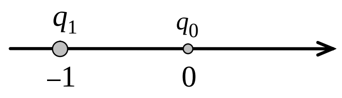
POTENZIALE ELETTRICO ED ENERGIA POTENZIALE

Ba1. Una carica elettrica $q_0 = +1$ mC si trova nell'origine dell'asse x mentre una carica negativa $q_1 = -4$ mC si trova nel punto di ascissa $x = -1$ m. Sia P il punto di ascissa positiva dove il potenziale elettrico si annulla. L'ascissa x_P vale

(A) 1/3 (B) 1/2 (C) 1 (D) 2 (E) 3

Soluzione.

Imponiamo l'annullamento del potenziale elettrico, possibile in quanto la carica q_0 dà sempre un contributo positivo mentre q_1 uno negativo. Poiché nell'espressione del potenziale compare una distanza, in questo caso esprimibile come valore assoluto di una differenza di ascisse, cioè



$$V_0 = k\frac{q_0}{|x_P|} \quad \text{e} \quad V_1 = k\frac{q_1}{|x_P + 1|}$$

possiamo eguagliare i due contributi al potenziale elevati al quadrato

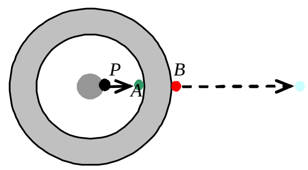
$$\frac{q_0^2}{(x_P)^2} = \frac{q_1^2}{(x_P+1)^2} \Rightarrow x_P^2 + 2x_P + 1 = 16x_P^2 \Rightarrow \begin{cases} x_P = 1/3 \text{ m} \\ x_P = -1/5 \text{ m} \end{cases}$$

ottenendo due valori per l'ascissa di P. Come richiesto dal problema consideriamo la soluzione positiva $x_P = +1/3$ m.

Ba2. Un guscio sferico metallico di raggio esterno pari a 18 cm e raggio interno pari a 12 cm contiene una sfera metallica di raggio 2 cm. La sfera interna ha una carica di 2 nC mentre sul guscio esterno viene posta una carica di – 4 nC. Il potenziale elettrico nel punto P(r) ad una distanza r = 2 cm vale

(A) 650 V (B) 200 V (C) – 70 V (D) – 100 V (E)– 90 V

Soluzione. Il potenziale elettrico in un punto P(r) è uguale al lavoro del campo **E** per portare una carica unitaria da P(r) all'infinito. Se si suddivide il percorso in modo opportuno e cioè da P ad A, da A a B e da B all'infinito, si può calcolare il lavoro sommando i contributi relativi a ciascun tratto.



Il campo elettrico nella zona da P ad A è pari a quello di una carica puntiforme q_{int} posta nel centro; nel guscio da A a B **E**=0 in quanto si tratta di un conduttore; all'esterno del guscio (freccia tratteggiata da B all'infinito), il campo **E** è pari al campo elettrico generato dalla carica puntiforme in valore pari a $q_{int}+q_{ext}$ posta nel centro.

Si ha perciò:

$$V(\mathrm{P}) = k_e\left(\int_{r_P}^{r_A}\frac{q_{int}}{r^2}\,\mathrm{d}r + \int_{r_B}^{\infty}\frac{q_{int}+q_{ext}}{r^2}\,\mathrm{d}r\right) = -k_e\left(\left|\frac{q_{int}}{r}\right|_{0.02}^{0.12} + \left|\frac{q_{int}+q_{ext}}{r}\right|_{0.18}^{\infty}\right) =$$

$$= 9\cdot 2\left(\frac{1}{0.02} - \frac{1}{0.12}\right) - 9\cdot 2\,\frac{1}{0.18} = 650 \text{ V}$$

Ba3. Nei dintorni del punto O (origine degli assi cartesiani) dove si annulla, un campo elettrico è descritto in ogni punto P dalla relazione vettoriale $\mathbf{E}(\mathrm{P}) = -A\cdot\mathbf{OP}$ con A = 25 kV/m^2. Se P_1 e P_2 sono due punti dell'asse delle x con ascisse x_1 = 2 cm ed x_2 = 3 cm la differenza di potenziale $V(P_2) - V(P_1)$ vale

