
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO



Facoltà di Ingegneria

Istituzioni di Economia

Laurea Triennale in Ingegneria Gestionale

Lezione 13
Produttività e rendimenti di scala

Prof. Gianmaria Martini



Università degli Studi di Bergamo
Facoltà di Ingegneria

Produttività marginale

- Consideriamo la funzione di produzione:
 $y = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$
- La **produttività marginale** dell'input i è data dall'incremento nell'output conseguito variando il livello dell'input i , **tenendo fissi gli altri livelli di input**.
- Cioè:

$$PM_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}$$



Se $y = f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$

la produttività marginale dell'input 1 è:

$$PM_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3}$$

e la produttività marginale dell'input 2 è:

$$PM_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-1/3}.$$



Tipicamente la produttività marginale di un input dipende dall'ammontare utilizzato degli altri inputs.

Consideriamo: $PM_1 = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3}$

Se $x_2 = 8$, $PM_1 = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} 8^{2/3} = \frac{4}{3} x_1^{-2/3}$

Se $x_2 = 27$, $PM_1 = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} 27^{2/3} = 3 x_1^{-2/3}$.



- La produttività marginale dell'input i è decrescente se diventa più piccola al crescere dell'utilizzo dell'input i .
- In molti casi la produttività marginale è decrescente:
 - a parità degli altri fattori, ogni unità dell'input che viene aumentato trova meno unità degli altri fattori con cui “collaborare”.
- Per questo motivo le unità addizionali sono “meno produttive”.



Se $y = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$ allora:

$$PM_1 = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3} \quad \text{e} \quad PM_2 = \frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-1/3}$$

quindi
$$\frac{\partial PM_1}{\partial x_1} = -\frac{2}{9} x_1^{-5/3} x_2^{2/3} < 0$$

e
$$\frac{\partial PM_2}{\partial x_2} = -\frac{2}{9} x_1^{1/3} x_2^{-4/3} < 0.$$

Nel nostro esempio, entrambe le produttività marginali sono decrescenti.

Università degli Studi di Bergamo
Facoltà di Ingegneria

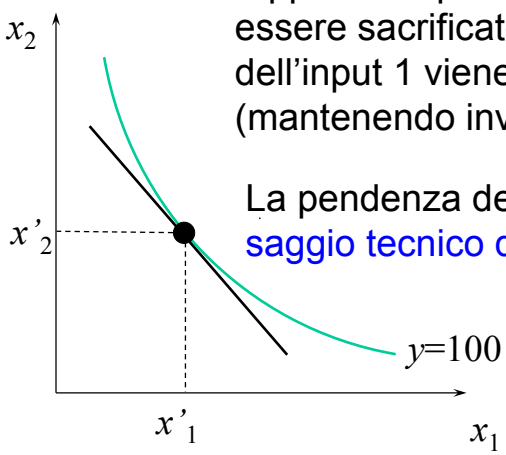
Saggio tecnico di sostituzione

- Poniamoci un quesito di notevole rilevanza:
 - secondo quale rapporto è possibile per un'azienda sostituire un input con un altro senza modificare il livello di output?
- Si tratta di un problema analogo a quello visto per i consumatori, che sostituivano i beni mantenendo la stessa utilità

Istituzioni di Economia

7

Università degli Studi di Bergamo
Facoltà di Ingegneria



La pendenza dell'isoquante è il rapporto al quale l'input 2 deve essere sacrificato se il livello dell'input 1 viene aumentato (mantenendo invariato l'output).

La pendenza dell'isoquante è il **saggio tecnico di sostituzione**.

x_2

x'_2

x_1

x'_1

$y=100$

Istituzioni di Economia

8



- Come si calcola il saggio tecnico di sostituzione?
- La funzione di produzione è:

$$y = f(x_1, x_2)$$
- Un piccolo cambiamento (dx_1, dx_2) nel vettore di input induce una variazione nel livello di output pari a:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2.$$



Ma $dy = 0$ (stiamo sull'isoquante di partenza), quindi le variazioni dx_1 e dx_2 negli inputs devono soddisfare:

$$0 = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2.$$

risistemando

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 = - \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1$$



ovvero:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2}$$

che è il **Saggio Tecnico di Sostituzione** (STS), ovvero il rapporto a cui l'input 2 deve essere sacrificato se l'input 1 aumenta e si voglia mantenere costante il livello di output.

