

---

---

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO



Facoltà di Ingegneria

Istituzioni di Economia

Laurea Triennale in Ingegneria Gestionale

Lezione 6

Utilità e sostituzione

Prof. Gianmaria Martini

---



Università degli Studi di Bergamo  
Facoltà di Ingegneria

La funzione di utilità

---


---

- Introdurremo un esempio specifico di funzione di utilità.
- Questo esempio concreto ci aiuterà ad introdurre importanti concetti quali:

**L'utilità marginale**

**Il saggio marginale di sostituzione (SMS)**

- Esempi a riguardo di funzioni di utilità alternative completeranno il capitolo.



Università degli Studi di Bergamo  
 Facoltà di Ingegneria

**La funzione Cobb-Douglas**

---


- Qualsiasi funzione di utilità del tipo:
 
$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

con  $a > 0$  e  $b > 0$  viene chiamata funzione di utilità Cobb-Douglas.
- Es.:  $U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$  ( $a = b = 1/2$ )
- $V(x_1, x_2) = x_1 x_2^3$  ( $a = 1, b = 3$ )

---

Istituzioni di Economia

3



Università degli Studi di Bergamo  
 Facoltà di Ingegneria

---

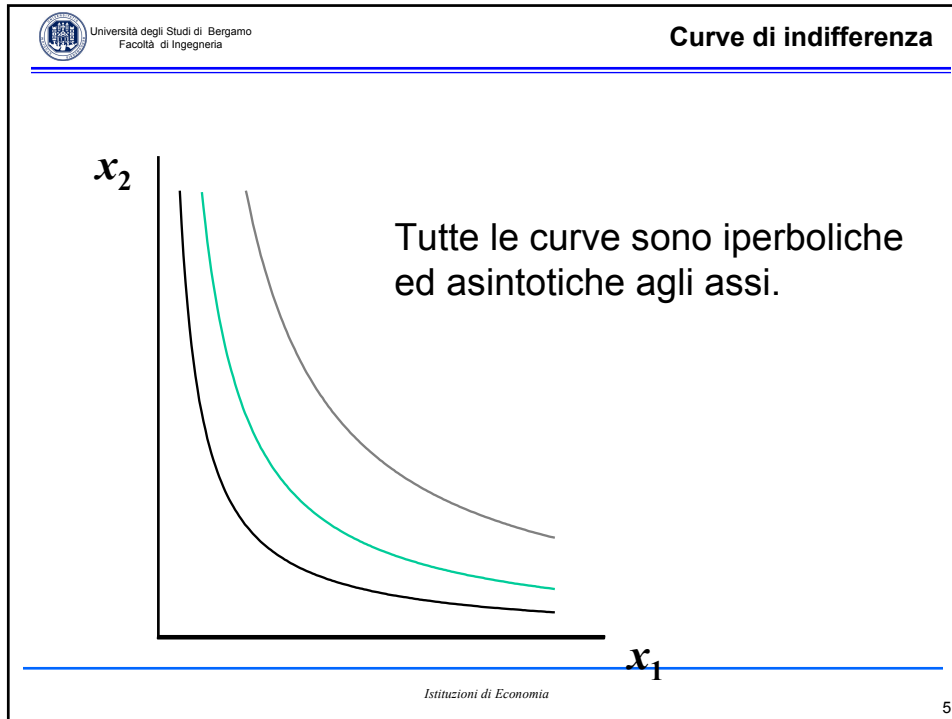
- Le curve di indifferenza sono espresse dall'equazione
 
$$x_1^a x_2^b = k$$

dove  $k$  è un dato.
- Esplicitando per  $x_2$  si ottiene:
 
$$x_2 = (k/x_1^a)^{1/b}$$
- Per  $a=b=1/2$ ,  $x_2 = k^{0.5}/x_1$

---

Istituzioni di Economia

4



Università degli Studi di Bergamo  
Facoltà di Ingegneria

### Utilità marginali

- Marginale significa “incrementale”.
- Intuitivamente, l'utilità marginale del bene  $i$  è incremento di utilità connesso ad un incremento unitario nel consumo del bene  $i$ :

