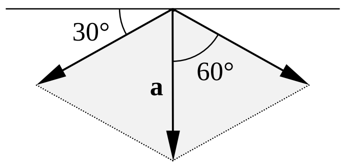
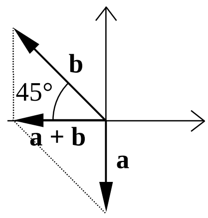
RAPPRESENTAZIONE E COMPOSIZIONE DI VETTORI

Aa1. Il vettore **a** ha modulo |**a**| = 5, è diretto come la verticale ed è scomposto secondo due direzioni, una formante un angolo di 30° con l'orizzontale e un'altra formante un angolo di 60° con la verticale. Le due componenti hanno modulo rispettivamente pari a
(A) 4.33, 2.5 (B) 4.33, 4.33 (C) 2.5, 2.5 (D) 2.5, 4.33 **(E) 5, 5**



SOLUZIONE. Si tracciano le due rette indicate per il punto di applicazione del vettore e le loro due parallele per il secondo estremo del vettore costruendo così un parallelogramma di cui **a** è una diagonale. Il parallelogramma della figura, essendo diviso da **a** in due triangoli equilateri, ha lati tutti uguali alla diagonale; i vettori in cui **a** è scomposto hanno entrambi modulo pari a 5.

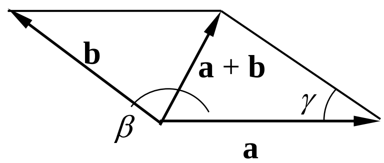
Aa2. Il modulo di un vettore diretto secondo la verticale discendente vale |**a**| = 5. Si somma **a** con un vettore **b** formante un angolo di 45° con l'orizzontale. Se il vettore risultante **a** + **b** ha componente verticale nulla, il modulo di **b** vale
(A) 5 **(B) 7.07** (C) 9.80 (D) 12.5
(E) 68.3



SOLUZIONE. Scomponendo b lungo gli assi, si ha: |**b**| cos(45°) = |**a+b**| e

|**b**| sin(45°) = |**a**| , da cui si ricava $|\mathbf{b}| = \dfrac{|\,\mathbf{a}\,|}{\sin 45°} = 7.07$

Aa3. Due vettori **a** e **b** hanno modulo |**a**| = 5 e |**b**| = 4; se la loro somma ha modulo |**a** + **b**| = 3 l'angolo formato tra **a** e **b** è pari a
(A) 143.1° (B) 9.8° (C) 90° (D) 53.1° (E) 36.9°



SOLUZIONE. Si tratta di calcolare l'angolo β, supplementare di γ, che appartiene al triangolo di cui si conoscono i tre lati: |**a**|, |**b**| e |**a** + **b**|; tale angolo si può ricavare direttamente dalla relazione trigonometrica nota come il teorema di Carnot:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\gamma$$

Poiché γ = 180°– β, cosγ = – cos β,

si ricava $\cos\beta = \dfrac{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2}{2|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \dfrac{9-25-16}{40} = -0.8 \Rightarrow \beta = 143{,}1°$

È istruttivo risolvere il problema per via algebrica mediante le componenti dei vettori. Allineiamo il primo vettore lungo l'asse x: **a** = 5**i** e poniamo **b** = b_x**i** + b_y**j**. Le incognite sono le componenti cartesiane di **b** che soddisfano alle relazioni

$$\left.\begin{aligned} |\mathbf{b}|^2 &= b_x^2 + b_y^2 = 16 \\ |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= (5+b_x)^2 + b_y^2 = 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow b_x^2 - (5+b_x)^2 = -25 - 10b_x = 7$$

$$b_x = -\frac{32}{10} = -3.2$$

Sostituendo b_x nel prodotto scalare si ha:

$$|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\beta = |\mathbf{a}|\cdot b_x \Rightarrow b\cos\beta = \frac{b_x}{b} = \frac{-3.2}{4} = -0.8$$

$$\beta = \cos^{-1}(-0.8) = 143.1°$$

Aa4. Si scompone il vettore **a** = $a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$ lungo due direzioni **u** e **v** che formano con l'asse *x* angoli ϑ = 30° e φ = 90°, ovvero $\mathbf{i}\,\hat{}\,\mathbf{u} = +30°$, $\mathbf{i}\,\hat{}\,\mathbf{v} = +90°$. Se a_x = 3, a_y = 4, la componente a_u vale
(A) 0.69 (B) 2.27 **(C) 3.46** (D) 4.62 (E) 5

