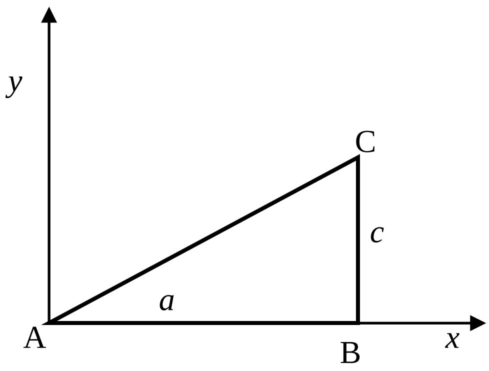
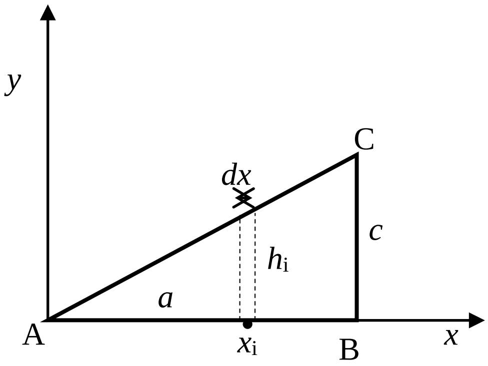
CENTRO DI MASSA DEL CORPO RIGIDO



Cr1. Una lamina di massa m e densità costante ha la forma di un triangolo rettangolo i cui cateti misurano a e c, con $a > c$. Dimostrare che la posizione del centro di massa è sulla retta parallela al cateto c, di equazione $x = 2/3\ a$.

SOLUZIONE. Si scelga un sistema di riferimento con l'asse x coincidente con il cateto a e l'origine con un vertice del triangolo. Dato che si tratta di una lamina di spessore trascurabile e di densità costante, possiamo considerare la massa M uniformemente distribuita sulla superficie e il rapporto M / Superficie = costante.
Si suddivide il triangolo in rettangolini di altezza h_i e di spessore infinitesimo dx, ciascuno in corrispondenza della coordinata x_i; la densità del triangolo può essere eguagliata al rapporto fra la massa mi del rettangolino e la sua superficie, cioè:

$\sigma = \dfrac{M}{\frac{1}{2}ac} = \dfrac{m_i}{dx \cdot h_i}$ Poiché dalla similitudine dei triangoli



si ottiene che $\dfrac{h_i}{x_i} = \dfrac{c}{a}$, sostituendo nella relazione precedente si ottiene:

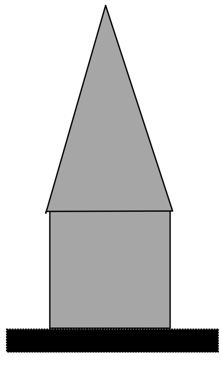
$$m_i = \sigma \cdot dx \cdot h_i = \sigma \cdot dx \cdot x_i \frac{c}{a}$$

Calcoliamo ora l'ascissa del centro di massa:

$$x_{CM} = \frac{\sum_i x_i m_i}{M} = \frac{1}{M}\int_S x_i m_i = \frac{1}{M}\int_0^a \sigma \frac{c}{a} x_i^2 dx = \frac{1}{M}\sigma \frac{c}{a}\frac{a^3}{3}$$

Sostituendo infine la massa M, si ottiene la dimostrazione richiesta:

$$x_{CM} = \frac{\sigma \frac{ca^2}{3}}{\sigma \frac{ac}{2}} = \frac{2}{3}a$$

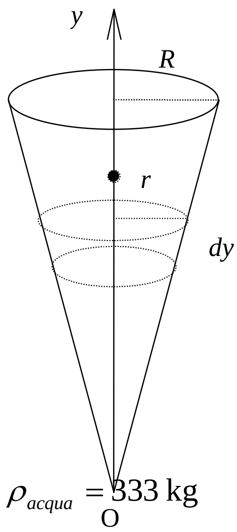


Cr2. Un monumento è costituito da un cilindro metallico di densità relativa rispetto all'acqua di 7.68, raggio di 30 cm e altezza di 60 cm, appoggiato al suolo, sulla cui base superiore appoggia esattamente la base di un cono di marmo alto 1 metro. Se il centro di massa del monumento si trova a 41.19 cm dal suolo, calcolare la densità relativa del marmo e la massa del cono.