$$UMg_i = U(x_1, \dots, x_i + 1, \dots) - U(x_1, \dots, x_i, \dots)$$

Istituzioni di Economia

6



- Più precisamente, l'utilità marginale del bene  $i$  è il rapporto tra la variazione di utilità e l'incremento nel consumo del bene  $i$ .
- In termini differenziali:

$$UMg_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$



- In concreto, si utilizza il concetto di derivata parziale.
- E.g. se  $U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^2$  allora:

$$UMg_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{-1/2} x_2^2$$

Il termine in  $x_2$  è un dato (viene considerato come fosse una costante): cambia solo il consumo del primo bene

Università degli Studi di Bergamo  
Facoltà di Ingegneria

- Analogamente, dato sempre  $U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} \cdot x_2^2$

$$UMg_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = 2x_1^{1/2}x_2$$

Istituzioni di Economia 9

Università degli Studi di Bergamo  
Facoltà di Ingegneria

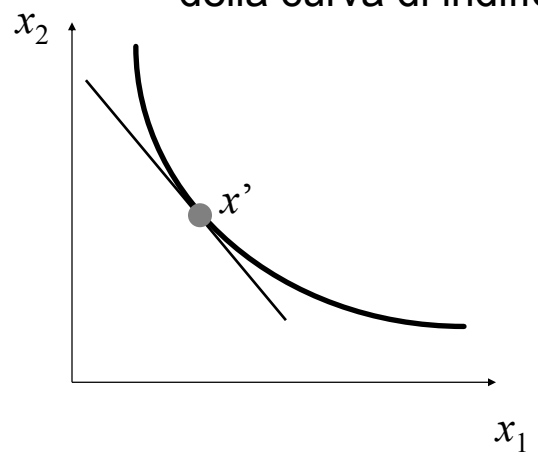
### Saggio marginale di sostituzione

- Si tratta di un concetto fondamentale: ci dice **quante unità di un bene sono sacrificabili per ottenere una unità aggiuntiva di un altro bene “a parità di benessere” (restando indifferenti)**
- Come si calcola il SMS di sostituzione?

Istituzioni di Economia 10

Università degli Studi di Bergamo  
Facoltà di Ingegneria

Il SMS nel punto  $x'$  è la pendenza della curva di indifferenza in  $x'$



The graph shows a coordinate system with a vertical axis labeled  $x_2$  and a horizontal axis labeled  $x_1$ . A convex indifference curve is plotted. A point  $x'$  is marked on the curve. A straight line is tangent to the curve at this point, representing the slope of the indifference curve at  $x'$ .

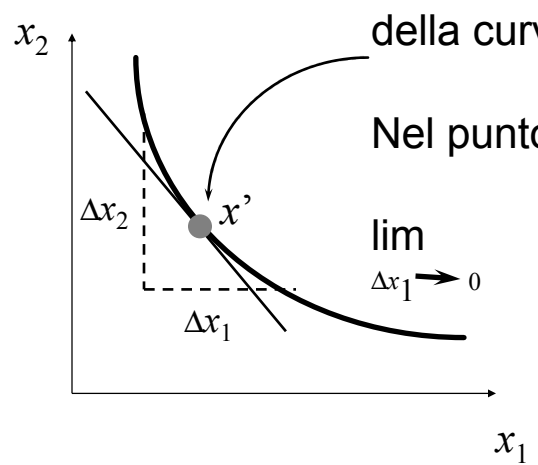
Istituzioni di Economia

11

Università degli Studi di Bergamo  
Facoltà di Ingegneria

Il SMS è la pendenza della curva:  $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$

