CINEMATICA DEL MOTO RETTILINEO

Ba1. Il sistema di blocco automatico si è guastato e il macchinista del Pendolino Milano−Roma lanciato a v_P = 170 km/h si accorge di un treno merci davanti a lui che sta procedendo sullo stesso binario e nella stessa direzione con v_m = 100 km/h.
Il macchinista aziona immediatamente la frenata di emergenza su tutte le ruote, capace di imprimere una decelerazione pari al 20% dell'accelerazione di gravità: $a = 0.2\ g = 1.96$ m/s^2 (0.2 = coefficiente di attrito ruota–binario) e prega che tra il suo treno e il merci vi sia una distanza sufficiente a evitare l'impatto. Si stima che tale distanza minima sia pari a circa
(A) 468 m (B) 372 m (C) 276 m (D) 193 m **(E) 96 m**
SOLUZIONE. La distanza minima si trova imponendo che le velocità dei due treni siano uguali al momento dell'impatto: in tal caso, i treni si toccherebbero senza danni. Il tempo richiesto per decelerare da v_P a v_m è

$$t = \frac{v_P - v_m}{a} = \frac{70\ \text{km/h}}{1.96\ \text{m/s}^2} = \frac{70}{1.96 \cdot 3.6} = 9.92\ \text{s}$$

In tale tempo, il Pendolino percorre con moto uniformemente decelerato 372 m mentre il merci percorre con moto uniforme 276 m. Perciò la loro distanza iniziale deve essere maggiore di $(372 - 276)\,\text{m} = 96\ \text{m}$ per evitare danni.

Ba2. Un sacco di zavorra viene staccato da una mongolfiera mentre questa sta salendo con una velocità di 2 m/s. Se il sacco tocca il suolo esattamente 10 s dopo il tempo del distacco essendo accelerato uniformemente verso il basso a 9.8 m/s^2, l'altezza dal suolo della mongolfiera è di circa
(A) 490 m **(B) 470 m** (C) 510 m (D) 980 m (E) ________

Ba3. Un treno merci parte dallo scalo accelerando in modo uniforme. Se dopo un chilometro sta ancora accelerando e la sua velocità è di 36 km/h, la sua accelerazione vale circa
(A) 0.05 m/s^2 (B) 0.1m/s^2 (C) 0.65m/s^2 (D) 1.0m/s^2 (E) 9.8m/s^2

Ba4. Con riferimento al problema precedente, si calcoli in quanto tempo il treno merci coprirà il secondo chilometro se continua ad accelerare?
(A) 300 s (B) 200 s (C) 140 s **(D) 83 s** (E) 68 s

Ba5. Due treni si muovono uno verso l'altro sullo stesso binario, ciascuno con una velocità di 20 m/s. Quando sono a due chilometri di distanza un macchinista viene avvertito della imminente collisione e comincia a rallentare con una decelerazione di 0.2 m/s^2. Quanto spazio percorre all'incirca il treno che decelera dall'avvio delle frenata alla collisione?
(A) 0.333 km (B) 1.25 km (C) 280 m (D) infinito **(E) 828 m**

Ba6. Una macchina per record di velocità è spinta da un motore a reazione che imprime un'accelerazione di 10 m/s^2 per i primi 20 s dalla partenza prima di spegnersi, lasciando che il veicolo proceda poi a velocità costante. La distanza dalla partenza a cui la macchina si trova dopo mezzo minuto è:
(A) 1 km (B) 2 km (C) 3 km **(D) 4 km** (E) 6 km

Ba7. L'accelerazione gravitazionale alla superficie di Marte è di circa 4 m/s^2. Se un astronauta lanciasse in alto una palla avente una velocità di 10 m/s, per quanti secondi salirebbe?
(A) 0.66 s **B) 2.5 s** (C) 4 s (D) 1.6 s (E) 5 s