SOLUZIONE. Indichiamo con h_{cil} l'altezza del cilindro e con h quella del cono. Il problema richiede il calcolo della distanza tra vertice e baricentro di un cono di altezza h e raggio R. Scelto un sistema di riferimento con l'origine nel vertice del cono e asse y coincidente con l'asse del cono, una fettina di spessore infinitesimo dy può essere considerata un cilindro di raggio $r_y = Ry/h$, altezza dy e massa proporzionale al volume del cilindretto: $dV = \pi r^2 dy = \pi \dfrac{R^2}{h^2} y^2 dy$

Il volume complessivo V e l'ordinata del baricentro y_B nel riferimento della figura sono

$$V = \int dV = \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} y^2 dy = \frac{1}{3}\pi R^2 h \quad yB = \frac{\int y dV}{V} = \frac{\int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} y^3 dy}{\frac{\pi R^2 h}{3}} = \frac{\frac{\pi R^2 h^2}{4}}{\frac{\pi R^2 h}{3}} = \frac{3}{4} h$$



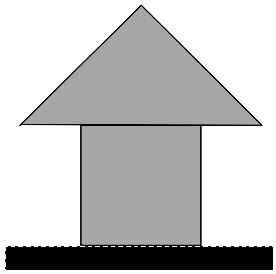
Perciò, se il cono ha massa M_{cono} ed altezza h, il suo baricentro si trova ad $h/4$ sopra il cilindro, ossia ad $h_{cil}+h/4$ da terra. Il baricentro del cilindro è invece ad $h_{cil}/2$. Dalla formula del centro di massa complessivo h_B si ha

$$h_B = \frac{M_{cil} h_{cil}/2 + M_{cono}(h_{cil} + h/4)}{M_{cil} + M_{cono}} = \frac{\pi R^2 \left(\rho_{cil} h_{cil}^2 /2 + \rho_{cono} \frac{h}{3} (h_{cil} + h/4) \right)}{\pi R^2 \left(\rho_{cil} h_{cil} + \rho_{cono} h/3 \right)}$$

Risolvendo rispetto a ρ_{cono} si ha

$$\rho_{cono} = \frac{\rho_{cil} h_{cil} (h_B - h_{cil}/2)}{\frac{h}{3}\left(h_{cil} + h/4 - h_B \right)} = \frac{7.68 \times 0.6(0.4119 - 0.3)}{\frac{0.6 + 0.25 - 0.4119}{3}} = 3.531; \; M_{cono} = \pi R^2 \frac{h}{3} \rho_{cono} \cdot \rho_{acqua} = 333 \text{ kg}$$

Cr3. Un cilindro di metallo alto 1 m e con una circonferenza base di 3.14 m ha una densità di 7400 kg/m^3. Una sua base appoggia al suolo mentre sull'altra base appoggia un cono dello stesso metallo alto un metro e con una circonferenza di base di 6.28 m. Il centro di massa del sistema “cilindro+cono” si trova a una altezza dal suolo di



(A) 0.929 m (B) 0.976 m (C) 1.000 m (D) 1.045 m (E) 1.106 m

Cr4. Quando un furgoncino è vuoto ha una massa di 2000 kg e ha il baricentro a 40 cm da terra. A pieno carico porta una massa aggiuntiva di 1500 kg a un’altezza media di 90 cm dal suolo. Se la distanza tra le ruote anteriori è di 140 cm e l’aderenza al fondo stradale orizzontale è perfetta, qual è la massima velocità con cui si può affrontare una curva di 40 m di raggio senza cappottare?
(A) 38 km/h (B) 54 km/h (C) 66 km/h **(D) 76 km/h** (E) 85 km/h

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Momenti di inerzia di alcuni corpi rigidi calcolati rispetto a un asse di simmetria passante per il centro di massa.	
Anello rispetto all’asse centrale	$I = MR^2$
Anello rispetto a un diametro	$I = \frac{1}{2} MR^2$
Cilindro pieno rispetto all’asse centrale	$I = \frac{1}{2} MR^2$
Asta sottile rispetto a un asse perpendicolare all’asta e passante per il centro	$I = \frac{1}{12} ML^2$
Sfera piena rispetto a un diametro	$I = \frac{2}{5} MR^2$
Sfera cava (guscio sottile)	$I = \frac{2}{3} MR^2$

Ec1. Calcolare il momento di inerzia di un cilindro omogeneo pieno, di massa *M*, raggio *R* e altezza *h*, rispetto al suo asse.