Notate che il STS è pari al rapporto tra le produttività marginali, con segno cambiato.



Esempio Cobb-Douglas

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

Svolgiamo con $a=1/3$; $b=2/3$



Le produttività marginali sono:

$$PM_1 = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3} \quad \text{e}$$

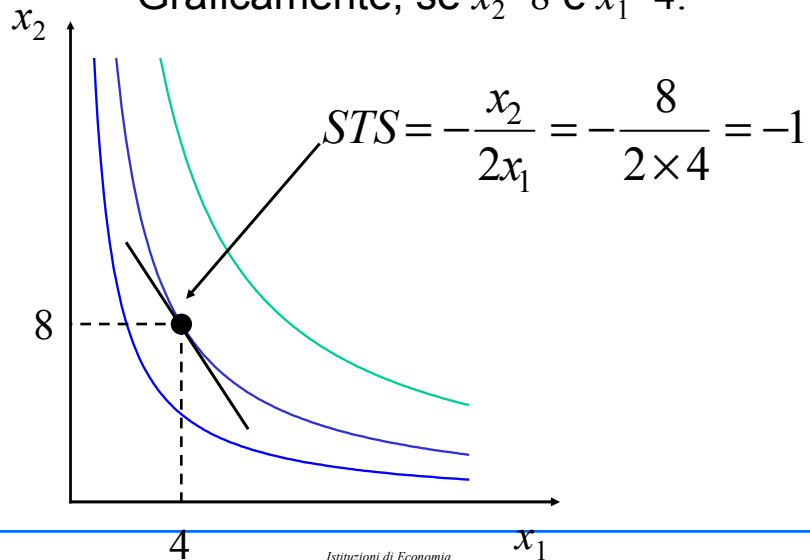
$$PM_2 = \frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-1/3}$$

Il loro rapporto con segno mutato (STS) è quindi:

$$STS = - \frac{(1/3)x_1^{-2/3} x_2^{2/3}}{(2/3)x_1^{1/3} x_2^{-1/3}} = - \frac{(1/3)x_2}{(2/3)x_1} = - \frac{x_2}{2x_1}$$



Graficamente, se $x_2=8$ e $x_1=4$:



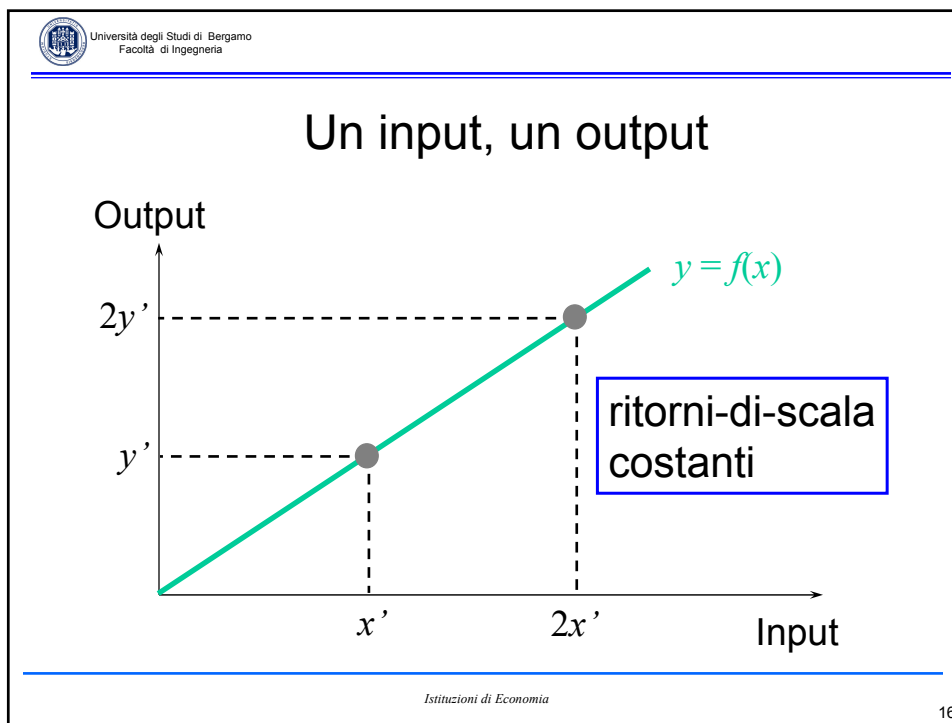
Università degli Studi di Bergamo
Facoltà di Ingegneria

