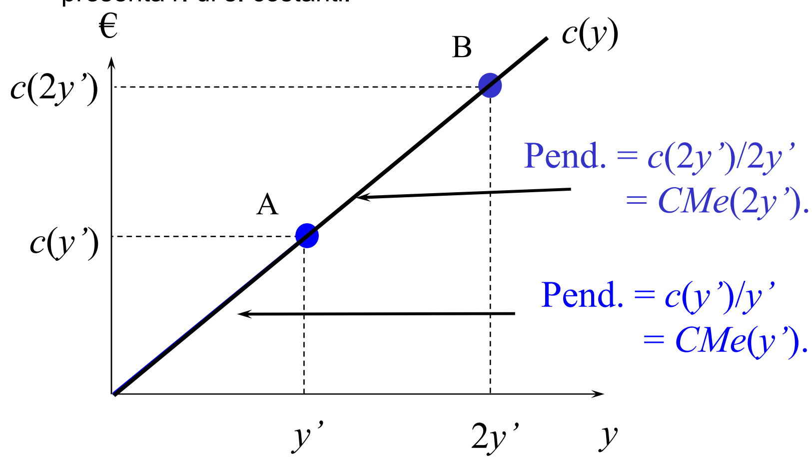
- Il costo di produzione totale raddoppia.
- Il costo medio di produzione non cambia.

I punti A e B appartengono alla funzione di costo, la quale in B è doppia rispetto ad A

Il CMe (Costo totale/Produzione) è dato dalla pendenza dei segmenti che uniscono A e B all'origine



Il costo medio è costante con y se la tecnologia dell'impresa presenta r. di s. costanti.

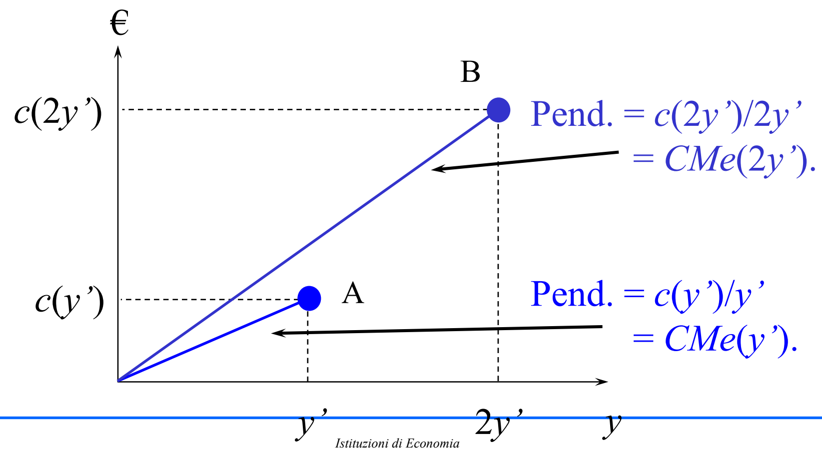


Pendenza costante: $CMe(y') = CMe(2y')$.

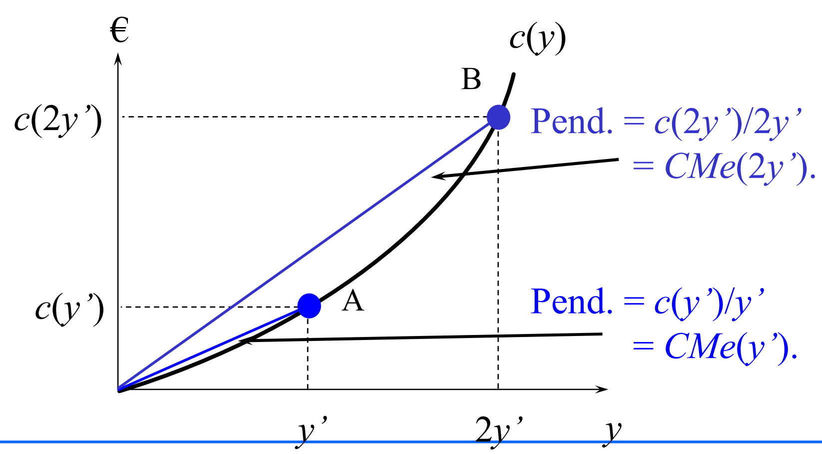
- Se la tecnologia di un impresa presenta ritorni-di-scala decrescenti, raddoppiare la produzione (da y' a $2y'$) richiede livelli di input più che doppi.
- Il costo di produzione totale più che raddoppia.
- Il costo medio di produzione aumenta.