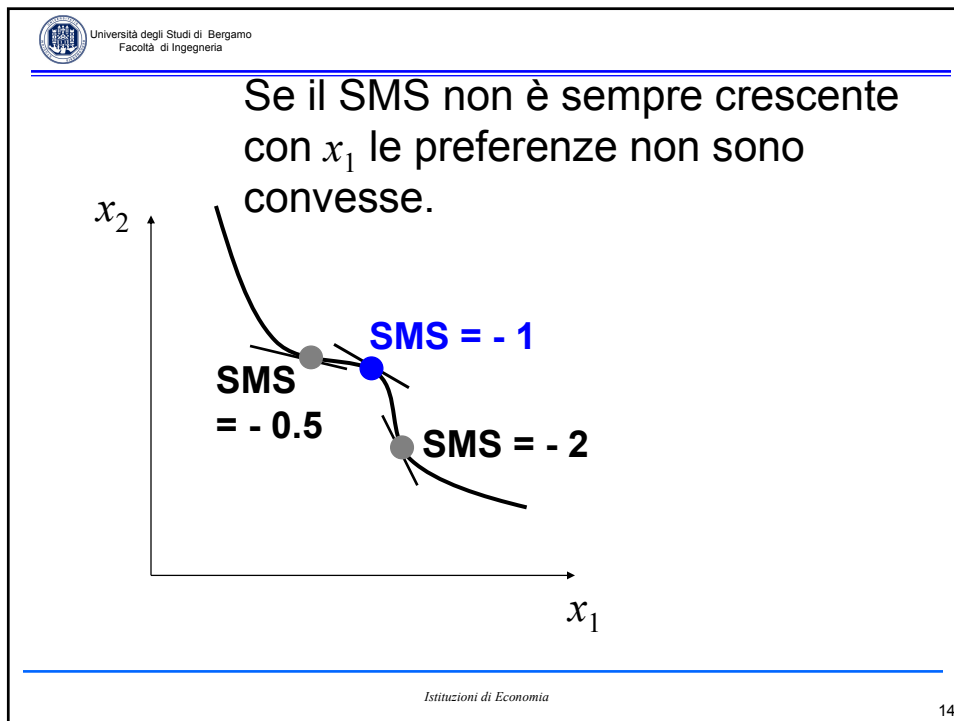
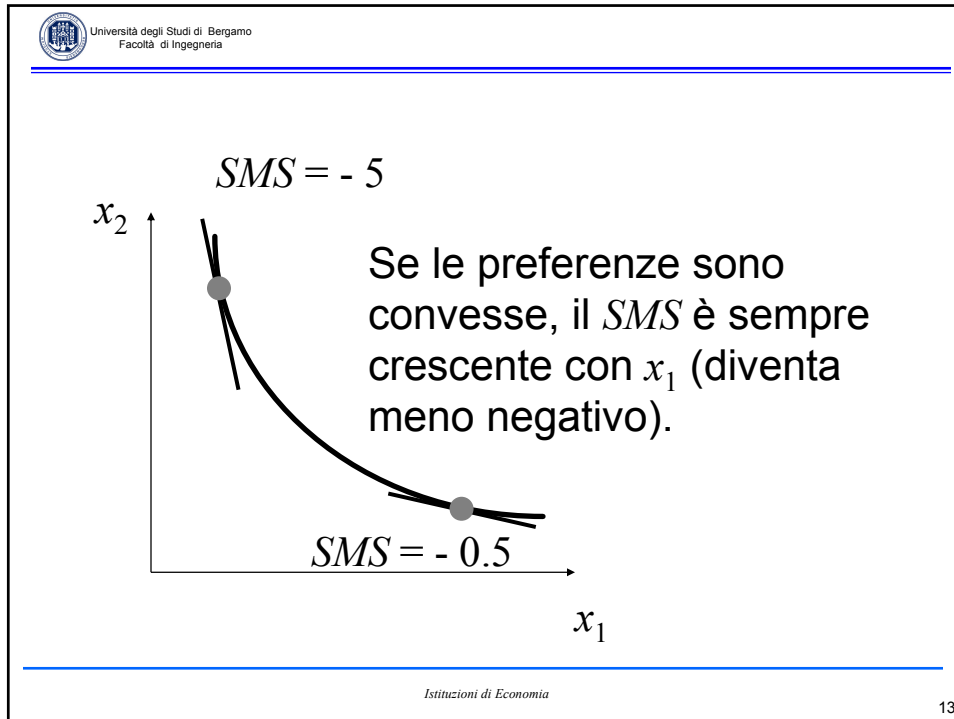
Nel punto  $x'$  è:

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{d x_2}{d x_1}$$


The graph is similar to the one above, but includes a small right-angled triangle at point  $x'$  to illustrate the slope. The vertical side of the triangle is labeled  $\Delta x_2$  and the horizontal side is labeled  $\Delta x_1$ . An arrow points from the text above to the triangle.

