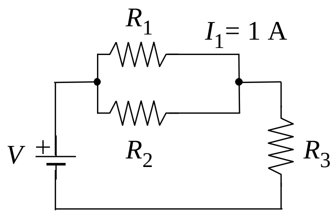
CIRCUITI ELETTRICI

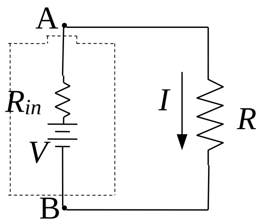
Cb1. Nel circuito della figura si ha $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$ e $R_3 = 3\ \Omega$ e nella resistenza R_1 passa una corrente di 1 A .Il voltaggio V ai capi della batteria vale



(A) 5 V (B) 10.5 V (C) 21.0 V
(D) 24 V (E)_________

Soluzione Ai capi di R_1 vi è un voltaggio $V_1 = I_1R_1 = 5$ V; perciò in R_2 fluisce una corrente $I_2 = 5\text{V}/R_2 = 2.5$ A e nella resistenza R_3 passa la somma delle correnti I_1 e I_2; $I_3 = I_1 + I_2 = 3.5$ A. La caduta di tensione ai capi di R_3 è perciò $V_3 = I_3R_3 = 10.5$ V e il voltaggio richiesto è
$V = V_1 + V_3 = 15.5$ V. La soluzione deve essere scritta in (E)

Cb2. Una batteria può essere schematizzata come un generatore di tensione V in serie a una resistenza interna R_{in}. Quando la resistenza esterna vale $R_1 = 2\ \Omega$ si misura una corrente $I_1 = 2.4$ A; quando la resistenza esterna vale $R_2 = 4.5\ \Omega$ la corrente misurata si riduce a $I_2 = 1.2$ A. La resistenza interna vale all'incirca

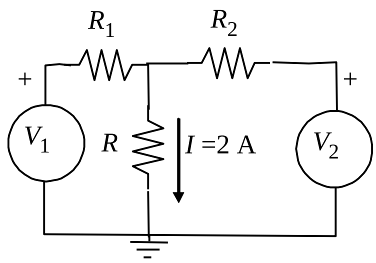


(A) 0.1 Ω (B) 0.2 Ω **(C) 0.5 Ω**
(D) 0.67Ω (E) 1.0 Ω

Soluzione Nel circuito la resistenza interna è in serie alla resistenza esterna R; possiamo scrivere l'equazione della maglia mantenendo nei due casi costanti V e R_{in} e variando R e I:

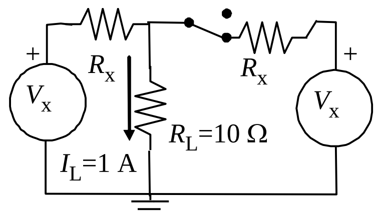
$$\begin{cases} V = (R_{in} + R_1)I_1 \\ V = (R_{in} + R_2)I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{in} = \dfrac{R_2 I_2 - R_1 I_1}{I_1 - I_2} = 0.5\Omega \\ V = (R_{in} + R_1)I_1 = 6\text{V} \end{cases}$$

Cb3. Due batterie nominalmente uguali ma stato di carica diversa, una con $V_1 = 6.0$ V e resistenza interna $R_1 = 1\ \Omega$, l'altra $V_2 = 5.9$ V e resistenza interna $R_2 = 2\ \Omega$, sono connesse in parallelo ad una resistenza incognita R in cui fluisce una corrente di intensità 2 A. Il valore di R è



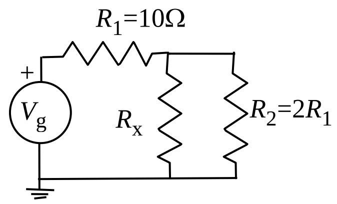
(A) 2.32 Ω (B) 2.00Ω (C) 1.58 Ω
(D) 2.89 Ω (E)______

Cb4. Quando due batterie di uguale fem (V_x) e resistenza interna (R_x) sono contemporaneamente collegate ad un carico con R_L= 10 Ω in questo circola una corrente I_L=1 A. Quale deve essere V_x perché in R_L circoli I'_L= 0.95 A quando una delle batterie viene scollegata?