Soluzione Il momento d'inerzia del cilindro è $I = \int \rho r^2 dV$, dove *r* rappresenta la distanza dall'asse principale, *ρ* la densità del cilindro e l'elemento di volume del guscio cilindrico di spessore infinitesimo d*r* e altezza *h* è d*V*=2*πrdr·h*.

Quindi $I = \int_0^R \rho r^2 2\pi\, rhdr = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi\rho h R^4}{2}$. Poiché la densità del cilindro è

$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 h}$, sostituendo si ha $I = \frac{MR^2}{2}$

Ec2. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse *x*, rispetto all'asse *y*, rispetto all'asse *z*, del sistema formato dalle particelle le cui masse e coordinate sono indicate nella tabella.

	m_1	m_2	m_3	m_4
m(g)	50	25	25	30
x(cm)	2	0	–3	–2
y(cm)	2	4	–3	4
z(cm)	0	0	0	0

Soluzione Utilizziamo la formula per il calcolo del momento d'inerzia $I_i = \sum_{i=1}^{4} m_i r_i^2$ dove r_i rappresenta la distanza delle masse dall'asse di rotazione.

Se l'asse di rotazione è l'asse *x*, si ha:

$$I_x = \sum_{i=1}^{4} m_i \cdot \left(y_i^2 + z_i^2\right) = [50 \cdot 4 + 25 \cdot 16 + 25 \cdot 9 + 30 \cdot 16]\mathrm{kg \cdot m^2} = 1.3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$$

Se l'asse di rotazione è l'asse *y*: ha:

$$I_y = \sum_{i=1}^{4} m_i \cdot \left(x_i^2 + z_i^2\right) = [50 \cdot 4 + 25 \cdot 9 + 30 \cdot 4]\mathrm{kg\ m^2} = 0.55 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\ m^2}$$

Infine, se l'asse di rotazione è l'asse *z*:

$$I_z = \sum_{i=1}^{4} m_i \cdot \left(x_i^2 + y_i^2\right) = [50 \cdot 8 + 25 \cdot 16 + 25 \cdot 18 + 30 \cdot 20]\mathrm{kg\ m^2} = 1.85 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\ m^2}$$

Ec3. Un'asta di massa trascurabile e lunghezza *L* reca agli estremi due masse puntiformi m_1, m_2, ed è posta in rotazione in un piano orizzontale attorno ad un asse verticale passante per un punto a distanza *x* da m_1 con velocità angolare ω_0.

Determinare: a) il momento d'inerzia in funzione di *x*; b) la posizione del centro di massa x_{CM}.

c) Dimostrare che il momento d'inerzia e l'energia cinetica assumono il minimo valore quando $x = x_{CM}$.

Soluzione. Il momento d'inerzia di questo sistema formato da due masse puntiformi è a)

$$I = \sum_i m_i x_i^2 = m_1 x^2 + m_2 (L - x)^2$$

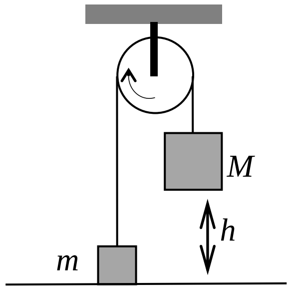
b) Scelto un sistema di riferimento con l'origine O coincidente con m_1, il centro di massa del sistema è: $x_{CM} = \frac{m_1 x + m_2 (L - x)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}$.

c) Il momento d'inerzia è minimo quando $\frac{dI}{dx} = 0 \Rightarrow 2m_1 x + m_2 (2x - 2L) = 0$

$(m_1 + m_2)x = m_2 L \Rightarrow x = \dfrac{m_2 L}{m_1 + m_2}$ cioè quando il punto x coincide con il centro di massa del sistema.