Ba8. La posizione di un corpo in moto lungo l'asse x è descritto dall'equazione in funzione del tempo t (in secondi): x = 3m +(10 m/s)t – (4 m/s^2)t^2.
Verificare la correttezza delle affermazioni seguenti.
(A) La velocità al tempo t=0 è di 10 m/s.
(B) L'accelerazione è sempre pari a –2 m/s^2.(C) La velocità media nell'intervallo di tempo tra t = 1s e t = 2s vale, in modulo, 3 m/s.
(D) Il corpo è fermo quando ha raggiunto il punto di ascissa x = 9.25 m.
(E) La velocità è pari a quella iniziale e con segno opposto dopo un tempo di 10 s.

APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE ALLACINEMATICA

Ad1. La posizione di un oggetto di massa m aumenta col tempo secondo le relazioni indicate, dove t è in secondi e x in metri e le costanti hanno unità di misura opportune. Calcolare la velocità istantanea e l'accelerazione istantanea relativamente ad ogni equazione oraria.

a) $x(t) = 32t^5$ b) $x(t) = 2t+3t^2$ c) $x(t) = 3t+\text{sen}\,t$ d) $x(t) = 2t\exp(-t/3)$

[Risposte: a) v_{ist} = 160 m/s; $a_{ist} = 840\ t^3$ m/s^2; b) v_{ist} = 2+6 t m/s; a_{ist} = 6 m/s^2; c) v_{ist} = 3+cos t m/s; a_{ist} = –sen t m/s^2

d)
$$v_{ist} = (2 - \frac{2}{3}t)\exp(-t/3)$$
$$a_{ist} = (\frac{2t}{9} - \frac{4}{3})\exp(-t/3)$$

Ad2. Calcolare la derivata rispetto a t della funzione $E(t) = \frac{1}{2}m[v(t)]^2$ dove $v(t) = bt^4$ e b è una costante.
[Risposta: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 4mb^2t^7$ **]**

Ad3. Calcolare le componenti del vettore velocità e del vettore accelerazione dato il vettore spostamento, dove s è misurato in metri, t in secondi e le costanti hanno opportune unità di misura:
a) $\mathbf{s}(t) = 8\,t\,\mathbf{i} + 16t^2\,\mathbf{j}$ b) $\mathbf{s}(t) = 2\,t^2\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j}$ c) $\mathbf{s}(t) = 2\,t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$
[Risposte:a) $\mathbf{v}(t) = 8\ \mathbf{i} + 32t\mathbf{j}$; $\mathbf{a}(t) = 32\mathbf{j}$; b) $\mathbf{v}(t) = 4t\,\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\mathbf{a}(t) = 4\,\mathbf{i}$; c) $\mathbf{v}(t) = 4t\ \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{a}(t) = 4\ \mathbf{i}$]

Ad4. Calcolare il modulo del vettore spostamento, del vettore velocità e del vettore accelerazione in corrispondenza di t = 2 s, relativi all'esercizio precedente.
[Risposte: a) $|\mathbf{s}| = 66\text{m}; |\text{v}| = 64.5\text{ m/s}; |\text{a}| = 32\text{m/s}^2$ **;** b) $|\mathbf{s}| = 10\text{m}; |\text{v}| = 8.5\text{ m/s}; |\text{a}| = 4\text{m/s}^2$ **;**
c) $|\mathbf{s}| = 8.24\text{m}; |\text{v}| = 8.24\text{ m/s}; |\text{a}| = 4\text{m/s}^2$ **]**

Ad5. Un pendolo di lunghezza L = 39.2 cm oscilla all'interno di un mezzo viscoso con moto armonico smorzato, secondo la legge: $s(t) = L\exp(-\lambda t)\cos 3t$ .Determinare:
a) la costante di tempo λ, sapendo che la velocità iniziale è $v(0) = -19.6\,\text{cm/s}$
b) l'accelerazione $a(t)$ in funzione del tempo
[Risposta: λ = 0.5 s^{-1}]

APPLICAZIONE DEL CALCOLO INTEGRALE ALLA CINEMATICA

Ae1. Un punto materiale è sottoposto all'accelerazione variabile col tempo secondo la relazione $a(t) = bt$, dove b = 2 m/s^3. Sapendo che all'istante iniziale $x(0) = 0$ e $v(0) = 2$ m/s, calcolare la velocità e la posizione del punto in funzione del tempo e dopo 2 s dalla partenza.