(A) –6.25 V (B) –12.5 V (C) 0 V **(D) 6.25 V** (E) 12.5 V

Soluzione

La forza elettrica in O è di tipo elastico. Applicando la definizione di differenza di potenziale fra i punti P_1 e P_2 appartenenti all'asse x, si ha:

$$V(\mathrm{P}_2)-V(\mathrm{P}_1)=\int_{x_2}^{x_1}E_x\cdot \mathrm{d}x=-\int_{x2}^{x1}Ax\cdot\mathrm{d}x=\frac{A}{2}\left(x_2^2-x_1^2\right)\approx 6.25\ \mathrm{V}$$

Ba4. Una sfera conduttrice di raggio R_1 = 25 cm e carica iniziale q_1 = 4 μC è posta brevemente in contatto elettrico con una seconda sfera conduttrice di raggio R_2 = 40 cm e carica iniziale q_2 = –2 μC posta a tre metri di distanza dalla prima carica. Dopo che il contatto è stato rimosso le due sfere si respingono con una forza di circa

(A) 0 N **(B) 0.95 mN** (C) 8.0 mN (D) 8.52 mN (E) 9 mN

Soluzione. Le due sfere hanno una carica complessiva pari alla somma algebrica delle cariche ($q_{tot} = q_1 + q_2 = 2\mu$C). Durante il contatto le cariche si ridistribuiscono in modo che l'intero sistema abbia lo stesso potenziale in ogni punto (i conduttori sono superfici equipotenziali). Indicate con q_1' e q_2' le carice sulle due sfere all'equilibrio, il potenziale all'equilibrio sarà:

$$Veq=\frac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0\ R_1}=\frac{q_2'}{4\pi\varepsilon_0\ R_2} \qquad (1)$$

Poiché la carica totale è costante, si ha

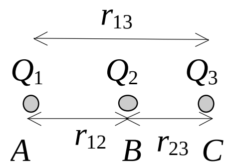
$$q_{\ tot}=q_1'+q_2'=V_{eq}4\pi\epsilon_0R_1+V_{eq}4\pi\epsilon_0R_2=V_{eq}4\pi\epsilon_0(R_1+R_2)$$

Ricavando da quest'ultima equazione Veq e sostituendolo nell'equazione (1), si ottiene:

$$q_1'=\left(q_{tot}\right)\frac{R_1}{R_1+R_2}=2\cdot\frac{25}{65}\mu\mathrm{C};\qquad q_2'=\left(q_{tot}\right)\frac{R_2}{R_1+R_2}=2\cdot\frac{40}{65}\mu\mathrm{C}$$

Il modulo della forza elettrica vale pertanto $F=k\dfrac{q_1'q_2'}{d^2}=0.947\mathrm{mN}$

Ba5. Una molecola triatomica (ad esempio l'idrossido di sodio NaOH) è schematizzata come l'insieme delle tre cariche della figura, considerate puntiformi. Sia Q_1= Q_3 = +e, Q_2 = –2e, r_{12} = 0.15 nm, r_{23} = 0.1 nm; l'energia potenziale totale del sistema è pari a circa (e = 1.6(10^{-19}) C; 1eV = 1.6(10^{-19})J)



(A) –14 eV (B) 31 eV **(C) –42 eV** (D) 48 eV (E) 98 eV

Soluzione. L'energia potenziale acquisita dal sistema delle due cariche è uguale al lavoro della forza esterna richiesto per costruire la molecola, cioè per portare in posizione i tre ioni dall'infinito (dove l'energia potenziale è nulla). Si inizia mettendo in posizione una delle tre cariche, ad esempio la carica Q_1 nel punto A, senza compiere lavoro. Si porta quindi la carica Q_2 dall'infinito al punto B, dove il potenziale $V_{12} = k_eQ_1/r_{12}$ è quello generato da Q_1. Tale lavoro è pertanto $L_{12} = Ep_{12} = Q_2V_{12}$.

Sia V_{13} il potenziale nel punto C dovuto a Q_1 e V_{23} il potenziale in C dovuto alla sola carica Q_2. Il lavoro della forza esterna per portare la carica Q_3 dall'infinito al punto C è L_{13}+L_{23} = Q_3(V_{13}+ V_{23}).

