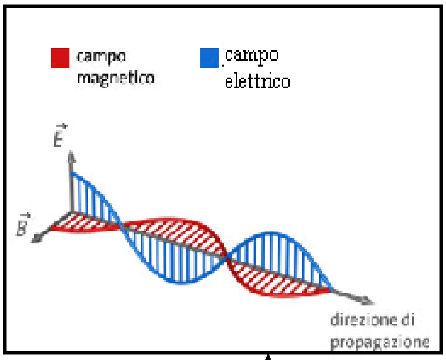
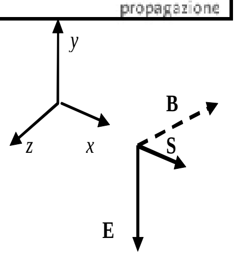
ONDE ELETTROMAGNETICHE

Gb1. Si consideri un'onda elettromagnetica piana sinusoidale che si propaga nel vuoto nella direzione positiva dell'asse x. La lunghezza d'onda è 50.0 m e l'ampiezza massima del campo elettrico è 22.0 V/m. Calcolare:
a) la frequenza dell'onda;
b) il modulo, la direzione, il verso del campo magnetico nell'istante in cui il campo elettrico è massimo ed è diretto nel verso negativo dell'asse y. c) Scrivere l'espressione del campo magnetico nella forma $B = B_{max}\cos(kx-\omega t)$, determinando i valori numerici di B_{max}, k e ω.





Soluzione.
a) La velocità dell'onda è pari a c, quindi da

$$c = \nu\lambda$$

si ottiene la frequenza ν:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3(10^8)\text{m/s}}{50.0\text{m}} = 6(10^6)\text{Hz}$$

b) Dato che $c = \dfrac{E}{B}$, si ha: $B = \dfrac{E}{c} = \dfrac{22.0\text{ V/m}}{3(10^8)\text{m/s}} = 73.3\text{nT}$

Per determinare la direzione di **B**, consideriamo il sistema di assi cartesiani in figura e il vettore di Poynting **S**, definito da $\mathbf{S} = \dfrac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0}$, la cui direzione coincide con la direzione di propagazione dell'onda, che in questo caso è + **i**. Se il campo **E** è diretto come **–j**, applicando la regola della mano destra per il prodotto vettoriale, si vede che **B** deve essere diretto come **–k**.
c)

$$B = B_{\max}\cos(kx - \omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{50.0\text{m}} = 0.126\text{rad/m}$$

$$\omega = 2\pi\nu = (2\pi\,\text{rad})(6.00\cdot 10^6\,\text{Hz}) = 3.77\cdot 10^7\,\text{rad/s}$$

$$B = (73.3\text{nT})\cos[(0.126\text{rad/m})x - (3.77\cdot 10^7\,\text{rad/s})t]$$

Gb2. Un'antenna della potenza di 25 W emette radiazioni elettromagnetiche di frequenza 1800 MHz, in tutte le direzioni. Un ricevitore metallico piano di area 2 cm^2 (e spessore trascurabile) è posto a 1200 m di distanza.
a) Calcolare la lunghezza d'onda della radiazione.
b) Calcolare l'energia che arriva sul ricevitore in un'ora nei tre casi (b1) il suo piano è perpendicolare alla retta che lo congiunge con l'antenna; (b2) il piano è ruotato di 30° rispetto alla posizione precedente; (b3) il piano è ruotato di 90°.

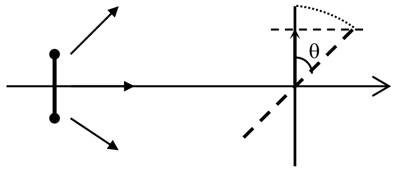
Soluzione.
a) La lunghezza d'onda si ricava facilmente sapendo che la velocità della luce è c = 3(10^8) m/s:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3(10^8)\text{m/s}}{1800(10^6)\,\text{s}^{-1}} = 0.167\,\text{m}$$

b1) La potenza emessa dall'antenna si distribuisce uniformemente in tutte le direzioni, e quindi con simmetria sferica. L'intensità (potenza per unità di superficie) a distanza L vale allora $I = P/4\pi L^2$ (essendo $4\pi L^2$ la superficie della sfera). La potenza che investe il ricevitore di area A è data da $P_1 = IA = PA/4\pi L^2$. L'energia che arriva sul ricevitore di area A nell'intervallo di tempo Δt (quando il ricevitore è perpendicolare al flusso di energia proveniente dall'antenna) sarà dunque:

