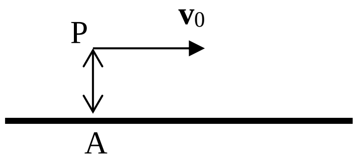
EQUILIBRIO E MOTO DELLE CARICHE ELETTRICHE

Ad1. Una sorgente di protoni ad una altezza |PA| = 10 m dal suolo emette un protone (m_p=1.67(10^{-27}) kg, q_p=1.6(10^{-19}) C) con velocità orizzontale v_0 = 6(10^6) m/s. A che distanza dal punto A il protone raggiungerà il suolo se il campo elettrico terrestre ha modulo pari a 100 V/m ed è diretto verso la Terra?

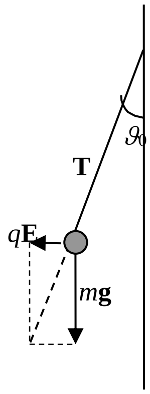


(A) 91 m (B) 137 m (C) 183 m (D) 274 m (E) 457 m

Soluzione. L'accelerazione verso il basso dovuta al campo elettrico vale $a = q_p E / m_p = 9.58(10^9)$ m/s^2, che è molto maggiore dell' accelerazione di gravità (trascurabile in questo caso). Il tempo di caduta e il tratto orizzontale (Δx) si ricavano dall'equazione oraria del moto rettilineo uniforme: $|PA| = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{2|PA|/a} = 45.7\ \mu\text{s} \Rightarrow \Delta x = v_0 t = 274.13$ m

Ad2. Una pallina di 102g con una carica di + 2μC appesa ad un filo leggero lungo 9.8 m è posta in un campo elettrico uniforme E = 3 kV/cm diretto orizzontalmente. Il periodo di oscillazione della pallina è di

(A) 9.93 s (B) 6.28 s (C) 5.82 s (D) 4.97 s
(E) _______



Soluzione. La pallina è soggetta alle forze costanti **P** = m**g** e $\mathbf{F}_e$ = **E**q e si dispone in una posizione di equilibrio in corrispondenza di un angolo ϑ_0 tale per cui la tensione T equilibra la forza risultante:

$$T = \sqrt{(Eq)^2 + (mg)^2}$$

Spostando la pallina dalla posizione di equilibrio di un piccolo angolo $d\vartheta$ e rilasciandola, questa oscilla di moto armonico intorno alla posizione corrispondente a ϑ_0, in quanto soggetta ad una forza risultante di tipo elastico. La pulsazione del moto armonico non è quindi direttamente proporzionale a $\sqrt{g}$ come in presenza della sola forza di gravità, ma a $\sqrt{T/m}$ e risulta essere:

$$\omega^2 = \frac{a}{l} = \frac{1}{l}\sqrt{\left(\frac{Eq}{m}\right)^2 + g^2}$$

Il periodo di oscillazione della pallina è pertanto

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{\left(\frac{Eq}{m}\right)^2 + g^2}}} = 5.82 \text{ s}$$

Ad3. Un protone (m_p = 1.67(10^{-27})kg) con velocità iniziale di 3(10^6) m/s penetra in una regione dove è presente un campo elettrico uniforme e percorre un tratto x = 0.2 metri prima di fermarsi. L'intensità media del campo elettrico presente nella regione è

(A) 75 kV/m (B) 150 kV/m **(C) 235 kV/m** (D) 470 kV/m (E) _______

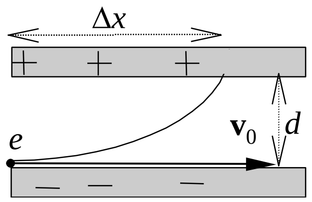
Ad4. Una particella di massa m e carica q viene immessa con velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ in una regione in cui è presente un campo elettrico **E** uniforme e diretto perpendicolarmente a $\mathbf{v}_0$. La particella, per effetto della forza elettrica, compie un moto parabolico nel quale lo spostamento nella direzione parallela a $\mathbf{v}_0$ è x = 10 cm e nella direzione perpendicolare a $\mathbf{v}_0$ è y = 0.98 cm. Se $E = 10^4$ V/m, e $v_0 = 3\cdot 10^7$ m/s, il rapporto q/m vale:

(A) $0.88\cdot 10^{11}$C/kg **(B) $1.76\cdot 10^{11}$C/kg** (C) $0.59\cdot 10^{11}$C/kg (D) $0.88\cdot 10^{10}$C/kg