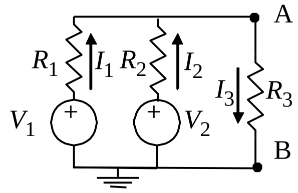
(A) 24.2 V **(B) 10.56 V** (C) 9.8 V
(D) 11 V (E)________

Cb5. Se la caduta di tensione su R_1 è di 10 V e V_g = 15 V, allora R_x è circa uguale a



(A) 5 Ω (B) 10 Ω (C) 15 Ω
(D) 6.7 Ω (E) _______

Cb6. Nel circuito della figura si ha R_1 = 3 Ω , R_2 = 6 Ω, R_3 = 9 Ω. Se V_2 = 6 V e la differenza di potenziale tra A e B è V_{AB} = 4V la tensione V_1 vale

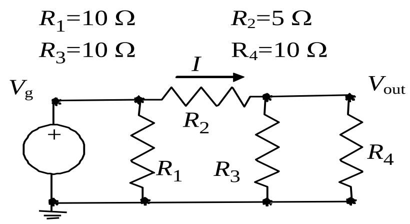


(A) 4 V **(B) 4.33 V** (C) 1.5 V
(D) 0.33 V (E) _______

Cb7. Nel problema precedente la potenza erogata dal generatore V_1 vale (segno negativo = potenza assorbita)

(A) –4/9 W (B) –0.17 W (C) 4/9 W (D) 2.67 W **(E) 0.48 W**

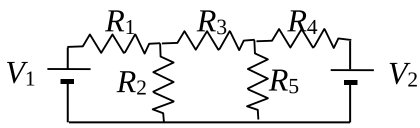
Cb8. Nel circuito della figura, se V_{out} = 2.5 V; il voltaggio V_g del generatore vale



(A) 5 V (B) 7.5 V (C) 10 V
(D) 15 V (E)_____ V

POTENZA ELETTRICA

Cc1. Nel circuito della figura le resistenze valgono R_1 = 4 Ω, R_2 = 2 Ω,R_3 = 3 Ω, R_4 = 1 Ω,R_5 = 2 Ω. Se la potenza erogata dal generatore V_1 = 6V è di 6 W, il voltaggio V_2 vale



(A) 2 V **(B) 3 V** (C) 4 V
(D) 6 V (E) _____

Soluzione. Questo problema va risolto con passaggi successivi.

- Da potenza e V_1 si ha la corrente in R_1: $I_1=W/V_1$ (1 A)
- Si calcola la differenza di potenziale V' ai capi di R_2: $V'=V_1-I_1\mathrm{R}_1$ (2V)
- Si calcola la corrente in R_2: $I_2=V'/R_2$ (1A)
- Dalla differenza delle correnti I_1 e I_2 si ha la corrente uscente dal nodo $I_3=I_1-I_2$ (0A)
- Si calcola la differenza di potenziale V'' ai capi di R_5 da: $V''=V'-I_3R_3$ (2V)
- Si calcola $I_5=V''/R_5$ (1A)
- La corrente entrante nel nodo è $I_4= I_5-I_3$ (1 A)
- Il risultato è $V_2=V''+I_4R_4$ (3V)

Cc2. Con riferimento al problema precedente, la potenza erogata dal generatore V_2 vale
(A) 2 W **(B) 3 W** (C) 4 W (D) 6 W (E) _____
Soluzione. La potenza richiesta è $W = V_2I_4$ = 3 W

Cc3. Una centrale idroelettrica eroga una potenza W_{tot} di $2(10^5)$ W a una fabbrica distante 5 km. La linea elettrica è costituita da due cavi di rame (resistività del rame $1.7(10^{-8})$ Ωm) di sezione S = 1 cm^2 e lunghezza complessiva $l = 10^4$ m. Calcolare il rapporto delle potenza dissipata nei cavi quando la linea è alimentata a 1000 V e quando la linea è alimentata a $V = 10^4$ V.