L'energia cinetica del sistema $Ec = \frac{1}{2} I_O \omega_0^2 = \frac{1}{2}\left[m_1 x^2 \omega_0^2 + m_2 (L - x)^2 \omega_0^2\right]$ poiché ω è costante, è minima quando il momento di inerzia è minimo, quindi se l'asse di rotazione è nel centro di massa.

Ec4. Due masse M = 0.50 kg e m = 0.46 kg sono legate a una fune che scorre senza attriti e senza slittare nella gola della carrucola della figura, il cui raggio vale R = 5 cm, e sono inizialmente ferme. Lasciato libero, il blocco di massa M percorre la distanza h = 0.75 m in 5 secondi. Calcolare: a) il modulo dell'accelerazione di ciascun blocco; b) le tensioni dei tratti di fune che sostengono il blocco più pesante e il più leggero; c) il modulo dell'accelerazione angolare della carrucola; d) il momento di inerzia della carrucola.



Soluzione La massa M si muove di moto uniformemente accelerato $s = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow a = \frac{2s}{t} = 0.06 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Le due masse M ed m si muovono con la stessa accelerazione a, quindi la tensione esercitata dalla fune su M è $T_1 = M(g - a) = 4.87\,\text{N}$ mentre la tensione su m è $T_2 = m(g + a) = 4.54\,\text{N}$.

Un punto P posto sul bordo della carrucola ruota con accelerazione tangenziale a_t uguale all'accelerazione delle masse m e M, e accelerazione angolare $a_\theta = \frac{a_t}{R} = \frac{0.06}{0.05} \text{rad/s} = 1.2\ \text{rad/s}$. La velocità angolare della carrucola è perciò $\omega = a_\theta t = 1.2 \cdot 5\ \text{rad/s} = 6\ \text{rad/s}$

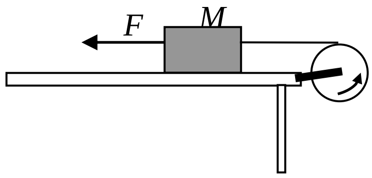
Poiché agiscono solo forze conservative, l'energia totale del sistema formato dalle masse e dalla carrucola resta costante, quindi:

$Mgh = \frac{1}{2}\left(M\text{v}^2 + m\text{v}^2 + I\omega^2\right) + mgh$. Da tale relazione si ricava il momento di inerzia della carrucola:

$$I = \frac{2 \cdot (M - m)gh - \text{v}^2 (M + m)}{\omega^2}$$

Poiché $\text{v} = at = 0.06 \cdot 5\ \text{m/s} = 0.3\ \text{m/s}$, si ha:

$$I = \frac{2 \cdot (0.5 - 0.46) \cdot 9.8 \cdot 0.75 - (0.3)^2 \cdot (0.5 + 0.46)}{(6)^2} \text{kg} \cdot \text{m}^2 = \frac{0.588 - 0.0864}{36} \text{kg} \cdot \text{m}^2 = 0.0139\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$



Ec5. Una corda di massa trascurabile è avvolta intorno alla gola di una carrucola di raggio R = 0.2 m, montata su un asse orizzontale di attrito trascurabile. L'estremo della fune è legato ad un blocco di massa M = 2 kg, tirato sopra un piano privo di attrito da una forza orizzontale costante F = 3 N. Sapendo che il momento di inerzia della carrucola è I = 0.05 kg·m^2, calcolare il modulo dell'accelerazione angolare della carrucola.

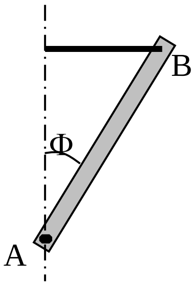
Soluzione La legge fondamentale della dinamica applicata al corpo di massa M è:
$F - T = Ma$ mentre per la carrucola, la legge dei momenti è: $TR = I\, a_\theta$.