SOLUZIONE. Proponiamo la soluzione del caso generale, con angoli ϑ e φ qualsiasi. Considero il riferimento ortogonale individuato dai versori **i** e **j** e il riferimento non ortogonale individuato da **u** e **v**, il vettore **a** viene espresso nei due riferimenti come $\mathbf{a} = a_u\mathbf{u} + a_v\mathbf{v} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$; se indichiamo con $(a_{u_x} a_{u_y})$ e (a_{v_x}, a_{v_y}) le componenti a_u ed a_v nel sistema di riferimento individuato da **i** e **j**, le equazioni di trasformazione sono:

$$\begin{array}{l} a_u\mathbf{u} = a_{u_x}\mathbf{i} + a_{u_y}\mathbf{j} \\ a_v\mathbf{v} = a_{v_x}\mathbf{i} + a_{v_y}\mathbf{j} \end{array} \Rightarrow \mathbf{a} = (a_{u_x} + a_{v_x})\mathbf{i} + (a_{u_y} + a_{v_y})\mathbf{j} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$$

Utilizzando le relazioni trigonometriche, otteniamo che

$$\begin{array}{l} a_x = a_{u_x} + a_{v_x} = a_u\cos\vartheta + a_v\cos\varphi \\ a_y = a_{u_y} + a_{v_y} = a_u\mathrm{sen}\vartheta + a_v\mathrm{sen}\varphi \end{array}$$

Risolvendo questo sistema con la regola di Cramer, si ottengono le componenti a_u e a_v del vettore

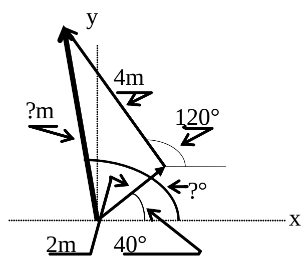
$$a_u = \frac{\begin{vmatrix} a_x & \cos\varphi \\ a_y & \mathrm{sen}\varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\vartheta & \cos\varphi \\ \mathrm{sen}\vartheta & \mathrm{sen}\varphi \end{vmatrix}} = \frac{a_x\mathrm{sen}\varphi - a_y\cos\varphi}{\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\varphi - \mathrm{sen}\vartheta\,\cos\varphi},\; a_y = \frac{\begin{vmatrix} \cos\vartheta & a_x \\ \mathrm{sen}\vartheta & a_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\vartheta & \cos\varphi \\ sen\vartheta & \mathrm{sen}\varphi \end{vmatrix}} = \frac{a_y\cos\vartheta - a_x\mathrm{sen}\vartheta}{\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\varphi - \mathrm{sen}\vartheta\,\cos\varphi}$$

Poiché nel nostro caso $\vartheta = 30°$ e $\varphi = 90°$, la soluzione può essere più semplice; infatti

$$a_u = \frac{a_x}{\cos 30°} = 3.46 \quad \text{e} \quad a_v = a_y - a_u \sin 30° = 2.27$$

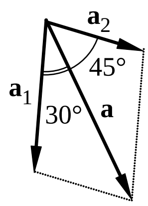
Aa5. Tra le seguenti affermazioni sono vere
(A) il coseno di un radiante è minore di cos60°
(B) un angolo in radianti è il rapporto tra lunghezza di un arco di cerchio centrato al vertice compreso tra le due semirette e la lunghezza della circonferenza di pari raggio
(C) per angoli minori di 5° la differenza tra misura dell'angolo in radianti e seno dell'angolo è al più di qualche parte su diecimila*
(D) in un angolo giro vi sono 360 radianti
(E) un angolo di 90° corrisponde a 1.57 radianti*

Aa6. La risultante di uno spostamento di 2 m nella direzione che forma un angolo di 40° con l'asse *x* e un successivo spostamento di 4 m nella direzione che forma un angolo di 120° con l'asse *x* è di circa
(A) 5.2 m a 99° (B) 5.0m a 5°38' (C) 6.0m a 93°
(D) 4.77 m a 96° (E) 6.1 m a 80°



Aa7. Un vettore **a** = 5**j** è scomposto nella somma di due vettori **b**, **c** con **b** = 3**i**+4**j** e **c** = c_x **i**+ c_y **j**. Tra le seguenti affermazioni sono vere (segnare con una crocetta le affermazioni esatte)
(A) la componente c_x vale –3*
(B) la componente c_y vale +1*
(C) la somma dei moduli di **b** e **c** è maggiore del modulo di **a***
(D) l'angolo formato tra **c** e **b** è pari a circa 53°
(E) l'angolo tra **a** e **c** è pari a circa 72°*

Aa8 Il vettore **a** viene scomposto nei due vettori $\mathbf{a}_1$ ed $\mathbf{a}_2$ della figura. Se $|\mathbf{a}_1| = 3$ il modulo di **a** vale circa



(A) 2.60 (B) 3.00 **(C) 4.10** (D) 4.50
(E) 5.00

Aa9. dato il vettore **A** = – 3**i** + 2**j** + 4**k** , determinare il vettore **B** parallelo ad A di lunghezza 10.
(A) **B** = 30**i** – 20**j** – 40**k** 0.60 (B) **B** = – 30**i** + 20**j** + 40**k**
(C) $\mathbf{B} = -\frac{30}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{20}{\sqrt{29}}\mathbf{j} + \frac{40}{\sqrt{29}}\mathbf{k}$ *

