FISICA GENERALE - FORMULARIO di ELETTROMAGNETISMO

ELETTROSTATICA

Costante dielettrica nel vuoto $\varepsilon_0 = 8{,}85\text{x}10^{-12}\ C^2/Nm^2$

$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ = costante dielettrica assoluta; ε_r = costante dielettrica relativa

Legge di Coulomb nel vuoto: $\mathbf{F} = k\dfrac{q_1 \cdot q_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{r} = \dfrac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{r}$

con $k=1/4\pi\varepsilon_0$ = 8.89 x 10^9 Nm^2/C^2 ; $\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{r}$ = versore della distanza *r* fra le cariche

Campo elettrostatico: $\mathbf{E} \equiv \dfrac{\mathbf{F}}{\mathrm{q}}$

campo generato da una carica puntiforme *Q*: $\mathbf{E} = \dfrac{\mathbf{Q}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_0 r^2}}\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{r}$

Campo elettrico generato da una distribuzione discreta di cariche:

$$\mathbf{E} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{q_i}}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{r_i^2}}\hat{\mathbf{u}}_\mathrm{i}$$

Campo generato da distribuzioni continue di carica

- distribuzione di carica di densità volumetrica $\rho = \dfrac{dq}{dV}$:

  $$\mathbf{E} = \int \frac{\rho(\mathrm{r})\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dV$$

- distribuzione di carica di densità lineare $\lambda = \dfrac{Q}{l}$: $\mathbf{E} = \dfrac{\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{2\pi\varepsilon_0 r}}\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{r}$
- distribuzione di carica σ su una superficie **isolante** piana: $\mathbf{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}}$

  con $\hat{\mathbf{n}}$ = versore della normale al piano
- distribuzione di carica σ su una superficie **conduttrice** piana:

  $$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}}$$

Legge di Gauss

Forma integrale (Σ superficie chiusa); $\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = \oint_\Sigma \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\mathrm{d}S = \dfrac{\mathrm{Q_{int}}}{\varepsilon_0}$

Forma differenziale: $\mathbf{divE} = \nabla\cdot\mathbf{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

Lavoro ed energia del campo elettrico

Lavoro della forza elettrica su una carica *q*: $L = \mathrm{q}\int_\mathrm{i}^\mathrm{f} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}$;

$$L_{A\to B} = U_A - U_B = -(U_B - U_A) = -\Delta U$$

Densità d'energia associata al campo elettrico:

$$u = \frac{Energia}{Volume} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\, \varepsilon_r (E)^2$$

Energia potenziale elettrostatica di due cariche:

$$L = U_p = q_p \int_\infty^r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q_p q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Potenziale elettrostatico

Definizione: $V = \frac{U}{q}$;

Potenziale in un punto generato da n cariche *q*: $V(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$

Differenza di potenziale fra due punti: $V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}$

In un campo E generato dalla carica puntiforme *Q*:

$$V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$$

Relazione fra il campo elettrico e il gradiente del potenziale:

$$\mathrm{E}\,(x, y, z) = -\mathbf{grad}V = -(\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{u_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{u_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{u_z})$$

Dipolo elettrico

Momento di dipolo elettrico: $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$

Energia potenziale del dipolo elettrico: $\mathrm{U_e} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -Ep\cos\vartheta$

Momento meccanico agente sul dipolo immerso in un campo elettrico:

$$\mathbf{M_e} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

Condensatori

Capacità del condensatore: $C \equiv \frac{Q}{V}$

Capacità di un condensatore piano: $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$

(area *S*, vuoto fra le armature a distanza *d*)

Capacità di un condensatore sferico di raggio *R*: $C = 4\pi\varepsilon_0 R$

Capacità di un condensatore cilindrico di lunghezza *l* raggio interno R_i ed raggio esterno R_e: $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ri}})}$

Capacità di un condensatore con dielettrico fra le armature:

$$C_d = \varepsilon_r C$$

Campo elettrico all'interno di un condensatore piano $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}}$

Potenziale di un condensatore piano: $V=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathrm{d}$

Capacità di N condensatori in serie: $C=\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{C_i}}$

Capacità N condensatori in parallelo: $C=\sum_{i=1}^{N} C_i$

Energia potenziale di un condensatore: $U=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