I punti A e B appartengono alla funzione di costo, la quale in B è più che doppia che in A.

Il CMe (Costo totale/Produzione) è dato dalla pen-denza dei segmenti che uniscono A e B all'origine.



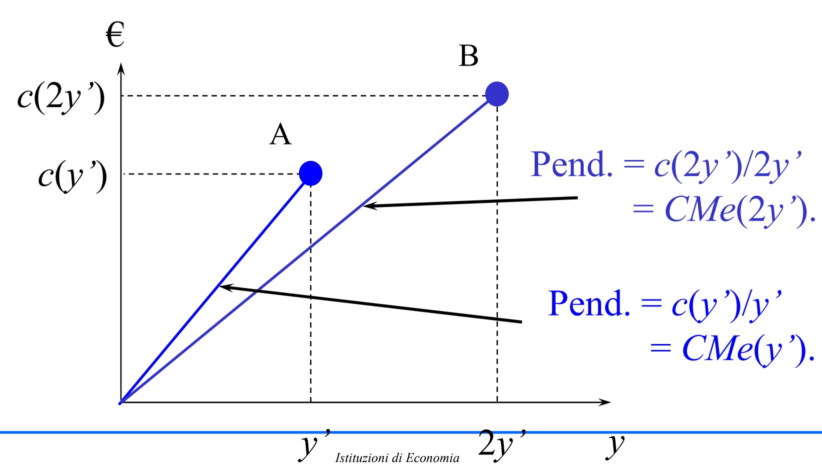
Il costo medio aumenta con y se la tecnologia dell'impresa presenta r. di s. decrescenti



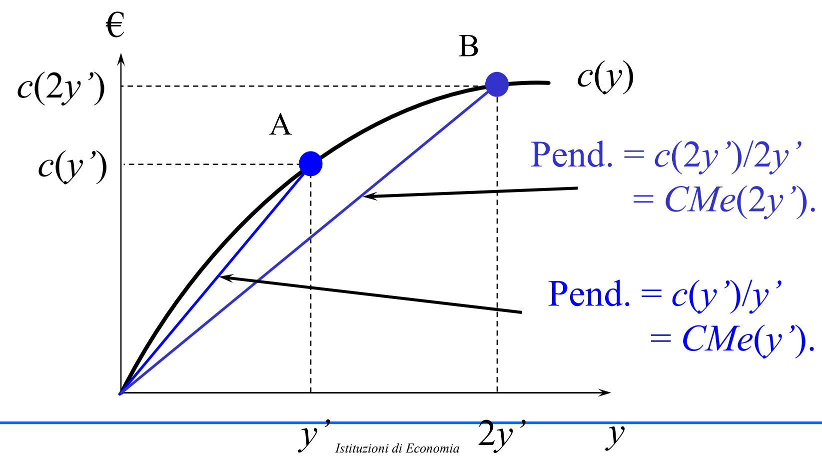
- Se la tecnologia di un impresa presenta ritorni-di-scala crescenti, raddoppiare la produzione (da y' a $2y'$) richiede livelli di input meno che doppi.
- Il costo di produzione totale aumenta ma a meno del doppio.
- Il costo medio di produzione si riduce.

I punti (A e B) appartengono alla funzione di costo.