(A) 0.1 (B) 1 (C) 10 **(D) 100** (E) 1000

Soluzione. La resistenza dei cavi è $R = \dfrac{resistività \times lunghezza}{sezione} = \dfrac{1.7\times10^{-8}\times10^{4}}{10^{-4}}\,\Omega = 1.7\,\Omega$

La corrente che vi passa è $I = W_{tot}/V$, pari a 200 A per la linea a 1000 V e pari a 20 A per la linea a 10^4 V. La potenza W_R dissipata nella resistenza della linea è nei due casi:

$$W_R = I^2R = \begin{array}{l} 200^2\times1.7 = 6.8(10^4)\,\mathrm{W} \\ 20^2\times1.7 = 680\,\mathrm{W} \end{array}$$

Il rapporto tra le potenze dissipate è perciò 100, pari al quadrato del reciproco del rapporto tra i voltaggi. Oltre che aumentare il voltaggio, per diminuire le perdite si può aumentare la sezione S della linea, con corrispondente riduzione della resistenza per unità di lunghezza, ma con aumento di costo e peso della linea. Il rapporto delle potenze dissipate nei due casi dalla linea è in realtà indipendente dalla resistività e dalla lunghezza della linea stessa, infatti da $W_R = I^2R$ e $I = W_{tot}/V$ si ha $W_R = \left(\dfrac{W_{tot}}{V}\right)^2 R$; poiché qui W_{tot} e R sono costanti, si ha $W_R \propto \dfrac{1}{V^2}$, da cui subito il risultato.

Cc4. Una camicia viene inumidita con 100 cm^3 di acqua a 20°C. Trascurando la capacità termica di stoffa e metallo e perdite di calore per contatto con aria ed asse da stiro, il tempo minimo di stiratura della camicia quando si utilizza un ferro da 750 W è di circa (calore specifico dell'acqua: 1cal/g°C; calore di evaporazione: 530 cal/g).

(A) 5 min 42s (B) 3 min 30s (C) 8 min 35s (D) 1min 30s (E) ______

Soluzione. L'energia richiesta è la somma di quella necessaria a scaldare l'acqua dalla temperatura iniziale (20°C) alla temperatura di ebollizione (100 °C), e di quella per farla evaporare.
Si ha quindi:

$$Q = Q_1 + Q_2 = cm\Delta T + c_e m = m(c\Delta T + c_e)$$

Tenendo presente che $1cal \approx 4.2\,J$, si ottiene: $Q = 100\cdot4.2\cdot(80+530)$ J = 256.2 kJ , da cui

$t = \dfrac{Q}{W} = \dfrac{256200\,\mathrm{J}}{750\,\mathrm{W}} = 342\,\mathrm{s}$ (Soluzione A).

Cc5. La dinamo di una bicicletta che va a 30 km/h può essere descritta come un generatore con V_d= 14 V ed una resistenza interna R_{in}. Quando sono collegati in parallelo e funzionanti sia il faro anteriore che il fanalino posteriore la dinamo eroga una corrente I_{tot} = 1.5 A, il fanalino posteriore assorbe una potenza W_p = 4 W mentre quello anteriore una potenza W_a = 8W. La resistenza della lampadina posteriore accesa, R_p , vale

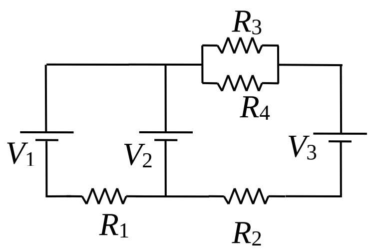
(A) 8 Ω (B) 10 Ω **(C) 16 Ω** (D) 20 Ω (E)______

Cc6. Con riferimento al problema precedente, se la lampadina posteriore si rompe quella anteriore assorbe approssimativamente (arrotondare all'unità più vicina) una potenza di (si supponga che la sua resistenza non cambi)

(A) 7 W (B) 8 W (C) 10 W **(D) 11 W** (E)_____

Cc7. E' dato il circuito in figura in cui le resistenze hanno il valore R_1=R_2=12Ω, R_3=R_4=20Ω, mentre le forze elettromotrici valgono V_1=60V, V_2=12V e V_3=24V. La potenza dissipata nella resistenza R_3 vale