L'energia potenziale totale del sistema è quindi la somma dei lavori di "costruzione" della molecola, cioè:

$$E\mathrm{p}=Q_2V_{12}+Q_3V_{13}+Q_3V_{23}=k_e\frac{Q_2Q_1}{r_{12}}+k_e\frac{Q_3Q_1}{r_{13}}+k_e\frac{Q_3Q_2}{r_{23}}$$

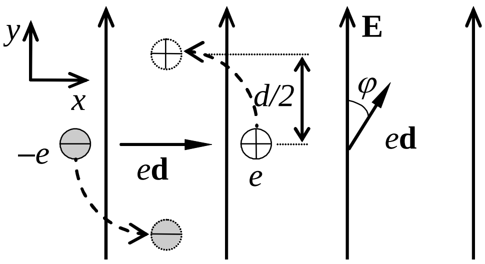
che in questo caso vale:

$$E\mathrm{p}=9(10^9)(1.6)^2(10^{-19})^2\left(\frac{-2}{0.15(10^{-9})}+\frac{1}{0.25(10^{-9})}+\frac{-2}{0.10(10^{-9})}\right)\mathrm{J}=$$

$$=-675.84(10^{-20})\mathrm{J}\approx -42\,\mathrm{eV}$$

Il segno negativo dell'energia potenziale, e quindi del lavoro della forza esterna, significa che per disgregare la molecola e riportare gli ioni a distanza infinita, dove l'energia potenziale è nulla, una forza esterna deve compiere un lavoro positivo di 42 eV. Tale lavoro è interpretabile come energia di legame della molecola, cioè $E_{\text{legame}} = -E_p$; tanto maggiore essa è in valore assoluto, tanto più stabile è la molecola.

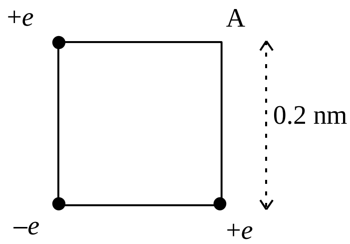
Ba6. Un dipolo elettrico, inizialmente orientato lungo l'asse x, è costituito da uno ione monovalente positivo, $e = 1.6(10^{-19})$ C, e uno negativo alla distanza $d = 3(10^{-10})$ m.
Il dipolo viene posto in un campo elettrico uniforme diretto verso la direzione positiva dell'asse y di modulo $E = 2(10^5)$ V/m. Se il dipolo può orientarsi nel campo elettrico la sua energia potenziale diminuisce di



(A) $2eEd$ **(B) eEd** (C) $eEd/2$ (D) $eEd/3$ (E) $eEd/4$

Soluzione. In questo caso il problema potrebbe essere risolto notando che la carica positiva si sposta di $d/2$ nella direzione del campo elettrico il quale perciò compie su questa un lavoro $eE\,d/2$; il campo elettrico compie lo stesso lavoro movendo la carica negativa in direzione opposta; il lavoro compiuto da $\mathbf{E}$, $edE = 9.6(10^{-24})$ J, è pari alla perdita di energia potenziale del dipolo (Soluzione B).
Più in generale, l'energia potenziale del dipolo si può scrivere come prodotto scalare tra il campo elettrico $\mathbf{E}$ e il momento di dipolo $q\mathbf{d}$ cambiato di segno: $\textit{energia potenziale} = -\mathbf{E}\cdot e\mathbf{d} = -Eed\cos\varphi$.
Tale energia è minima quando il campo elettrico e il momento di dipolo sono paralleli ($\varphi = 0°$), massima quando sono antiparalleli ($\varphi = 180°$)e nulla quando sono perpendicolari ($\varphi = 90°$).

Ba7. Le cariche $+e$ e $-e$ ($e = 1.6(10^{-19})$ C) sono poste nei tre vertici di un quadrato di lato $l = 2(10^{-10})$ m come in figura. Il potenziale elettrico del quarto vertice A vale:



(A) 7.2 V **(B) 9.3 V** (C) $4.65(10^{10})$ V
(D) $1.48\ (10^{10})$ V (E) $1.1(10^{10})$ V

Ba8. Se nel punto A della figura dell'esercizio precedente si porta una carica $+e$,l'energia potenziale del sistema formato dalle quattro cariche vale:

(A) −9.3 eV (B) 9.3 eV **(C) 0 eV** (D) 7.2 eV (E) 28.8 eV

Ba9. Due protoni (m_p=1.67 (10^{-27}) kg, $q = 1.6(10^{-19})$ C) in un nucleo di nickel sono distanti circa $4(10^{-15})$ m. La loro energia potenziale vale (in MeV)