Ad5. Un protone ($m_p = 1.67(10^{-27})$ kg, $q = 1.6(10^{-19})$ C) si trova inizialmente fermo sull'armatura positiva di un condensatore nel vuoto fra le cui armature vi è una differenza di potenziale di 100 V. La velocità con cui il protone raggiunge l'armatura negativa del condensatore è di circa

(A) 36000 km/h **(B) 138 km/s** (C) 99 km/s (D) 199 km/s (E) $3(10^5)$ km/s

Ad6. Un elettrone (m_e=9.1(10^{-31}) kg, q= 1.6(10^{-19}) C) è sparato orizzontalmente tra i piatti del condensatore della figura, a livello della armatura negativa, con una velocità $v_0 = 2.965(10^6)$ m/s. Se la distanza tra le armature è d = 5 mm e la differenza di potenziale tra queste è 20 V, quale distanza orizzontale Δx percorrerà l'elettrone prima di raggiungere l'armatura positiva?



(A) 0.79 cm **(B) 1.12 cm** (C) 1.79 cm (D)3.16 cm (E) 8.94 cm

Ad7. Nell'esperimento di Millikan una goccia di olio di 2μm di raggio e densità relativa all'acqua di 0.85 è tenuta sospesa tra i piatti orizzontali di un condensatore quando è applicato un campo elettrico discendente di 8.72 kV/cm. Quante cariche elementari contiene la goccia?

(A) 2 (B) 5 (C) 7 (D) 10 (E) _________

ENERGIA E MOTO DI CARICHE ELETTRICHE

Bc1. Un protone si muove in un piano (x,y) in un campo elettrico uniforme parallelo al piano. Nel punto O(0,0) le componenti della sua velocità sono $v_x(O) = 3(10^6)$ m/s e $v_y(O) = 2(10^6)$ m/s. Quando il protone si trova in A(3.71m, 3.56m) le componenti della velocità sono $v_x(A) = 4.42(10^6)$ m/s e $v_y(A) = 5.12(10^6)$ m/s. Il lavoro compiuto dal campo sul protone per portarlo dal punto O al punto A vale

(A) $1.66(10^{-14})$J (B) $2.02(10^{-14})$J (C) $2.22(10^{-14})$J **(D) $2.73(10^{-14})$J** (E) $3.87(10^{-14})$J

Soluzione. Il lavoro della forza elettrica è uguale alla variazione di energia cinetica, quindi:

$$L = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_O^2 = \frac{1}{2}m(v_{xA}^2 + v_{yA}^2) - \frac{1}{2}m(v_{xO}^2 + v_{yO}^2) =$$

$$= \frac{1.67\times 10^{-27}\,\text{kg}\left[(4.42)^2 + (5.12)^2 - 9 - 4\right]\times 10^{12}\,\text{m}^2}{2} = 2.73\times 10^{-14}\,\text{J}$$

Bc2. Con riferimento al problema precedente la componente E_x del campo elettrico vale

(A) 10 kV/m **(B) 15 kV/m** (C) 20 kV/m (D) 33 kV/m (E) 36.2 kV/m

Soluzione. La variazione di energia cinetica del protone è uguale al lavoro della forza elettrica

$$E_c(\text{A}) - E_c(\text{O}) = L_{Fe} = q\int_O^A \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = q\int_{xO}^{xA} E_x \mathrm{d}x + q\int_{yO}^{yA} E_y \mathrm{d}y = qE_x x_A + qE_y y_A$$

D'altra parte la variazione di energia cinetica può essere scritta evidenziando le componenti della velocità:

$$\frac{1}{2}m\text{v}_A^2 - \frac{1}{2}m\text{v}_O^2 = \frac{1}{2}m(\text{v}_{xA}^2 + \text{v}_{yA}^2) - \frac{1}{2}m(\text{v}_{xO}^2 + \text{v}_{yO}^2) = \frac{1}{2}m(\text{v}_{xA}^2 - \text{v}_{xO}^2) + \frac{1}{2}m(\text{v}_{yA}^2 - \text{v}_{yO}^2)$$