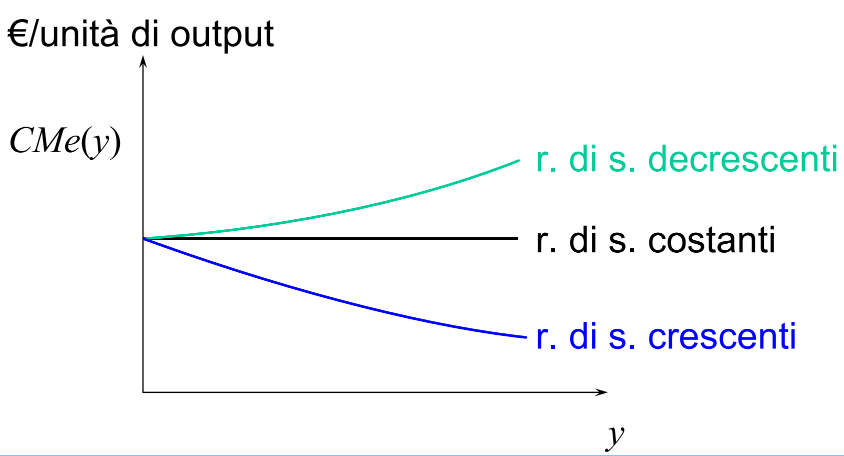
La pendenza dei segmenti che li uniscono all'origine rappresenta il costo medio. (Pendenza=Costo totale/Produzione = CMe).



Il costo medio si riduce con y se la tecnologia dell'impresa presenta r. di s. crescenti



Funzione di costo medio nei diversi casi di r. di s.



Costi totali di breve e di lungo periodo

- Nel lungo periodo un'impresa può variare tutti i livelli di input.
- Consideriamo un'impresa che – nel breve periodo – non sia in grado di cambiare il livello dell'input 1 da x_1' unità.
- Chiediamoci quali rapporti ci sono tra il costo totale di lungo periodo (per produrre y unità di output) ed il costo totale di breve periodo.

- Il problema di minimizzazione di lungo periodo è:

$$\min_{x_1, x_2 \geq 0} w_1 x_1 + w_2 x_2$$

con vincolo:

$$f(x_1, x_2) = y.$$

- Il problema di minimizzazione di breve periodo è:

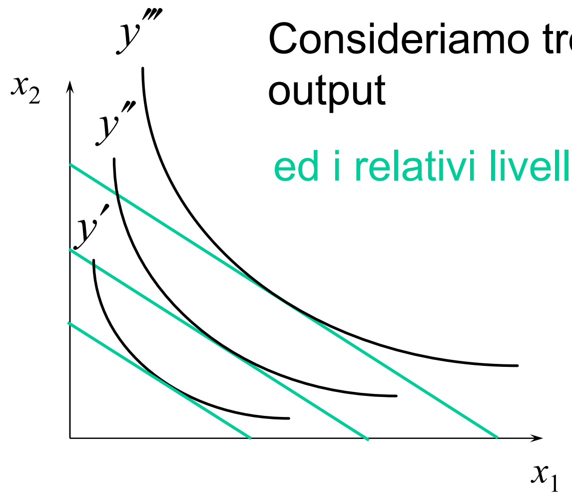
$$\min_{x_2 \geq 0} w_1 x_1^{'} + w_2 x_2$$

con vincolo: $f(x_1^{'}, x_2) = y.$

- Il problema di minimizzazione dei costi di breve periodo è eguale a quello di lungo periodo soggetto al vincolo aggiuntivo $x_1 = x_1$'.
- Se la scelta di lungo periodo per x_1 fosse x_1', il vincolo aggiuntivo $x_1 = x_1$' non vincolerebbe realmente e quindi i costi totali di lungo e di breve periodo per produrre y sono eguali.

- Tuttavia, quando la scelta di lungo periodo è $x_1 \neq x_1$' allora il vincolo aggiuntivo $x_1 = x_1$' fa si che l'impresa, nel breve periodo, non possa conseguire i costi minimi di lungo periodo.
- Il vincolo aggiuntivo implica quindi che i costi di breve periodo siano superiori ai costi di lungo periodo.

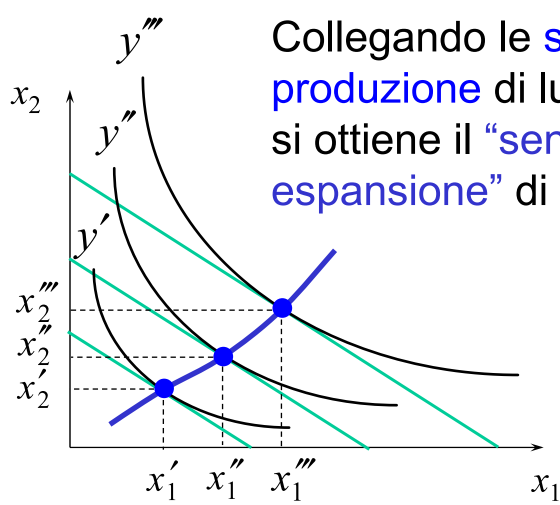
Università degli Studi di Bergamo
Facoltà di Ingegneria