(A) 3.92 (B) 0.576 (C) 1.44 **(D) 0.36** (E) 0.157

Ba10. Tre elettroni sono collocati ai vertici di un triangolo equilatero di lato 0.2 nm. Il potenziale elettrico nel baricentro del triangolo vale

(A) −21.6 V **(B) −37.4 V** (C) −43.2 V (D) −24.9 V (E) −49.9 V

Ba11. Una carica Q è al centro di un guscio sferico conduttore il cui raggio interno vale 0.055 m e quello esterno 0.075 m. Se il campo elettrico alla distanza di 1 m vale in modulo 345 N/C (diretto verso l'esterno) il potenziale elettrico a 0.065 m dal centro vale (in V)

(A) 0 **(B) 4600** (C) 5300 (D) 9800 (E) 11500

Ba12. Un lungo cavo coassiale ha come conduttore interno un cilindro di raggio R_1=0.1 cm e come conduttore esterno un cilindro cavo di raggio interno R_2= 0.3 cm ed esterno R_3=0.5 cm. Il conduttore interno porta una carica di densità lineare $\lambda_1 = 5(10^{-6})$ C/m mentre quello esterno porta una carica di densità $\lambda_2 = -5\ (10^{-6})$ C/m. La differenza di potenziale tra un punto a distanza d = 0.3 cm dall'asse del cavo e un punto sull'asse del cavo vale

(A)–98.9 kV (B)–62.4 kV (C) 0 (D)–31.4 kV (E) ______

Ba13. Una carica $q_1 = 1.75\ (10^{-6})$ C è nell'origine di un sistema di riferimento e una carica $q_2 = -8.6\ (10^{-7})$ C è nel punto di ascissa x_2 = 0.75 m. Nel punto dell'asse x a metà tra le due cariche il potenziale elettrico vale

(A) 2.14 (10^4) V (B) 5.46 10^4V (C) 3.68 10^4V (D) 2.74 10^3 V (E) 8.29 10^3V

Ba14. In una regione dove è presente un campo elettrico uniforme $\mathbf{E} = (2\cdot10^5\ \mathrm{V/m})\mathbf{i} + (2\cdot10^5\mathrm{V/m})\mathbf{j}$ è posto un dipolo $\mathbf{p} = qd\mathbf{j}$ costituito da due cariche puntiformi $|q| = 10^{-7}$ C poste alla distanza di 1 cm. Il modulo del momento della coppia a cui il dipolo è soggetto vale

(A) 10^{-7}Nm **(B) $2\cdot10^{-4}$Nm** (C) $2\cdot10^{-7}$Nm (D) $2\cdot10^{-5}$Nm (E) 10^{-6}Nm

Ba15. Il dipolo del problema precedente è posto in un campo elettrico uniforme di modulo $E = 2(10^5)$ V/m diretto verso la direzione positiva dell'asse y ed è mantenuto nella direzione che forma un angolo di 30° con l'asse x. L'energia potenziale del dipolo vale

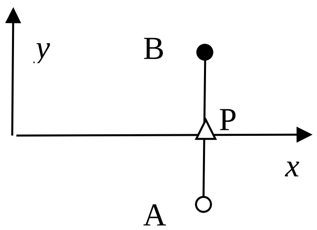
(A) $-1.73(10^{-4})$ J **(B) -10^{-4}J** (C) $1.73(10^{-4})$J (D) 10^{-4}J (E)_____

Ba16. Un dipolo elettrico è costituito da uno ione monovalente positivo $e = 1.6(10^{-19})$ C, e da uno negativo $-e$ alla distanza $d = 10^{-10}$ m. Il dipolo viene posto in un campo elettrico uniforme diretto nella direzione positiva dell'asse y di modulo $E = 2(10^5)$ V/m dove si orienta parallelamente al campo **E.** Per orientare il dipolo in modo che formi un angolo di 60° con la direzione positiva dell'asse y il campo **E** deve compiere un lavoro pari a