Istituzioni di Economia

12



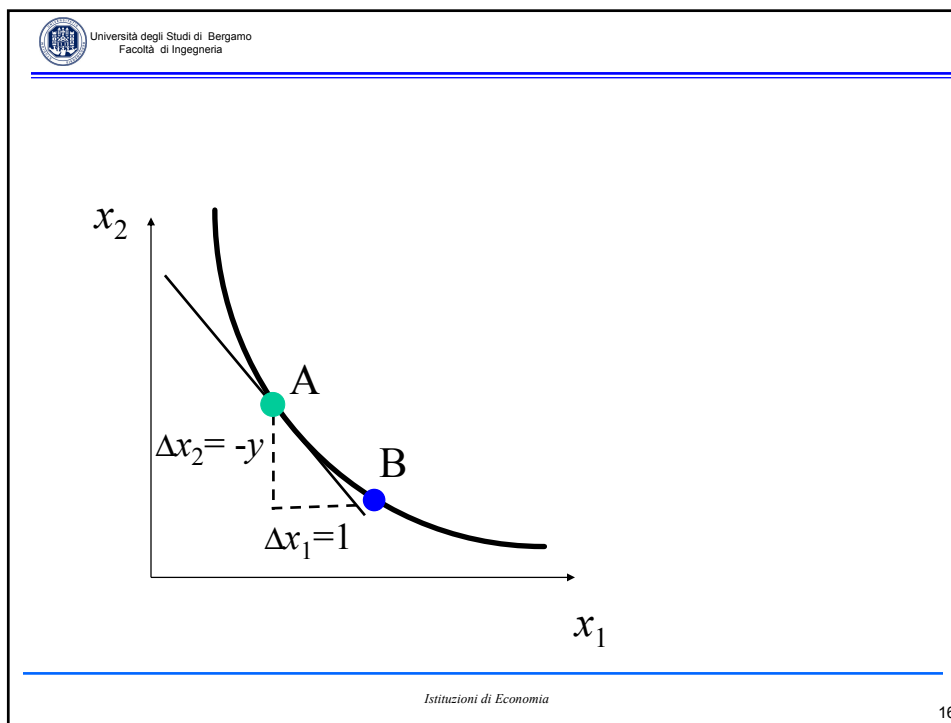
Università degli Studi di Bergamo  
Facoltà di Ingegneria

### Utilità marginali e saggio marginale di sostituzione

- Esiste una relazione (fondamentale!!) tra SMS ed utilità marginali.
- Consideriamo due panieri posti sulla stessa curva di indifferenza: A e B.
- Nel punto B è presente una unità in più del bene 1 ed “alcune” unità in meno del bene 2.
- Il SMS consente di determinare facilmente il numero di unità in meno di  $x_2$  che consentono di godere della stessa utilità.

Istituzioni di Economia

15







- L'utilità apportata da una unità in più del bene 1 è eguale alla riduzione di utilità connessa alla rinuncia al consumo di  $y$  unità del bene 2.
- Intuitivamente, l'utilità marginale di una unità di  $x_1$  è eguale a  $y$  volte l'utilità marginale di  $x_2$ .
- Ciò consente appunto di determinare  $y$ .

$$y = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = - \frac{UMg_1}{UMg_2}.$$



Il Saggio Marginale di Sostituzione (**SMS**) è esprimibile come **rapporto tra le utilità marginali** dei due beni, con segno cambiato.



- Segue una trattazione più formale.
- L'equazione generale per una curva di indifferenza è:

$$U(x_1, x_2) \equiv k, \text{ una costante.}$$

Il differenziale totale di questa espressione è:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0$$



$$\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

Risistemando si ottiene:

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = - \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1$$



Partendo da:

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = - \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1$$

con un passaggio si ottiene:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2}.$$

Questo è (di nuovo) il SMS.