(A) 1.49 W (B) 192 W (C) 3.57 W
(D) 5.45 W (E) ____



Cc8. Con riferimento al problema precedente, la potenza erogata o assorbita dal generatore V_2 vale

(A) 13.1 W (B) –13.1 W **(C) –54.5 W** (D) 240 W (E) 54.5 W

Cc9. Una resistenza elettrica alimentata a 12 V è immersa in un thermos con acqua e ghiaccio a 0°C; se è percorsa da un corrente di 15 A, in quanto tempo all'incirca farà sciogliere 100 g di ghiaccio (calore di fusione del ghiaccio 80 cal/g; 1 cal ≈ 4.2J)

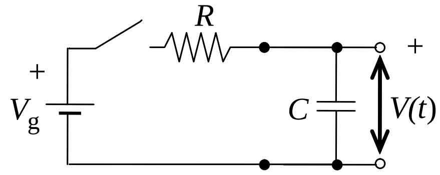
(A) 140 s (B) 22 s **(C) 187 s** (D) 93 s (E) _______

Cc10. Il motorino di avviamento di un'auto richiede 700 W; in quanto tempo scaricherà la batteria di 35 A h (fem di 12 V, resistenza interna trascurabile)?

(A) 36 min (B) 30 min (C) 22 min (D) 15 min (E) ________

CARICA E SCARICA DEL CONDENSATORE

Ca1. Consideriamo il circuito della figura con $V_g = 6$ V, $R = 1$ kΩ, $C = 1$ μF nel quale all'istante iniziale il condensatore è scarico ($Q(0) = 0$) e viene chiuso il contatto con la batteria. Determinare la corrente iniziale $I(0)$ e quella asintotica $I(\infty)$ che circola nel circuito dopo un tempo sufficientemente lungo dal collegamento con il generatore. Determinare inoltre la costante di tempo di carica del condensatore.



Soluzione. Nell'istante iniziale $t = 0$, poiché il condensatore è scarico ($Q(0) = 0$), la differenza di potenziale iniziale su C sarà $V_C(0) = 0$ e nel circuito la corrente iniziale sarà $I(0) = V_g/R$.

Quando, dopo un tempo idealmente infinito, la carica del condensatore è completata, $V_C(\infty) = V_g$ e $I(\infty) = 0$.

In un generico istante t, la differenza di potenziale ai capi del condensatore è $V(t) = \frac{Q(t)}{C}$, nel circuito circola una corrente $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ e il voltaggio ai capi del generatore deve eguagliare la somma dei voltaggi ai capi del condensatore e della resistenza:

$$V_g = IR + V_c = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

Da questa relazione, separando le variabili e integrando, si ottiene:

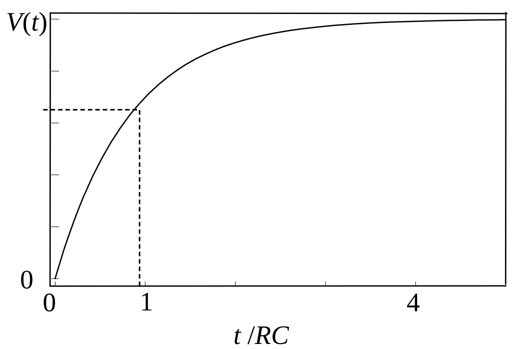
$$RC\frac{dQ(t)}{dt} = V_g C - Q$$

$$\frac{dQ(t)}{Q - V_g C} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow Q(t) = V_g C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

dove $Q_{max} = V_g C$

La legge del potenziale di carica si ottiene dalla relazione precedente dividendo per la capacità C:

$$V(t) = \frac{Q_{max}}{C}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = V_{max}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

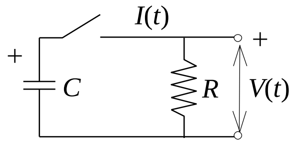


Nell'istante $t = RC = \tau$ (costante di tempo),

$V(\tau) = (1 - \frac{1}{e})V_0 = 0.63V_{max}$, cioè il potenziale del condensatore è il 63% del valore massimo V_{max}.

Con i dati dell'esercizio, $I(0) = 6$ mA, $\tau = 10^{-3}$ s.