Dato che un punto sul bordo della carrucola ha la stessa accelerazione *a* della massa *M*, cioè:

$a = a_\theta R$, sostituendo si ha: $F - \frac{I a_\theta}{R} = M a_\theta R$ da cui si ricava l'accelerazione angolare a_θ:

$$a_\theta = \frac{FR}{I + MR^2} = \frac{3 \cdot 0.2}{0.05 + 0.08} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = 4.62 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Ec6. Un'asta omogenea, di lunghezza L = 1.4 m e massa M = 2.0 kg, può ruotare nel piano verticale intorno ad un perno A infisso orizzontalmente in un suo estremo. L'asta è trattenuta nella posizione come in figura (ϕ=30°) da una fune orizzontale fissata all'altro estremo *B*. Calcolare:
a) la tensione della fune;
b) la velocità angolare acquistata dall'asta quando passa per la verticale (se si taglia la fune).



Soluzione Considero l'equilibrio dei momenti delle forze applicate rispetto all'estremo A della sbarra, cioè la forza peso (applicata nel CM) e la tensione, applicata nell'estremo B.

$$Mg\,\frac{L}{2}\sin\Phi = T\;L\cos\Phi \Rightarrow T = \frac{Mg\,\sin\Phi}{2\cos\Phi} = \frac{9.8 \cdot 0.5}{0.866}\,\text{N} = 5.66\ \text{N}$$

Se si taglia la corda, la sbarra ruota sotto l'azione della forza peso, quindi per la legge di conservazione dell'energia $\frac{1}{2} I\omega^2 = Mg\left(\frac{L}{2}\cos\Phi + \frac{L}{2}\right)$, dove il momento d'inerzia della sbarra rispetto al CM è $I = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$

Sostituendo si ha**:** $\frac{1}{6}ML^2\omega^2 = Mg\,\frac{L}{2}(\cos\Phi + 1) \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g(\cos\Phi + 1)}{L}$, quindi

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(\cos\Phi + 1)}{L}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 9.8 \cdot 1.866}{1.4}}\ \text{rad/s} = 6.26\,\text{rad/s}$$

Ec7. Un disco omogeneo di raggio *R* e massa *M* è posto su un piano inclinato scabro con coefficiente di attrito statico μ_S. Determinare i valori dell'angolo di inclinazione θ del piano per i quali il disco rotola senza strisciare.

Soluzione Scriviamo la prima equazione cardinale della dinamica per il disco. Le forze agenti su di esso sono la forza peso, la reazione **N** del piano, perpendicolare al piano stesso, e la forza $\mathbf{F}_S$ parallela al piano, dovuta all'attrito statico, che impedisce al corpo di strisciare.
Lungo la direzione del piano la prima equazione cardinale si scrive:
$Ma_{CM} = Mg\sin\theta - F_S$, non conoscendo F_S non è possibile calcolare a_{CM}. Calcoleremo F_S scrivendo la seconda equazione cardinale della dinamica riferita al centro di massa CM del disco, considerando che al momento totale contribuisce solo la forza F_S, dato che la forza peso e la componente normale della reazione del piano hanno momento nullo rispetto a CM.

Si ha perciò: $F_S R = \frac{dL_{CM}}{dt} = I_{CM}\,\frac{d\omega}{dt}$.

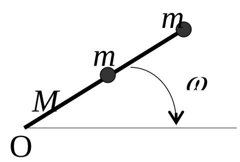
Ricavando $\frac{d\omega}{dt}$ dalla relazione $a_{CM} = \frac{d\omega}{dt}R$ e ricordando che per il disco, il momento di inerzia è $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$, si ottiene $F_S = \frac{I_{CM}\,a_{CM}}{R^2} = M\,\frac{a_{CM}}{2}$. Sostituendo quanto trovato nella prima equazione cardinale della dinamica $Ma_{CM} = Mg\sin\theta - F_S$ si trova $a_{CM} = \frac{2}{3}g\sin\theta$ e $F_S = \frac{1}{3}Mg\sin\theta$.