Quindi eguagliando membro a membro si ha:

$$\begin{matrix} qE_x x_A = \frac{1}{2}m(\text{v}_{xA}^2 - \text{v}_{xO}^2) \\ qE_y y_A = \frac{1}{2}m(\text{v}_{yA}^2 - \text{v}_{yO}^2) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} E_x = \frac{m(\text{v}_{xA}^2 - \text{v}_{xO}^2)}{2qx_A} \\ E_y = \frac{m(\text{v}_{yA}^2 - \text{v}_{yO}^2)}{2qy_A} \end{matrix}$$

dalle quali si ottiene il valore delle componenti E_x E_y del campo.

$$E_x = \frac{m(\text{v}_{xA}^2 - \text{v}_{xO}^2)}{2qx_A} = \frac{1.67\times10^{-27}\,\text{kg}\left[(4.42)^2 - 9\right]\times10^{12}\,\text{m}^2}{2\times1.6\times10^{-19}\,\text{C}\times3.71\,\text{m}} \approx 15\frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

$$E_y = \frac{m(\text{v}_{yA}^2 - \text{v}_{yO}^2)}{2qy_A} = \frac{1.67\times10^{-27}\,\text{kg}\left[(5.12)^2 - 4\right]\times10^{12}\,\text{m}^2}{2\times1.6\times10^{-19}\,\text{C}\times3.56\,\text{m}} \approx 33\frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

Bc3. In riferimento ai problemi precedenti, la differenza di potenziale V(O)–V(A) tra i punti O e A vale (m_p = 1.67·10^{-27} kg)

(A) 0 V (B) 12 kV (C) 190 kV **(D) 171** kV (E) 363 kV

Soluzione. La variazione di energia cinetica è uguale al lavoro della forza elettrica, che può essere espresso dal prodotto della carica e della differenza di potenziale fra O e A, cioè:

$$L = q\big(V(\text{O}) - V(\text{A})\big)$$

da cui $V(\text{O}) - V(\text{A}) = \frac{m}{2q}\left(\text{v}_A^2 - \text{v}_O^2\right) = \frac{1.67(10^{-27})\text{kg}}{3.2(10^{-19})\text{C}}\left(4.42^2 + 5.12^2 - 13\right)\cdot10^{12}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 171\,\text{kV}$

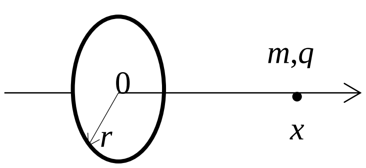
Bc4. Una particella carica (m = 3(10^{-8}) kg, q = 2(10^{-6}) C) si muove liberamente nel piano xy per effetto di un campo elettrico. Inizialmente si trova in un punto A dove possiede la velocità v(A) di componenti v$_x$(A) =0 e v$_y$(A) = 100 m/s. Successivamente si trova in B dove le componenti della velocità valgono v$_x$(B) =200 m/s e v$_y$(B) = 50 m/s. La differenza di potenziale V(A)–V(B) tra i punti A e B vale

(A) 0 V (B) 12 V (C) 19 V **(D) 244** V (E) 363 V

Bc5. La velocità massima di un elettrone in un tubo da televisore operante a 20000 V è di circa (m_e = 9.1(10^{-31}) kg) (si trascurino gli effetti relativistici)

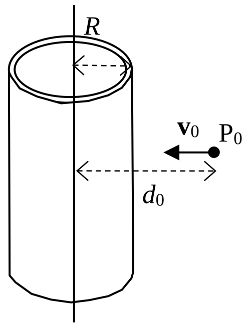
(A) 2.4(10^6) m/s (B) 5.9(10^7) m/s (C) 6.2(10^7) m/s **(D) 8.4(10^7) m/s** (E)_____

Bc6. Un protone (m = 1.67×10^{-27} kg, q = 1.6×10^{-19} C) si trova inizialmente al centro O di un anello di raggio r = 1 cm su cui è uniformemente distribuita una carica Q = 3 μC. Se in O il protone ha una velocità v$_0$ = 5×10^2 m/s diretta come l'asse dell'anello (direzione positiva dell'asse x), nel punto di ascissa x = 20 cm il protone avrà velocità v$_x$ pari a circa



(A) 5.3×10^6 m/s (B) 7.4×10^6 m/s (C) 9.2×10^6 m/s **(D) 2.2×10^7 m/s** (E) _____m/s