(A) $-2.77(10^{-24})$ J **(B) $-1.6(10^{-24})$J** (C) $2.77(10^{-24})$J (D) $3.2(10^{-24})$J (E)_____

Ba17. Il potenziale elettrico in una regione dello spazio in prossimità dell'origine cartesiana varia in funzione della posizione x secondo la legge:

$$V(x) = a + bx + cx^2$$



dove le costanti hanno i seguenti valori: a = 3000 V, b = 2000 V/m, c = 1500 V/m^2. Il bastoncello AB della figura è lungo 2 m e porta ai suoi estremi due cariche di segno opposto e di uguale valore assoluto q = 1 mC. Il punto medio P di AB è vincolato nel punto di ascissa x_P = 5 m dell'asse x. Il momento rispetto a P delle forze elettriche agenti sulle cariche del bastoncello in N·m vale

(A) 23.8 (B) 32.2 **(C) 34.0** (D) 35.7 (E) 46.0

Ba18. Con riferimento al problema precedente, se il bastoncello è lasciato libero di ruotare attorno al punto fisso P e riesce a raggiungere la posizione di equilibrio, in tale posizione la risultante delle forze elettriche agenti sul bastoncello vale in modulo

(A) 8.4 N (B) 8 .0 **(C) 6.0 N** (D) 5.6 N (E) 4.2 N

Ba19. Un campo elettrico uniforme **E** ha le componenti cartesiane date in tabella assieme alle coordinate di due punti A e B. La differenza di potenziale $V_A - V_B$ vale:

	x	y	z
E (V/m)	3	5	7
A (m)	0	1	2
B (m)	4	6	8

(A)–79 V (B) –37 V (C) 33 V **(D) 79 V**
(E) ________

DAL POTENZIALE ELETTROSTATICO AL CAMPO ELETTRICO

Bb1. Il potenziale elettrico lungo la retta $y = a$ di un piano xy è descritto dalla funzione

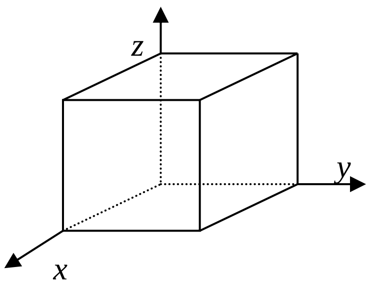
$$V(x) = 9\left(\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + a^2}}\right) \text{V}$$

La componente E_x del campo elettrico nel punto (0, a =0) vale (tutte le coordinate sono espresse in metri)
(A) 0.257 V/m (B) 0.569 V/m (C) 1.61V/m (D) 6.36 V/m **(E) 18.0 V/m**

Bb2. Lungo l'asse x del piano xy il potenziale elettrico è descritto dalla funzione $V(x) = \dfrac{V_0}{\sqrt{1 + \dfrac{x^2}{a^2}}}$

con V_0 = 5 V e a = 2 m. La componente E_x del campo elettrico nel punto x = 4 m vale
(A) 0.45 V/m (B) 0.89 V/m (C) 2.68V/m (D) 0.36 V/m (E) 0 V/m

Bb3. Nei punti di una data regione il potenziale è dato da $V = a(xy+4y^2)$, con a = 10 V/m^2. Calcolare la carica contenuta in un cubo di lato l = 10 cm, disposto come in figura. (Suggerimento: usare la divergenza di **E**)



(A) –7.08·10^{-13} C (B) 7.08·10^{-13} C (C) –14.16·10^{-13} C
(D) 0 C (E) _____

Bb4. Calcolare il modulo del gradiente del campo scalare $f(P)=x^2+y^2-2z$ nel punto di coordinate P = (–1, 3, 2).
(A) 4.9 (B) 0.6 (C) 1.61 (D) 9.8 **(E) 6.63**

Bb5. In una regione dello spazio il potenziale elettrostatico è dato da $V(x,y,z) = (xz-4y+2z^2)$ V. Calcolare le componenti del campo elettrico nel punto P(–1; 2; 1) (coordinate in metri).
(A) E = –1i+4j–3k (B) **E** = 1**i**–4**j**–3**k** (C) **E** = –1**i**+4**j**+3**k** (D) **E** = –1**i**+6**j**–8**k**

Bb6. In una regione dello spazio il potenziale elettrostatico è espresso dalla funzione $V(x) = (x^3-6x^2+3)$ V. Calcolare a) i punti x_1 e x_2 nei quali la componente Ex del campo elettrico si annulla; b) in quale punto la componente Ex del campo elettrico assume valore massimo; c) il valore massimo del campo Ex.
[**a) x = 0; x = 4 m; b) x = 2 m; c) E_{max}= 12 V/m**]