$$E_1 = \Delta t \cdot A \cdot \frac{P}{4\pi L^2} = 3600\,\mathrm{s} \cdot 2(10^{-4})\,\mathrm{m}^2 \cdot \frac{25\,\mathrm{W}}{4\pi \cdot (1200\,\mathrm{m})^2} = 1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{J} = 1\,\mu\mathrm{J}$$

b2) Quando il ricevitore è ruotato di 30° rispetto alla perpendicolare alla retta congiungente l'antenna e il ricevitore, la sua superficie efficace nel raccogliere l'energia diminuisce del fattore $\cos(30°)$, quindi l'energia è data da:



$$E_2 = E_1 \cos(30°) = 0.86\,\mu\mathrm{J}$$

b3) Nel caso in cui il ricevitore sia parallelo alla direzione congiungente (angolo di 90° con la perpendicolare) si ha:

$$E_3 = E_1 \cos(90°) = 0\,\mu\mathrm{J}\,;$$

come ci si aspetta, il ricevitore non raccoglie energia.

Gb3. Misure accurate indicano che l'intensità di energia solare incidente sulla Terra ha valore medio pari a 1340 W/m^2, e il massimo dell'energia elettromagnetica viene emessa alla lunghezza d'onda di 510 nm. In base a questi dati e sapendo che la distanza Terra – Sole vale mediamente 1.5 (10^{11}) m, calcolare:
a) la potenza totale irradiata dal Sole;
b) la frequenza alla quale si ha la massima energia emessa.

Soluzione.
a) La potenza irradiata dal Sole si distribuisce nello spazio, uniformemente a simmetria sferica, quindi alla distanza r dal Sole l'intensità (potenza per unità di superficie) è pari a $P/4\pi r^2$. Conoscendo l'intensità I_T ricevuta dalla Terra possiamo ricavare la potenza totale irradiata dal Sole:

$$P = I_T \cdot 4\pi \cdot r^2 = 1340\ \mathrm{W/m^2} \cdot 4\pi \cdot \left[1.5(10^{11})\right]^2\ \mathrm{m}^2 = 3.8(10^{26})\,\mathrm{W}$$

b) La frequenza alla quale si ha il massimo dell'energia emessa si ricava dalla relazione fondamentale:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3(10^8)\,\mathrm{m/s}}{510(10^{-9})\,\mathrm{m}} = 5.9(10^{14})\,\mathrm{s}^{-1} = 5.9(10^{14})\,\mathrm{Hz}$$

valore che è al di là di qualsiasi possibilità di misura diretta!

Gb4. Una lampada emette luce con potenza di 1000 W. Il campo elettrico a una distanza d = 10 m dalla lampada ha una ampiezza massima di circa:

(A) 1.7 V/m (B) 12.8 V/m **(C) 24.5 V/m** (D) 34.6 V/m (E) indeterminata

Soluzione. L'intensità luminosa è il rapporto fra la potenza e la superficie sferica di raggio d = 10 m ed è proporzionale al quadrato dell'ampiezza del campo elettrico.

$$I = \frac{W}{4\pi d^2} = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad E_0 = \sqrt{\frac{W}{2\pi c\varepsilon_0 d^2}} \cong 24.5\mathrm{V/m}$$

Gb5. L'equazione del campo elettrico di un'onda piana propagantesi in un mezzo materiale lungo l'asse delle *z* è

$$E_x = \left(10^2\ \mathrm{V/m}\right)\sin\left(2\pi\left(4.55\times10^{14}t - 2.02\times10^6 z\right)\right)$$

dove il tempo *t* è in secondi e *z* in metri. Calcolare:
a) la frequenza dell'onda;
b) la lunghezza d'onda;
c) la velocità di propagazione dell'onda.
[$\nu = 4.55(10^{14})$ Hz; $\lambda = 495$ nm; v = 2.25 (10^8) m/s]

Gb6. Un'onda elettromagnetica polarizzata in una direzione parallela all'asse *y*, si propaga nella direzione positiva dell'asse *x* con velocità v = 2(10^8) m/s e lunghezza d'onda $\lambda = 300$ nm; la sua frequenza è di

(A) 5.0(10^{14}) Hz **(B) 6.7(10^{14}) Hz** (C) 6.9(10^{14}) Hz (D) 8.3(10^{14}) Hz (E) _______

Gb7. Le componenti elettriche e magnetiche dell'onda di cui al problema precedente sono espresse dalle relazioni