Suscettività dielettrica: $\chi_e=\varepsilon_r-1$

Polarizzazione di un dielettrico: $\mathbf{P}=\varepsilon_0\chi\mathbf{E}$

Correnti stazionarie

Intensità di corrente elettrica $i=\frac{dq}{dt}$

Densità di corrente in un filo di sezione *S* percorso dalla corrente *I*: $j=\frac{I}{S}$

I legge di Ohm: $i=V/R$

II legge di Ohm: $R=\rho l/S$

I legge di Kirchhoff (Equazione al nodo): $\sum_{\mathrm{i}} i_{\mathrm{i}}=0$ $(\sum_{\mathrm{i}} i_{\mathrm{i}}(\text{entranti})=\sum_{\mathrm{j}} i_{\mathrm{j}}(\text{uscenti}))$

II legge di Kirchhoff (Equazione alla maglia): $\sum_{\mathbf{i}} V_i=0$ $(\sum_{\mathrm{i}} V_{gi}=\sum_{\mathrm{i}} i_j R_j)$

N Resistenze in serie: $R=R_1+R_2+R_3\ldots R_N$;

N Resistenze in parallelo: $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\ldots\frac{1}{R_N}$

Potenza elettrica: $P=Vi=i^2R=\frac{V^2}{R}$

Circuiti RC

Costante di tempo: $\tau=RC$

Soluzione equazione differenziale di primo ordine transitori:

$$y(t)=Y_{finale}-(Y_{finale}-Y_{iniziale})e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Carica di un condensatore inizialmente scarico: $V_C(t)=V_G(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$;

Scarica del condensatore con $V_C(0) = V_{in}$: $V_C(t) = V_{in} e^{-\frac{t}{\tau}}$

MAGNETISMO

Permeabilità magnetica nel vuoto $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$

Campo generato da una carica in moto: $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} q\mathbf{v} \times \widehat{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{r}}$

Campo generato da una corrente *I*: $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l} \times \widehat{\mathbf{u}_r}}{r^2}$ (Legge di Ampère-Laplace)

Campo generato da un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente *i* in un punto P distante *r* dal filo:

$\mathbf{B}_{filo} = \mu_0 \frac{i}{2\pi r} \widehat{\mathbf{u}_\iota} \times \widehat{\mathbf{u}_r}$ Legge di Biot- Savart;

$\widehat{\mathbf{u}_\iota}$ rappresenta il versore della corrente *i*, $\widehat{\mathbf{u}_r}$ il versore del raggio *r*,
$\widehat{\mathbf{u}_\iota} \times \widehat{\mathbf{u}_r}$ individua la direzione tangente alla circonferenza di raggio *r*.

Campo magnetico generato da una spira di raggio *R* lungo l'asse **k**:

$$\mathbf{B}_z = \mu_0 I \frac{R^2}{2\sqrt{(R^2+z^2)^3}} \widehat{\boldsymbol{k}}$$

Campo all'interno di un solenoide indefinito: $\mathbf{B} = \mu_0 \mathrm{n} I$;

dove $\mathrm{n} = \frac{N(spire)}{L(solenoide}$

Teorema di Ampère (forma integrale): $\oint_\Gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_{concatenate}$ (Γ linea chiusa)

Definizione di rotore

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Teorema di Stokes: $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_\Sigma (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$

Teorema di Ampère in forma differenziale: $\mathrm{rot}\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$

Forze magnetiche

Legge di Laplace: $\mathbf{F} = I\int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$; $\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$

Forza tra correnti: $|\mathrm{F}| = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi}\frac{l}{d}$

Momento di dipolo magnetico di una spira: $\mathbf{m} = iS\hat{\mathbf{n}}$

Momento meccanico agente su una spira piana: $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$

Forza di Lorentz: $\mathbf{F} = \mathrm{q}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$

Induzione elettromagnetica

Forza elettromotrice indotta $f.e.m. = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$

Definizione di induttanza: $L = \frac{\Phi(B_{autoind})}{i}$

Induttanza di un solenoide (bobina con N spire, sezione *A* e lunghezza *l*; μ_r= permeabilità magnetica del traferro): $L = \frac{\Phi(\mathrm{B})}{i} = \mu_0\mu_r\frac{N^2A}{l}$

Circuito RL

Costante di tempo in un circuito RL: $\tau = \frac{L}{R}$

Transitorio alla chiusura del circuito: $i(t) = \frac{V_g}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

Transitorio all'apertura del circuito: $i(t) = \frac{V_g}{R}\left(e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