Consideriamo tre livelli di output

ed i relativi livelli di costo

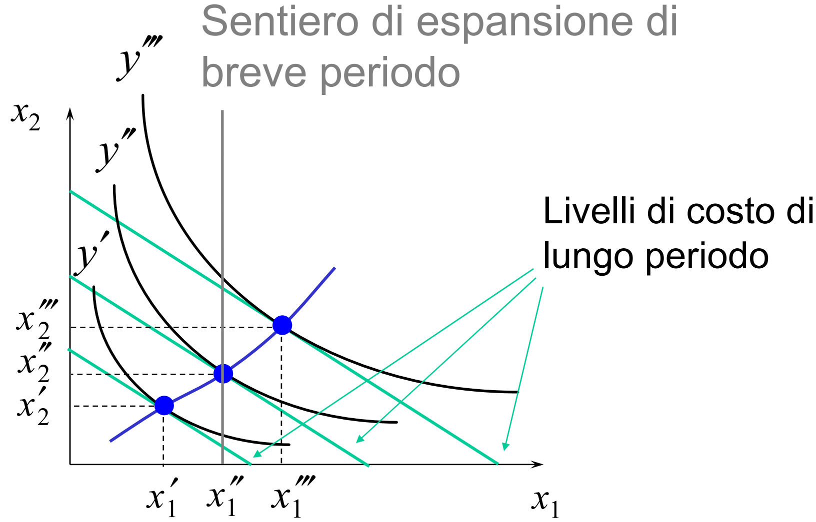
Università degli Studi di Bergamo
Facoltà di Ingegneria

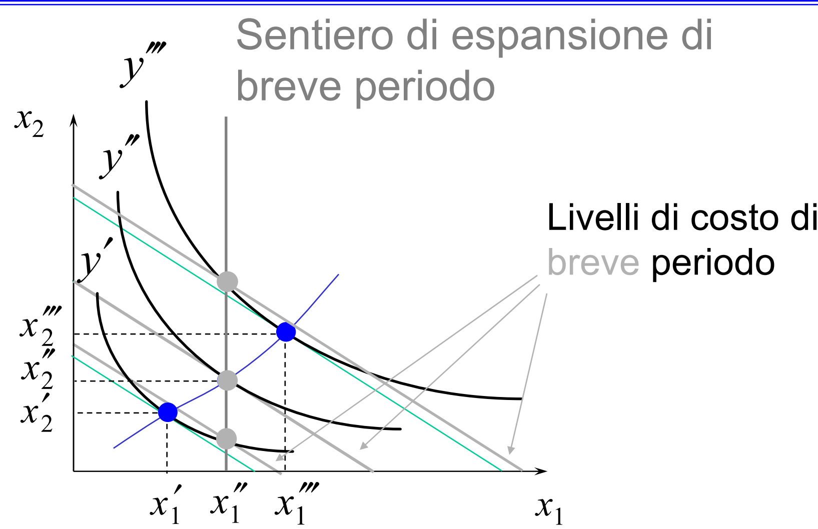


Collegando le scelte di produzione di lungo periodo si ottiene il "sentiero di espansione" di lungo periodo.

- Notate che gli isocosti (in blu) rappresentano costi di lungo periodo.
- Supponiamo ora che l'impresa sia soggetta, nel breve periodo, al vincolo $x_1 = x_1$".

Sentiero di espansione di breve periodo





- I costi totali di breve periodo sono superiori ai costi totali di lungo periodo eccetto che per il livello di output in cui il livello di input (vincolato) di breve periodo è eguale alla scelta di lungo periodo.
- Questo ci dice che la curva dei costi totali di lungo periodo ha sempre in comune un punto con una particolare curva dei costi totali di breve periodo.

Università degli Studi di Bergamo
Facoltà di Ingegneria

La curva dei costi totali di breve periodo (bp) ha un punto in comune con la curva dei costi totali di lungo periodo, per gli altri livelli di y è più elevata.