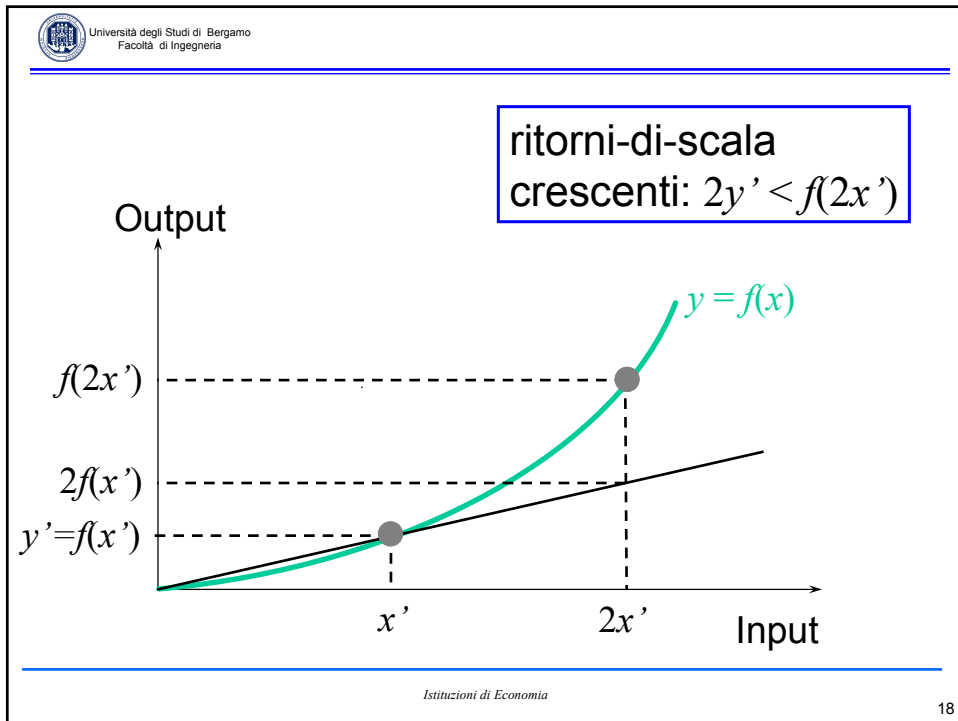
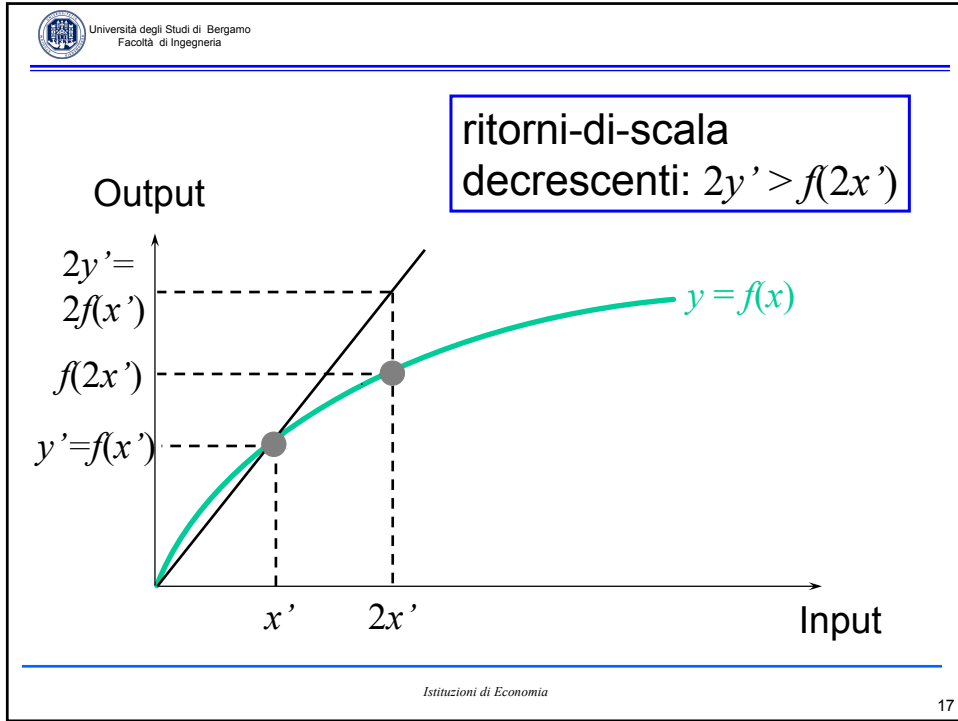
Ritorni (rendimenti)-di-scala