Ca2. Un condensatore carico, con carica iniziale $Q(0) = Q_0$ è connesso all'istante $t = 0$ alla resistenza della figura. Determinare la legge con cui si scarica il condensatore nel tempo.



Soluzione. Per la relazione di maglia, ad interruttore chiuso, il voltaggio ai capi del condensatore $V(t) = Q(t)/C$ deve essere pari a quello ai capi della resistenza $V(t) = I(t)R$

La *diminuzione* della carica sul condensatore determina nel circuito una corrente $I(t)$ tale che:

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = -I(t)$$

Mettendo a sistema le due equazioni, si ottiene l'equazione differenziale a variabili separabili:

$$\begin{array}{l} \dfrac{Q(t)}{C} = I(t)R \\ \dfrac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = -I(t) \end{array} \Rightarrow R\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q(t)}{C}$$

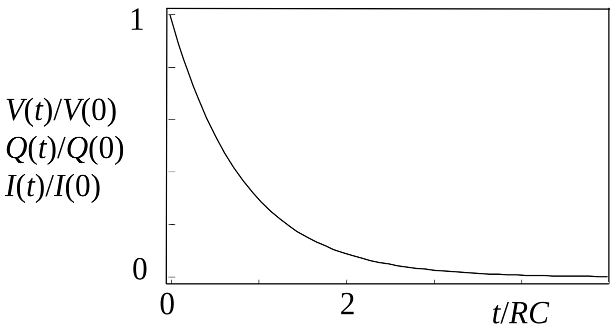
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}Q(t)}{Q(t)} = -\frac{\mathrm{d}t}{RC}$$

la cui soluzione è: $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

La corrente elettrica nel circuito, ottenuta derivando la funzione $Q(t)$: $I(t) = -\dfrac{dQ(t)}{dt}$

segue anch'essa una legge esponenziale:

$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ dove $I_0 = \dfrac{Q_0}{RC}$

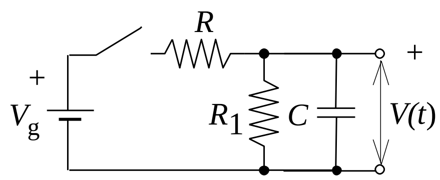


Le grandezze variabili $Q(t)$, $I(t)$ e $V(t)$ sono tra loro proporzionali e hanno lo stesso tipo di smorzamento esponenziale

Nell'istante $t = RC = \tau$ (costante di tempo),

$V(\tau) = \dfrac{1}{e}V_0 = 0.37V_0$, cioè il potenziale sul condensatore è il 37% del valore massimo V_0.

Ca3. Consideriamo il circuito della figura con $V_g = 6$ V, $R = 1$ kΩ, $R_1 = 5$ kΩ, $C = 1$ μF nel quale all'istante iniziale il condensatore è scarico ($Q(0) = 0$) e viene chiuso il contatto con la batteria. Determinare la corrente asintotica $I(\infty)$ che circola nel circuito dopo un tempo sufficientemente lungo dal collegamento con il generatore. Determinare inoltre la costante di tempo di carica del condensatore.



Soluzione. Poiché $Q(0) = 0$ la differenza di potenziale iniziale su C sarà $V(0) = 0$, e il condensatore può essere considerato come un *cortocircuito*, cosicché tutta la corrente del circuito fluirà attraverso il condensatore: $I(0) = V_g/R$.

Quando, dopo un tempo idealmente infinito, la carica del condensatore è completata, C non assorbe più corrente e può essere assimilato ad un *circuito aperto*; tutta la corrente uscente dalla batteria passa attraverso la serie di R e R_1 e vale perciò

$$I(\infty) = \frac{V_g}{R + R_1}$$

La differenza di potenziale ai capi del condensatore e della resistenza R_1 è data da: $V(\infty) = V_g \dfrac{R_1}{R + R_1}$

Dal punto di vista del condensatore, le due resistenze R e R_1 sono connesse in parallelo ai suoi morsetti; perciò la costante di tempo della carica sarà

$$\tau = C\frac{RR_1}{R + R_1}$$

In questo circuito la legge di variazione temporale di $V(t)$ è:

$$V(t) = V(\infty)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = V_g \frac{R_1}{R + R_1}\left(1 - e^{-\frac{R+R_1}{CRR_1}t}\right)$$

Con i dati dell'esercizio, $I(\infty)$ = 1 mA, $V(\infty)$ = 5 V, τ = 0.83 ms.