Circuiti RLC in regime sinusoidale

Impedenza circuito puramente capacitivo $\boldsymbol{X_C} = \frac{\mathbf{1}}{\omega C}$;

impedenza complessa: $\boldsymbol{Z_C} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{j}\omega C} = \frac{-\boldsymbol{j}}{\omega C}$

Impedenza circuito puramente induttivo $\boldsymbol{X_L} = \omega L$;

impedenza complessa: $\boldsymbol{Z_L} = \boldsymbol{j}\omega L$;

Circuito RLC

$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$;

impedenza complessa: $\mathrm{Z} = \mathrm{R} + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$;

Angolo di sfasamento: $\varphi = arctang\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}$

Valore efficace di un segnale periodico

Valore medio $V_{DC} = \langle V(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)dt$

Valore efficace $V_{eff} = V_{RMS} = \sqrt{\langle V^2(t)\rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V^2(t)dt}$

$$V_{eff=} = \sqrt{{V_{AC}}^2 + {V_{DC}}^2}$$

ONDE ELETTROMAGNETICHE

Equazioni di Maxwell

Forma differenziale

a) $\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$;

b) $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$

c) $\mathrm{Rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$;

d) $\mathrm{Rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$;

Forma integrale

a) $\phi(\mathbf{E}) = \oint_\Sigma \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$;

b) $\phi(\mathbf{B}) = \oint_\Sigma \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = 0$;

c) $\oint_\Gamma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\oint_\Sigma B\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$

d) $\oint_\Gamma \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\oint_\Sigma \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$

Equazioni di Maxwell nel vuoto in assenza di cariche e correnti:

a) $\mathrm{div}\mathbf{E} = 0$; b) $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ c) $\mathrm{Rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ d) $\mathrm{Rot}\mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$

Relazione tra i moduli dei vettori campo elettrico e magnetico: $E = cB$

numero d'onda: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$; frequenza $\nu = \frac{c}{\lambda}$

Velocità della luce nel vuoto: $\mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

Velocità delle onde elettromagnetiche in un mezzo: $\mathbf{v} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

Vettore di Poynting: $\mathbf{S} \equiv \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\mathbf{D}\times\mathbf{H}}{\varepsilon} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$

Densità di energia associata a un'onda elettromagnetica nel vuoto

$$u_{tot} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

Intensità di energia (Radianza)

$$I = \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{Potenza}{area} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c {E_0}^2$$

Pressione di radiazione su uno schermo perfettamente riflettente: $p = \frac{2I}{c}$

Pressione di radiazione su uno schermo perfettamente assorbente: $p = \frac{I}{c}$

Interferenza di onde elettromagnetiche

Interferenza prodotta da due fenditure distanti *d* su uno schermo distante *L* dalle fenditure (L>>d, angoli ϑ piccoli):

Interferenza costruttiva: $\delta = r_2 - r_2 = dsin\vartheta \approx d\vartheta = m\lambda$

Posizioni dei massimi di intensità luminosa sullo schermo: $y = L\frac{m\lambda}{d}$

Intensità luminosa sullo schermo: $I_{tot} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}cos\Delta\phi$

Diffrazione di Fraunhofer (fenditura di larghezza *a*)

Minimi di intensità: $sin\vartheta_{min} = m\frac{\lambda}{a}$

Posizione sullo schermo dei minimi: $y_{min} = L\frac{m\lambda}{a}$

Diffrazione da apertura circolare (diametro D)

ϑ min = angolo che individua il primo minimo: $\vartheta_{min} = 1.22\frac{\lambda}{D}$

Posizione sullo schermo del primo minimo: $y_{min} = \theta_{min}L = 1.22\frac{\lambda}{D}L$

Polarizzazione per assorbimento

$I_P = I_0 \cos^2\theta$ (legge di Malus)

OTTICA GEOMETRICA

Indice di rifrazione di un mezzo trasparente: $n = \frac{c}{v} \geq 1$

Legge della riflessione: $\theta_i = \theta_r$

Legge di Snell della rifrazione: $n_1 sen\theta_i = n_2 sen\theta_t$

Legge del diottro sferico $\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{r}$

Leggi dei punti coniugati per raggi parassiali e ingrandimento

Specchi concavi e convessi

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{1}{f} = -\frac{2}{R}$$

Ingrandimento: $I = -\frac{q}{p}$

Lenti sottili:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Ingrandimento: $I = \frac{q}{p}$