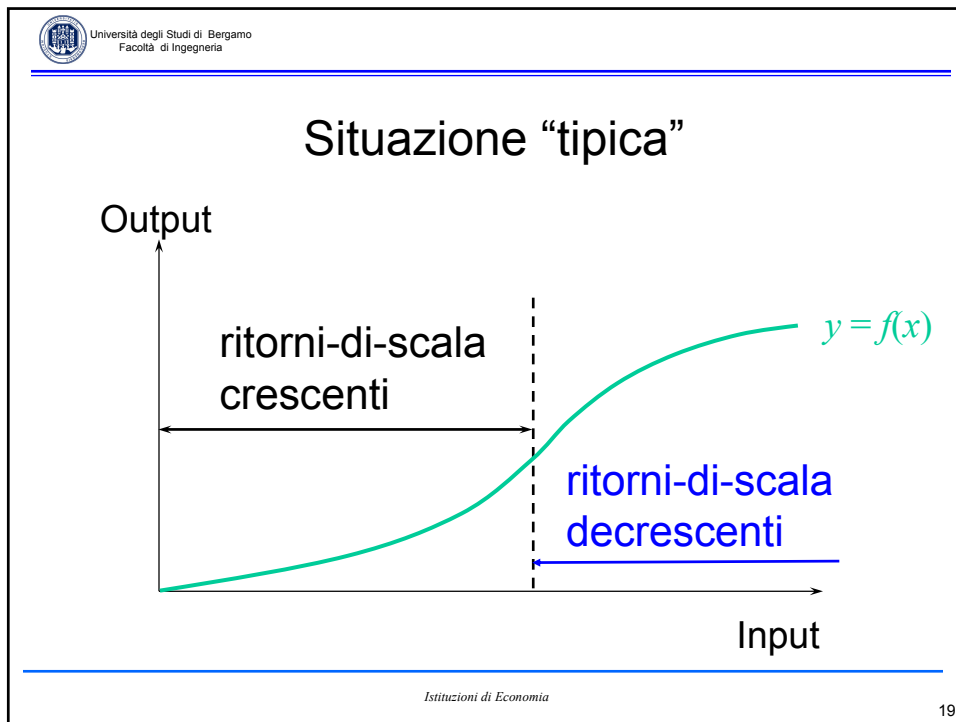
- Le produttività marginali descrivono il cambiamento nell'output quando cambia un solo livello di input.
- I "ritorni di scala" descrivono come cambia l'output quando tutti i livelli di input cambiano nella stessa proporzione (e.g. tutti vengono raddoppiati, triplicati ecc.).
- Presenteremo una trattazione grafica a riguardo del caso irrealistico ma utile didatticamente in cui esiste un solo input

Istituzioni di Economia

15







Università degli Studi di Bergamo
Facoltà di Ingegneria

Esempio Cobb-Douglas

La funzione di produzione sia data da:

$$y = x_1^{a_1} x_2^{a_2} .$$

Espandiamo tutti i livelli di input in proporzione di k .