Bc7. Un protone nel vuoto ($m = 1.67\times10^{-27}$ kg, $q = 1.6\times10^{-19}$ C) si trova inizialmente in P_0, a distanza $d_0 = 1$ m dall'asse di un lungo cilindro, con velocità $v_0 = 10^6$ m/s diretta verso l'asse del cilindro. Il cilindro è carico e costituito da rete metallica penetrabile dal protone, ha raggio $R = 10$ cm e la carica è di +3 μC per ogni metro di altezza del cilindro. La distanza minima dall'asse a cui giunge il protone è di



(A) 0.00 cm (B) 10.1 cm (C) 46.6 cm
(D) 67.9 cm **(E) 90.8 cm**

CAPACITÀ CONDENSATORI ED ENERGIA

Bd1. Calcolare la variazione di energia potenziale del sistema costituito da una sfera conduttrice di raggio $r = 1.2(10^{-15})$ m e dallo spazio vuoto circostante, quando la sfera viene caricata con carica $q = 1.6(10^{-19})$ C.

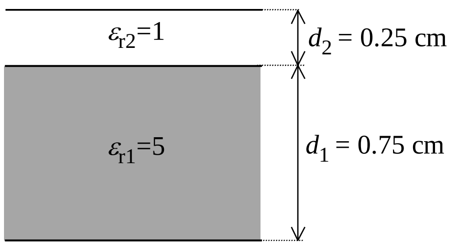
(A) 0.6 MeV (B) 1.6 MeV (C) 1.11 MeV (D) 0.314MeV (E) 3.0 MeV

Soluzione. Immaginiamo di trasferire dall'infinito valori infinitesimi di carica sulla sfera, la quale, conseguentemente, avrà un potenziale $V_q = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Il lavoro infinitesimo compiuto per trasferire la carica dq sulla sfera sarà: d$L = V_q$ dq e il lavoro totale, pari alla variazione di energia potenziale del sistema sarà:

$$\Delta U = L = \int_0^Q \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{(1.6\cdot10^{-19})^2\cdot 9\cdot10^9}{2.4\cdot10^{-15}}\ \mathrm{J} = 9.6\cdot10^{-14}\ \mathrm{J}$$

Poiché 1 MeV= $1.6(10^{-13})$ J, $\Delta U = 0.6$ MeV

Bd2. Un condensatore è formato da due piastre piane di area $S = 0.1$ m^2 distanti $d = 1$ cm. Lo spazio tra le armature è riempito per 3/4 di olio ($\varepsilon_{r1} = 5$, $d_1 = 0.75$ cm) e per il restante 1/4 d'aria ($\varepsilon_{r2} \approx 1$, $d_2 = 0.25$ cm).
La capacità del condensatore è pari a circa



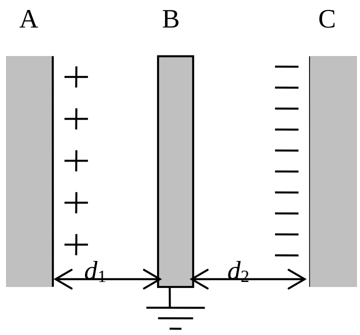
(A) 0.47 nF (B) 314 pF (C) 111 pF
(D) 5.31 nF **(E) 221 pF**

Soluzione. Possiamo pensare al condensatore come costituito da due condensatori in serie fra loro, rispettivamente di capacità:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S}{d_1} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S}{d_2}$$

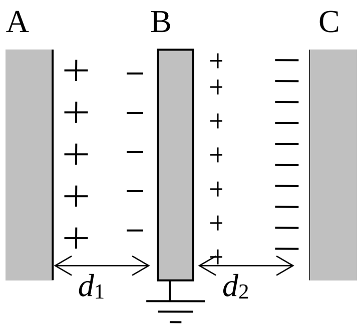
La capacità C del condensatore complessivo è

$$C = (C_1^{-1} + C_2^{-1})^{-1} = \varepsilon_0 S\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon_0 S\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{d_2\varepsilon_{r1} + d_1\varepsilon_{r2}} \approx 221\text{pF}$$



Bd3. Il piatto metallico A di sinistra è isolato e ha una densità superficiale di carica σ_A = +5 nC/m^2; Il piatto metallico C di destra è isolato, parallelo ad A e porta una densità superficiale di carica di σ_C = –10 nC/m^2. Tra i due piatti è inserita una lastra metallica B spessa 3 cm collegata a terra. La distanza tra le superfici affacciate di A e B è d_1 = 4 cm mentre tra B e C la distanza è d_2 = 7 cm.
La differenza di potenziale V_{AB} vale (in volt)
(A) ________ **(B) 22.6** (C) 56.5 (D) 79.1
(E) 101.7