(A) $E_y = E_0\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-\mathrm{v}t)\right), B_z = -\frac{E_0}{\mathrm{v}}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-\mathrm{v}t)\right)$

(B) $E_y = E_0\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-\mathrm{v}t)\right), B_z = \frac{E_0}{\mathrm{v}}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-\mathrm{v}t)\right)$

(C) $E_y = E_0\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-\mathrm{v}t)\right), B_z = -\frac{E_0}{\mathrm{v}}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-\mathrm{v}t)\right)$

(D) $E_y = E_0\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)\right), B_z = \frac{E_0}{c}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)\right)$

(E) $E_y = E_0\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)\right), B_z = \frac{E_0}{c}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x+ct)\right)$

Gb8. Un laser commerciale emette un fascio cilindrico di radiazione elettromagnetica il cui diametro è 2.0 mm, la cui lunghezza d'onda $\lambda = 556$ nm e la cui potenza è 5.0 mW.
a) Qual è la frequenza della radiazione emessa dal laser?
b) Quanto vale l'intensità del fascio emesso?
c) Qual è il massimo valore del modulo del campo elettrico *E* di questa radiazione?
[$\nu = 5.4$ (10^{14}) Hz; $I = 1.592$ kW/m^2; $E_{max} = 1095$ V/m]

Gb9. Un raggio laser nel vuoto ha una potenza di 0.8 mW e una sezione di 2 mm^2. La massima ampiezza del campo elettrico è di

(A) 549 V/m (B) 516 V/m (C) 3.01(10^5) V/m (D) 776 V/m (E)_______

Gb10. Un telefono cellulare emette microonde di frequenza 900 MHz, con una potenza massima di 240 mW. Sapendo che il limite di sicurezza per l'irraggiamento di onde elettromagnetiche sul corpo umano (oltre il quale possono manifestarsi danni biologici) è fissato dalla legge e corrisponde ad una intensità di 60 mW/m^2, a quale distanza dalla testa bisognerebbe tenere il cellulare, nella semplice ipotesi che l'emissione fosse a simmetria sferica?

(A) 10 m **(B) 0.56 m** (C) 1 m (D) 1 cm (E) 0.56 cm

Gb11. Una lampada emette luce con potenza di 30 W che si propaga a simmetria sferica. Il campo elettrico a una distanza di 2 m dalla sorgente ha un'ampiezza massima di circa:

(A) 21 V/m (B) 35 v/m (C) 42 V/m (D) 69 V/m (E)_________

FOTONI

Hb1. Un raggio luminoso con lunghezza d'onda λ = 500 nm (luce verde) è caratterizzato da un campo elettrico di ampiezza E_0 = 20 V/m. Il numero di fotoni che incidono in un secondo sulla superficie di un metro quadrato è di
(ε_0 = 8.85(10^{-12}) F/m, h = 6.63 (10^{-34}) J·s):

(A) 2.67(10^{18}) (B) 3140 (C) 1.66(10^{16}) (D) 5.34(10^{15}) **(E) 1.33(10^{18})**

Soluzione. La densità di energia media associata al campo elettrico oscillante di ampiezza E_0 è:

$$< \text{densità di energia media} >= \frac{1}{2}\varepsilon_0 < E^2 >= \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2$$

Quella associata al campo magnetico di ampiezza $B_0 = E_0/c$ è:

$$< \text{densità di energia media} >= \frac{1}{2\mu_0} < B^2 >= \frac{1}{4\mu_0} B_0^2 = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2$$

La densità di energia media totale è quindi data dalla somma delle densità medie:

$$< \textit{densità di energia totale} >= 2 \cdot \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$$

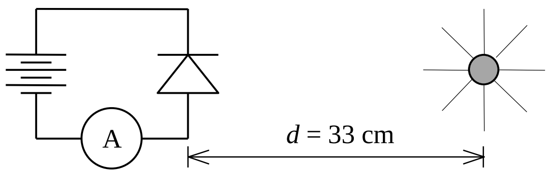
L'intensità luminosa I è pari alla densità di energia totale per la velocità della luce e, anche, al numero N di fotoni al m^2·s moltiplicato per l'energia di un fotone $h\nu$:

$$I = Nh\nu = Nh\frac{c}{\lambda} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 c}{2}$$

Da queste relazioni si ottiene il valore di N:

$$N = \frac{\lambda \varepsilon_0 E_0^2}{2h} \cong 1.33(10^{18}) \text{ fotoni/m}^2 \cdot \text{s}$$