L'output diventa: $(kx_1)^{a_1} (kx_2)^{a_2}$

$$= k^{a_1} k^{a_2} x_1^{a_1} x_2^{a_2} = k^{a_1+a_2} x_1^{a_1} x_2^{a_2} = k^{a_1+a_2} y.$$

Istituzioni di Economia

20



Data la funzione di produzione: $y = x_1^{a_1} x_2^{a_2}$

si ottiene: $(kx_1)^{a_1} (kx_2)^{a_2} = k^{a_1+a_2} y$.

Tale tecnologia presenta ritorni-di-scala:

costanti se $a_1 + a_2 = 1$

crescenti se $a_1 + a_2 > 1$

decrescenti se $a_1 + a_2 < 1$.



Se, per un qualsiasi vettore di inputs (x_1, \dots, x_n) ,

$$f(kx_1, kx_2, \dots, kx_n) = kf(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

allora la tecnologia descritta dalla funzione di produzione presenta **ritorni-di-scala costanti**.

Se $k = 2$, raddoppiando tutti gli inputs, si raddoppia anche l'output.



Se, per un qualsiasi vettore di inputs (x_1, \dots, x_n) ,

$$f(kx_1, kx_2, \dots, kx_n) < kf(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

allora la tecnologia descritta dalla funzione di produzione presenta **ritorni-di-scala decrescenti**.

Se $k = 2$, raddoppiando tutti gli inputs, l'output non viene raddoppiato.



Se, per un qualsiasi vettore di inputs (x_1, \dots, x_n) ,

$$f(kx_1, kx_2, \dots, kx_n) > kf(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

allora la tecnologia descritta dalla funzione di produzione presenta **ritorni-di-scala crescenti**.

Se $k = 2$, raddoppiando tutti gli inputs, l'output è più che raddoppiato.



- Una tecnologia può presentare ritorni-di scala crescenti se tutte le produttività marginali sono decrescenti?
- Sì.
- Consideriamo ad esempio:

$$y = x_1^{2/3} x_2^{2/3}.$$



questa tecnologia presenta ritorni-di-scala crescenti. $a_1 + a_2 = \frac{4}{3} > 1$

Tuttavia $PM_1 = \frac{2}{3} x_1^{-1/3} x_2^{2/3}$

diminuisce se x_1 aumenta e

$$PM_2 = \frac{2}{3} x_1^{2/3} x_2^{-1/3}$$

diminuisce se x_2 aumenta



- La produttività marginale è la variazione di output indotta dall'aumento in un solo input.
- La produttività marginale diminuisce in quanto i livelli degli altri input sono costanti, quindi ogni unità dell'input che cresce trova sempre meno unità degli altri inputs con cui "collaborare".
- Quando tutti gli inputs vengono aumentati proporzionalmente, non è detto che vi sia diminuzione delle produttività marginali.
- ogni fattore produttivo ha sempre la stessa quantità degli altri inputs con cui "collaborare".



Breve e lungo periodo

- Il lungo periodo è la situazione in cui un'impresa non è vincolata nella scelta di nessun fattore produttivo.
- Il breve periodo è **una** situazione in cui un'impresa è vincolata in qualche modo nella scelta di (almeno) un fattore produttivo.



- Esempi di possibili vincoli 'di breve periodo' :
 - impossibilità (o eccessivo costo) nell'installare/rimuovere capitale
 - impossibilità legale di licenziare lavoratori.
- Supponiamo che i vincoli di breve periodo riguardino il livello di input del fattore 2 (input fisso).
- Il fattore 1 rimane variabile.



Sia $y = x_1^{1/3} x_2^{1/2}$ la funzione di produzione di lungo periodo (x_1 e x_2 sono variabili).

La funzione di produzione di breve periodo con $x_2 = 4$ è:

$$y = x_1^{1/3} 4^{1/2} = 2x_1^{1/3}.$$

La funzione di produzione di breve periodo con $x_2 = 16$ è:

$$y = x_1^{1/3} 16^{1/2} = 4x_1^{1/3}.$$