[Risposta: v(t) = 1 m/s$^3t^2$ +2 m/s; $r(t)$ = $\frac{1}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}^3}t^3 + v_0 t$; v(2) = 6m/s; r(2) = 6.67 m]

Ae2. Un punto materiale è sottoposto all'accelerazione variabile secondo la relazione $a(t) = kt^2 + ct$, dove k = 3 m/s^4 e c = 1m/s^3. Sapendo che all'istante iniziale $x(0) = 0$ e $v(0) = 0$, calcolare la velocità e la posizione del punto in funzione del tempo e dopo 1 s dalla partenza.

[Risposta**:** v(t) = $\frac{k}{3}t^3 + \frac{c}{2}t^2$; $r(t)$ = $\frac{k}{12}t^4 + \frac{c}{6}t^3$; v(1) = 1.5 m/s; r(1) = 0.42 m

Ae3. Il vettore accelerazione di un punto materiale è dato da $\mathbf{a}(t) = (4\text{m/s}^2)\,\mathbf{i}$. Calcolare i vettori posizione $\mathbf{r}(t)$ e velocità $\mathbf{v}(t)$, sapendo che all'istante t = 0 velocità e posizione valgono rispettivamente: $\mathbf{v}(0) = (-2\text{m/s})\,\mathbf{i} + (4\text{m/s})\,\mathbf{j}$ e $\mathbf{r}(0) = (1\text{m})\,\mathbf{i} - (6\text{m})\,\mathbf{j}$.

[Risposta: $\mathbf{v}(t) = [(4\text{s}^{-1}t - 2)\text{m/s}]\ \mathbf{i} + (4\text{m/s})\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = [(2\text{s}^{-2}t^2 - 2\text{s}^{-1}t + 1)\text{m}]\ \mathbf{i} + [(4\text{s}^{-1}t - 6)\text{m}]\mathbf{j}$

Ae4: In riferimento all'esercizio precedente, calcolare le componenti dei vettori velocità e posizione relativi all'istante t = 1 s.

[Risposta: $\mathbf{v}(1) = (2\text{m/s})\ \mathbf{i} + (4\text{m/s})\mathbf{j}$, $\mathbf{r}(1) = (1\text{m})\ \mathbf{i} - (2\text{m})\mathbf{j}$

Ae5. Un punto materiale, partendo dall'origine del sistema di riferimento, si muove con velocità $v(t) = k\sqrt{t}$ dove k = 2 m·s$^{-3/2}$. Calcolare lo spazio percorso dopo 2 s dalla partenza.

[Risposta: $s(2)$ = 3.77 m]

Ae6. Un punto materiale si muove con velocità $v(t) = e^{kt}$, dove k = 2 s^{-1}, t è misurato in secondi e v in m/s. Calcolare lo spazio percorso nell'intervallo tra 1s e 2 s.

[Risposta: s = 23.6 m]

Ae7. Calcolare il modulo del vettore posizione in funzione del tempo, sapendo che il vettore velocità è dato da: $\mathbf{v}(t) = 2t^2\,\mathbf{i} + \exp(t)\,\mathbf{j}$ e che, in corrispondenza di t = 1 s, la posizione del punto è rappresentata dal vettore: $\mathbf{r}(1) = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \exp(1)\,\mathbf{j}$.

[Risposta: $|\mathbf{r}| = \sqrt{\frac{4}{9}t^6 + \exp(2t)}$]