Se il disco deve ruotare e non strisciare, la forza F_S deve essere minore o uguale alla forza di attrito statico massima che il piano è in grado di sviluppare, che è data da $F_{S\max} = \mu_S N$, quindi:

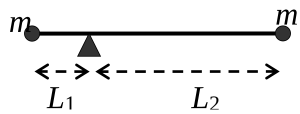
$$\frac{1}{3}Mg\sin\theta \le \mu_S Mg\cos\theta \rightarrow \tan\theta \le 3\mu_S$$

Ec8. Calcolare il momento di inerzia di un'asta rigida, di massa 0.5 kg, e lunga L = 1 m, rispetto ad un asse perpendicolare all'asta e passante per un punto O distante 20 cm dall'estremo libero.
(A) 1.04 kg·m^2 **(B) 0.087 kg·m^2** (C) 0.192 kg·m^2 (D) 0.042 kg·m^2 (E) _____

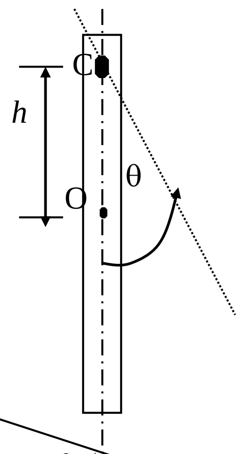
Ec9. Un'asta di massa M = 2.4 kg, lunga L = 11.2 cm, è libera di ruotare nel piano della figura intorno ad un asse perpendicolare a tale piano e passante per il suo estremo O. Due particelle di uguale massa m = 0.85 kg sono poste l'una alla distanza $L/2$ e l'altra alla distanza L da O. Se la velocità angolare dell'asta è ω = 0.3 rad/s, calcolare l'energia cinetica rotazionale del sistema rispetto al punto O.
(A) 0.1 mJ (B) 7 mJ (C) 2.1 mJ **(D) 1.05 mJ** (E) _____



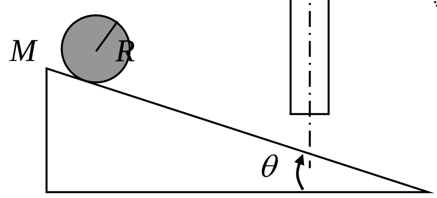
Ec10. Due particelle di uguale massa m sono sospese alle estremità di una asticella rigida e priva di massa, appoggiata al fulcro indicato nella figura e mantenuta ferma. Le distanze dal fulcro delle particelle sono L_1 = 0.2 m e L_2 = 0.8 m. Nell'istante in cui l'asta è lasciata libera di ruotare intorno al fulcro, calcolare le accelerazioni tangenziali delle due particelle.
(A) 1.73 m/s^2; 6.92 m/s^2 (B) 0.96 m/s^2; 8.60 m/s^2 (C) 0.86 m/s^2; 7.78 m/s^2
(D) 2.0 m/s^2; 7.78 m/s^2 (E) _____



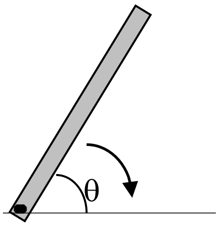
Ec11. Un pendolo composto è costituito da un'asta omogenea di massa m = 0.67 kg e lunghezza L = 30 cm, appesa a un chiodo che dista h = 10.2 cm dal centro di massa dell'asta. Se l'asta viene spostata di un piccolo angolo θ rispetto alla posizione di equilibrio, calcolare il periodo del moto armonico risultante.
(A) 0.13 s (B) 1.68 s (C) 0.27 s **(D) 0.84 s**
(E) _____



Ec12. Una sfera omogenea di raggio R e massa M rotola senza strisciare su un piano inclinato scabro di altezza h = 2 m. Calcolare la velocità del centro di massa della sfera alla fine della discesa.
(A) 7.48 m/s (B) 3.74 m/s **(C) 5.29 m/s**
(D) 1.18 m/s (E) _____



Ec13. Un'asta omogenea, di lunghezza $L = 2$ m, può ruotare nel piano verticale intorno ad un perno O infisso orizzontalmente in un suo estremo. L'asta, mantenuta ferma, inizialmente forma con l'orizzontale un angolo $\theta = 40°$. Se l'asta è lasciata libera, calcolare la velocità angolare acquistata dall'asta quando passa per l'orizzontale.



(A) 3.07 rad/s (B) 2.05 rad/s (C) 1.23 rad/s (D) 1.18 rad/s
(E) ______