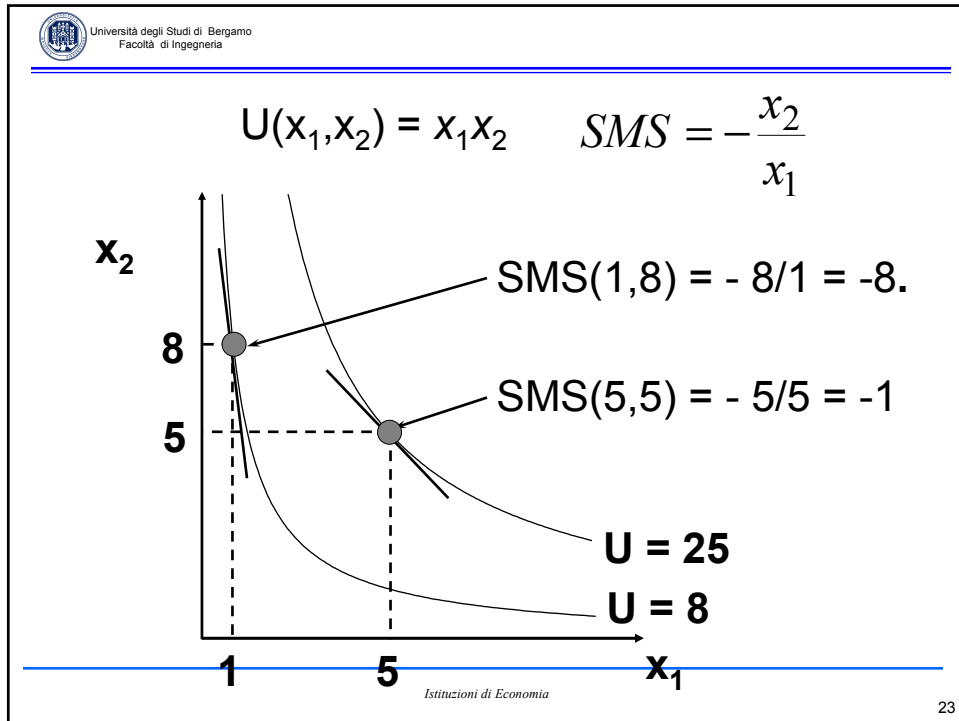
### Un esempio

- Supponiamo  $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$ . Quindi:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = (1)(x_2) = x_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = (x_1)(1) = x_1$$

per cui 
$$SMS = \frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2} = - \frac{x_2}{x_1}.$$



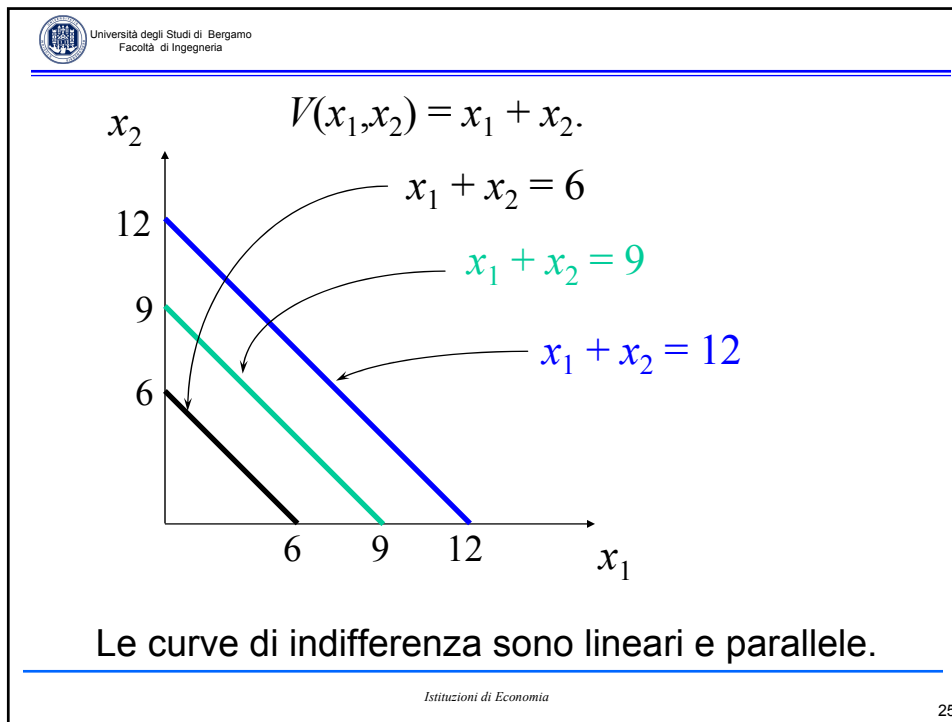
Università degli Studi di Bergamo  
Facoltà di Ingegneria