Soluzione. Se A fosse completamente isolato e lontano da qualsiasi corpo metallico, la carica elettrica si distribuirebbe su tutta la sua superficie. La presenza della lastra metallica B provoca la distribuzione della carica elettrica solo sulla superficie di A affacciata a B, mentre sulle superfici di B si addensano cariche di segno opposto a quelle presenti su A e su C. Il campo elettrico nelle regioni fra le lastre è quindi uniforme e di intensità:



$$E_{\mathrm{A-B}} = \frac{\sigma_{\mathrm{A}}}{\varepsilon_0} = V_{\mathrm{AB}} / d_1 \quad \text{e} \quad E_{\mathrm{B-C}} = \frac{\sigma_{\mathrm{C}}}{\varepsilon_0} = V_{\mathrm{BC}} / d_2$$

Di conseguenza, la differenza di potenziale V_{AB} vale:

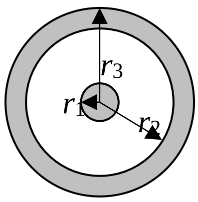
$$V_{\mathrm{AB}} = \frac{\sigma_{\mathrm{A}} d_1}{\varepsilon_0} = \frac{5\times10^{-9}\,\mathrm{C/m^2}\times0.04\,\mathrm{m}}{8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/Nm}} = 22.6\ \mathrm{V}$$

Bd4. Un grande condensatore a facce piane e parallele porta una carica di 9.6 nC. Sapendo che la superficie delle armature del condensatore è S = 160 cm^2, e il condensatore si trova in aria, calcolare la densità di energia del campo elettrico all'interno del condensatore. (NB: la costante dielettrica dell'aria è circa uguale alla costante dielettrica del vuoto)

(A) 1152 nW/m^2 **(B) 20.4 mJ/m^3** (C) 1.13 eV/m^3 (D) 1.15 μJ/m^3 (E) 580 nJ/m^3

Soluzione. Il campo elettrico all'interno del condensatore è $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/\varepsilon_0 S$ e la densità di energia

$$U_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = 0.02036\ \mathrm{J/m^3}$$



Bd5. Una sfera conduttrice di raggio r_1 = 15 cm è circondata da un guscio metallico concentrico di diametro interno $2r_2$ = 31 cm e diametro esterno $2r_3$ = 33 cm ed ha l'intercapedine tra sfera e guscio ripiena di materiale isolante con costante dielettrica ε_r = 4. La capacità di tale condensatore vale circa
(A) 0.91 nF (B) 1.82 nF **(C) 2.07 nF**
(D) 4.13 nF (E) 4.53 nF

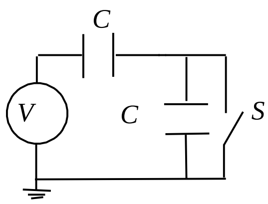
Soluzione

Dato che la capacità è espressa dalla relazione: C = Q/ΔV, occorre calcolare la differenza di potenziale tra i due gusci a partire dal campo E generato dalla sola carica Q presente sulla sfera interna; il guscio esterno, infatti si carica per induzione (confronta esercizio svolto Ba5) e il suo potenziale è in tutti i punti uguale a quello calcolato sulla superficie esterna del guscio.
Si ha pertanto:

$$\Delta V = \int_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{d}r = k\frac{Q}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = k\frac{Q}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) = k\frac{Q}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\frac{r_2-r_1}{r_1 r_2}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_{\mathrm{r}} r_1 r_2}{k(r_2-r_1)} \approx 2.07\ \mathrm{nF}$$

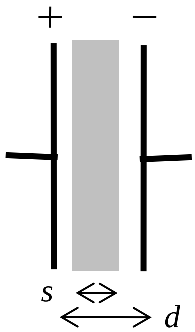
Bd6. Due condensatori uguali con capacità $C = 1$ μF sono collegati come in figura ad un generatore di tensione continua con $V = 5$ V. Dopo la chiusura dell'interruttore S, l'energia elettrostatica immagazzinata, rispetto all'energia iniziale



(A) diventa 1/4 (B) si dimezza (C) resta uguale
(D) quadruplica **(E)** raddoppia

Soluzione La capacità iniziale è C/2 e la corrispondente energia $\frac{1}{2}\left(\frac{C}{2}\right)V^2$.

L'energia finale è $CV^2/2$, ossia doppia di quella iniziale.