Ca4. Durante il processo di carica di un condensatore C, inizialmente scarico e collegato al tempo t = 0 ad un generatore continuo V mediante una resistenza R, la potenza utilizzata dal condensatore per caricarsi è massima al tempo (in unità RC)

(A) 0 (B) 0.368 (C) 0.500 (D) 0.693 (E) 1

Soluzione. La potenza W_C utilizzata dal condensatore è uguale alla differenza fra la potenza $W_g = VI(t)$ erogata dal generatore e la potenza $W_R = RI^2(t)$ dissipata sulla resistenza, cioè: $W_C = VI - RI^2$. Per ottenere il valore della corrente che rende massima la potenza W_C, occorre eguagliare a zero la derivata prima, cioè: $\dfrac{dW_C}{dI} = V - 2RI = 0 \Rightarrow W_C\big|_{\max} \; per I = \dfrac{V}{2R}$

Poiché la corrente durante la carica del condensatore segue la legge esponenziale: $I(t) = \dfrac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$, eguagliando questa al valore massimo, si ottiene il tempo t richiesto:

$$\frac{V}{2R} = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow t/RC = \ln 2 \Rightarrow t = 0.693RC$$

Ca5. Ad un condensatore carico si collega una resistenza R = 2 Ω; si osserva che dopo un tempo t = 1 s il voltaggio ai capi del condensatore si è dimezzato rispetto al valore iniziale. La capacità C del condensatore vale circa

(A) 0.18 F (B) 0.36 F **(C) 0.72 F** (D) 1.44 F (E) _____ F

Ca6. Ad un condensatore carico si collega una resistenza R = 2 kΩ e si verifica che dopo un tempo t = 1 s l'energia immagazzinata nel condensatore si è dimezzata rispetto al valore iniziale. La capacità C del condensatore vale circa

(A) 0.18 mF (B) 0.36 mF (C) 0.72 mF **(D) 1.44 mF** (E) _____

Ca7. Ad un condensatore carico di capacità C = 0.72 F si collega una resistenza R e si osserva che, dopo un tempo t = 1 s, in cui la carica sul condensatore si è dimezzata, sulla resistenza è stata dissipata un'energia E = 1 J. La carica iniziale del condensatore vale circa

(A) 0.69 C (B) 0.98 C **(C) 1.39 C** (D) 1.96 C (E)______

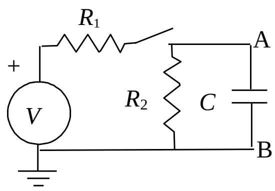
Ca8. Il condensatore C_1 = 0.4 F ha inizialmente carica Q_1 = 10 C e viene chiuso all'istante iniziale sulla resistenza R = 10 Ω in serie con un condensatore di capacità C_2 = 0.2 F inizialmente scarico. L'energia dissipata in R nel primo minuto dopo la connessione vale circa

(A) 83 J (B) 125 J (C) 63 J **(D) 42** J (E)_______

Ca9. Con riferimento al problema precedente, la potenza dissipata in R al tempo t = 0 s vale circa

(A) 62.5 W (B) 125 W (C) 510 W (D)775 W (E)________

Ca10. Un alimentatore con V = 12 V e resistenza interna R_1 = 4 Ω viene chiuso all'istante iniziale su di un condensatore C scarico in parallelo con una resistenza R_2. Dopo un secondo, la differenza di potenziale ai capi del condensatore vale V_{AB} = 1 V; dopo un minuto si ha V_{AB} = 8 V. La resistenza R_2 vale



(A) 4 Ω **(B) 8 Ω** (C) 12 Ω (D) 20 Ω
(E) 40 Ω

Ca11. Con riferimento al problema precedente, la capacità C del condensatore vale

(A) 0.19 F (B) 0.43 F (C) 0.82 F (D) 1.23 F **(E) 2.81 F**