### Casi estremi I: perfetti sostituti

- Se, per un consumatore, i beni 1 e 2 sono equivalenti, allora i beni sono perfetti sostituti. Solo l'ammontare totale dei due beni nei panieri determina il loro ordine di preferenza.
- Esempio: *Coca Cola* e *Pepsi* (per alcuni consumatori!)
- La funzione di utilità è esprimibile come:
 
$$V(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$
- La generica curva di indifferenza presenta equazione:
 
$$x_1 + x_2 = k$$

Istituzioni di Economia

24



Università degli Studi di Bergamo  
Facoltà di Ingegneria

**Casi estremi II: perfetti complementi**

- Se un consumatore consuma sempre i beni 1 e 2 in proporzioni fisse (e.g. uno-a-uno), allora i beni sono complementi perfetti
- Esempi: paia di sci e paia di attacchi, pizza e birra (per alcuni consumatori!)
- Negli esempi solo il numero di coppie di unità dei due beni determina l'ordine di preferenza dei panieri.

Istituzioni di Economia

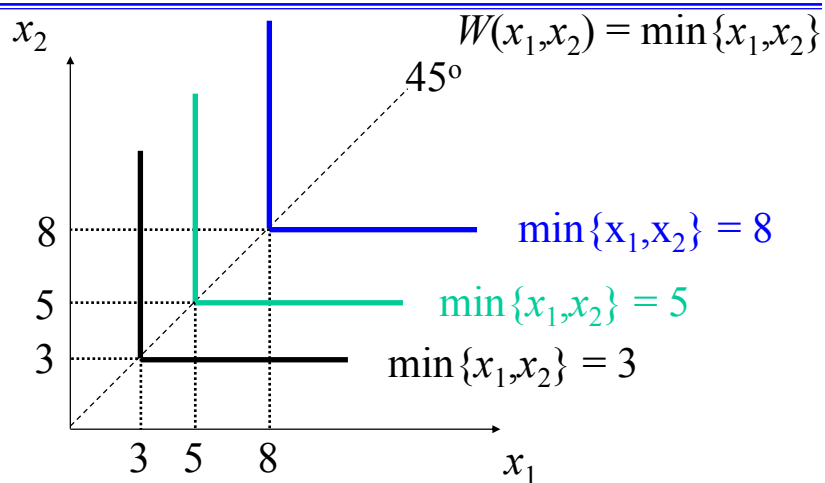
26



- La funzione di utilità per un caso di questo tipo è data da:

$$W(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}.$$

- Ad esempio, se  $x_1 > x_2$ , alcune unità di  $x_1$  vanno sprecate.
- L'idea è che non ci serve avere due paia di attacchi se possediamo un solo paio di sci
- Chiediamoci che forma presentano le curve di indifferenza per questi "perfetti complementi".



Hanno tutte la forma di una L (con vertice su un raggio dall'origine).

Università degli Studi di Bergamo  
Facoltà di Ingegneria

## Preferenze quasi lineari

- Una funzione di utilità con la forma:
 
$$U(x_1, x_2) = f(x_1) + x_2$$
 è lineare in  $x_2$  ed è chiamata quasi-lineare.
- E.g.  $U(x_1, x_2) = 2x_1^{1/2} + x_2$ .

Istituzioni di Economia

29

Università degli Studi di Bergamo  
Facoltà di Ingegneria

## Ogni curva è una copia, spostata verticalmente, delle altre.

Istituzioni di Economia

30