Hb2. Nel circuito della figura, un fotodiodo con una superficie sensibile $S_d = \pi(0.2 \text{ mm})^2$ è posto alla distanza d = 33 cm da una lampada al sodio che emette luce di lunghezza d'onda λ = 589 nm. Assumendo che ogni fotone ricevuto dal fotodiodo permetta il passaggio di un elettrone nel circuito, se l'amperometro misura una corrente i = 2.7 μA, la potenza luminosa W della lampada al sodio è di circa:



(A) 560 W (B) 1.78 kW (C) 18 W **(D) 62 W** (E) 0.62 W

Soluzione. L'intensità luminosa $I_l(d)$ alla distanza d può essere espressa dal rapporto fra la potenza della lampada e la superficie sferica di raggio d, ma anche dall'energia dei fotoni che colpiscono in un secondo una superficie unitaria:

$$I_l(d) = \frac{W}{4\pi d^2} = \frac{n}{\Delta t \cdot S_{diodo}} \frac{hc}{\lambda}$$

Poiché il numero n di fotoni che raggiungono il fotodiodo è pari al numero di elettroni nel circuito e la corrente è: $i = \frac{ne}{\Delta t}$, ricavando $\frac{n}{\Delta t}$ e sostituendolo nell'espressione precedente, si ottiene il valore della potenza, cioè:

$$W = \frac{i}{eS_{diodo}} \frac{hc}{\lambda} 4\pi d^2 = 62\,\text{W}$$

Hb3. L'intensità della radiazione solare sulla Terra è pari a $I \approx 1$ kW/m^2 e il raggio medio della Terra è $r_T \approx 6350$ km. Assumendo che tutta la radiazione solare sia assorbita dalla Terra, la forza con la quale la radiazione solare respinge la Terra è pari a circa:

(A) 1.7(10^9) N (B) 8.4(10^8) N **(C) 4.2(10^8) N** (D) 3.14 GN (E) 9.8 GN

Soluzione. Ogni fotone solare di energia $h\nu$ trasferisce alla Terra la quantità di moto $h\nu/c$. Se, in un tempo Δt e su una superficie ΔS, vengono assorbiti n fotoni solari la pressione esercitata dalla radiazione è pari alla quantità di moto trasferita divisa per il tempo e la superficie:

$$p_{\text{radiazione}} = \frac{nh\nu}{c\Delta t\Delta S}$$

Poiché l'intensità I della radiazione è $I = \dfrac{nh\nu}{\Delta t\Delta S}$, la pressione di radiazione diventa: $p_{\text{radiazione}} = \dfrac{I}{c}$.

La forza esercitata sulla Terra dalla radiazione solare si ottiene moltiplicando la pressione di radiazione per l'area della sezione massima della Terra:

$$F = p_{\text{radiazione}} \pi r_T^2 = \frac{I}{c} \pi r_T^2 = 4.2(10^8)\,\text{N}$$

Hb4. L'energia di un fotone con $\lambda = 100$ nm espressa in elettronvolt (eV) vale:

(A) 0.63 eV (B) 8.83 eV **(C) 12.5 eV** (D) 31.4 eV (E) 62.6 eV

Hb5. Un fotone con una energia di 2 eV nel vuoto ha una lunghezza d'onda pari a circa:

(A) 620 nm (B) 500 nm (C) 496 nm (D) 413 nm (E) 396 nm

Hb6. Una sorgente con una potenza di 100 W emette luce a una lunghezza d'onda di 500 nm. Quanti fotoni vengono emessi al secondo?

(A) 8.37(10^{20}) (B) 16.64(10^{20}) **(C) 2.51(10^{20})** (D) 5.02(10^{20}) (E) ________

Hb7. Una lampada al sodio (λ =589 nm) di potenza 0.1 W emette un fascio luminoso che colpisce la giunzione di un diodo. Assumendo che ogni fotone incidente liberi un elettrone nella giunzione, la corrente che attraversa il diodo è di circa:

(A) 47 mA (B) 95 mA (C) 470 mA (D) 4.74 A (E) ________

Hb8. Uno schermo riflettente colpito da 5(10^{26}) fotoni al secondo prodotti da una sorgente laser è sottoposto a una forza di 1 N. La lunghezza d'onda dei fotoni è di:

(A) 663 nm (B) 132 nm (C) 66.3 nm (D) 331 nm (E) ______