Bd7. Un condensatore carico e isolato formato da due armature metalliche affacciate in aria distanti $d = 4$ mm e di area $S = 500$ cm^2 ha inizialmente una differenza di potenziale $V_0 = 1500$ V. Tra le armature viene inserita una lamina conduttrice di spessore $s = 2$ mm. La differenza di potenziale V_1 tra le armature dopo l'inserimento della lamina vale circa
(A) _______ **(B) 750 V** (C) 1000 V
(D) 1500 V (E) 2000 V

Bd8. Con riferimento al problema precedente, il rapporto tra energia elettrostatica iniziale (E_0) del condensatore e l'energia elettrostatica E_1 dopo l'inserimento della lamina (E_0/E_1) vale
(A) 0.375 (B) 0.600 (C) 1.500 **(D) 2.000** (E) _______

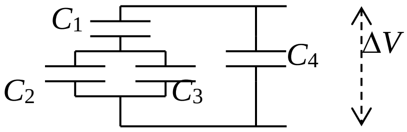
Bd9. Una sfera conduttrice di raggio $R = 0.5$ m, è caricata con una carica complessiva $Q = 1$ mC ed è posta nel vuoto. Calcolare l'energia potenziale immagazzinata nel campo elettrico generato dalla sfera carica in tutto lo spazio vuoto circostante e dimostrare che è uguale al lavoro fatto per caricare la sfera.
(A) 4.5 kJ **(B) 9 kJ** (C) 2.25 kJ (D) 5.4 kJ (E) _______

Bd10. Quando una carica complessiva $Q = 1$ mC è portata dall'infinito su una sfera isolante di raggio $R = 1$ m, l'energia potenziale acquistata dal sistema costituito dalla sfera e dall'intero spazio vuoto circostante è di circa
(A) 4.5 kJ (B) 9 kJ (C) 2.25 kJ **(D) 5.4 kJ** (E) _______

Bd11. La carica di un condensatore di capacità $C = 0.01$ F passa da $Q_1 = 1$C a $Q_2 = 0.5$ C. L'energia del condensatore diminuisce di
(A) 18.75 J **(B) 37.5 J** (C) 75 J (D) 150 J (E) 300 J

Bd12. Un condensatore con $C = 2$ μF è inizialmente isolato e fra le sue armature vi è una differenza di potenziale $V = 1000$ V. Il condensatore carico viene poi collegato ad un condensatore uguale e scarico. La differenza fra l'energia elettrostatica iniziale del condensatore e l'energia elettrostatica finale complessiva dei due condensatori è pari a
(A) 0.25 J **(B) 0.5 J** (C) 1.0 J (D) 2.0 J (E)____ J

Bd13. Dati i quattro condensatori del disegno con C_1 = 1μF, C_2 = 2μF, C_3 = 3μF, C_4 = 5μF, il rapporto Q_1/Q_2 tra le cariche su C_1 e su C_2 vale



(A) 1/15 (B) 1/10 (C) 1/6
(D) 5/2 (E) 5/3

Bd14. Con riferimento al problema precedente, se ΔV = 1000 V, l'energia elettrostatica del condensatore C_1 vale
(A) 27.8 mJ (B) 41.7 mJ **(C) 347.2 mJ** (D) 2.50 J (E) 2.92 J

Bd15. Un condensatore a facce piane e parallele di area 1 m^2 poste nel vuoto a distanza di 1 mm viene caricato con una carica q = 0.6 μC e quindi staccato dal generatore. Se tra le due armature del condensatore carico viene inserito un dielettrico con ε_r = 2, la differenza tra energia potenziale finale ed iniziale del condensatore

(A) è nulla
(B) è negativa e pari all'energia iniziale
(C) è positiva e pari all'energia iniziale
(D) è negativa e pari all'energia finale
(E) è positiva e pari all'energia finale

Bd16. Un condensatore a facce piane e parallele di area 1 m^2 poste nel vuoto a distanza di 1 mm viene caricato con una carica q = 0.6 μC. Se, mantenendolo collegato al generatore, tra le due armature del condensatore carico viene inserito un dielettrico con ε_r = 2, la differenza tra energia potenziale finale ed iniziale del condensatore

(A) è nulla
(B) è negativa e pari all'energia iniziale
(C) è positiva e pari all'energia iniziale
(D) è negativa e pari all'energia finale
(E) è positiva e pari all'energia finale