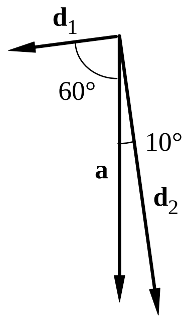
Aa10 Dimostrare che i vettori dati, se disposti punta-coda, formano un triangolo:
a) **A** = 4**i** + 1**j**, **B** = – 2**i** + 4**j** e **C** = – 2**i** – 5**j**;
b) **A** = 2**i** + 1**j**, **B** = 1**i** + 4**j** e **C** = – 3**i** – 5**j**

Aa11. Ci si sposta di 20 m dall'origine di un sistema cartesiano in una direzione che forma un angolo antiorario di 210° con l'asse *x*. Le coordinate (*x*,*y*) del punto di arrivo sono (in metri)
(A) (17.3, –10) (B) (–12.5,15) (C) (–1.5,21.5) **(D) (–17.3,–10)** (E) (14.1 ,–14.1)

Aa12. Due vettori **a** e **b** hanno modulo |**a**| = 5 e |**b**| = 4; se la loro differenza ha modulo |**a** – **b**| = 3 l'angolo formato tra **a** e **b** è pari a
(A) 143.1° **(B) 36.9°** (C) 90° (D) 53.1° (E) __________

Aa13. Si scompone il vettore $a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$ lungo due assi **u** e **v**. La componente a_u lungo l'asse **u** che forma un angolo di +30° con l'asse delle *x* vale $a_u = +3$; la componente a_v lungo il secondo asse **v**, che forma un angolo di +120° con l'asse delle *x*, vale $a_v = +4$. La componente a_x vale
(A) 0.60 (B) 3.46 (C) 5 (D) 5.50 (E) 6.08

Aa14. Il vettore **a** = –5**j** viene scomposto lungo le due direzioni $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$ della figura.
Le componenti lungo $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$ hanno modulo pari a circa
(A) 0.92; 4.61 (B) 4.00; 1.00 (C) 0.88; 4.77
(D) 1.00; 5.00 (E) 2; 4.92



PRODOTTO SCALARE E VETTORIALE

Ab1. Il prodotto scalare tra **a** = 5**i**–6**j**+7**k** e **b** = –5**i**+6**j**–7**k** è uguale a
(A) –110 (B) |**a**||**b**| **(C) –|a|²** (D) |**a**|² (E) |**b**|²
SOLUZIONE. Il prodotto scalare, uguale alla somma dei prodotti delle componenti omologhe, è
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -5 \times 5 - 6 \times 6 - 7 \times 7 = -110$.
In questo caso particolare, in cui **a** e **b** hanno componenti uguali ed opposte, l'angolo formato dai vettori è di 180° e quindi $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -|\mathbf{a}|^2 = -|\mathbf{b}|^2$. Le soluzioni (A) e (C) sono entrambe accettabili

Ab2. L'angolo ϑ formato tra due vettori **a** e **b** con moduli dati da |**a**| = 4, |**b**| = 3 e prodotto scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 10$ vale
(A) 27° 15' (B) 30° **(C) 33° 33'** (D) 45° (E) 56° 26'

SOLUZIONE. $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\vartheta = (4\cdot3)\cos\vartheta = 10 \Rightarrow \cos\vartheta = 0.8333 \Rightarrow \vartheta \approx 33°\ 33'$

Ab3. L'angolo formato dai due vettori **a** = 8**i**–6**j** e **b** = 3**i**+4**j** vale, in valore assoluto
(A) 16º 16' (B) 36º 52' (C) 43º 8' (D) 73º 44' **(E) 90º**

SOLUZIONE. Basta osservare che $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ oppure, in modo equivalente, che $\frac{a_x}{a_y}=-\frac{b_y}{b_x}$, per dedurre che i vettori sono perpendicolari.

Ab4. Dati i tre vettori **a** = 3**i**, **b** = –2**i**, **c** = 6**j** il modulo del vettore **d** = **a** × (**b** × **c**) – (**a** × **b**) × **c** è pari a
(A) 0 (B) 6 (C) 12 (D) 18 **(E) 36**
SOLUZIONE. Si ha **a** × (**b** × **c**) = 3**i** × (–12**k**) = 36**j** mentre (**a** × **b**) × **c** = 0 × **c** = 0. La risposta corretta è perciò (E). Questo esercizio dimostra che il prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa.

Ab5. Il prodotto vettoriale di due vettori **a**, **b** appartenenti al piano *x*,*y* è diretto nel verso dell'asse *z* e il suo modulo è $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=9$. Se **a** = 3**i** e $|\mathbf{b}|=|b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}|=5$, il valore assoluto della componente $|b_x|$ del vettore **b** lungo *x*, vale
(A) 0 (B) 3 **(C) 4** (D) 5.2 (E) 8.5
SOLUZIONE Calcoliamo il prodotto vettoriale **a** × **b** in forma analitica:
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\mathbf{k}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\mathbf{k}=3b_y\mathbf{k}$. Quindi $3|b_y|=9\Rightarrow|b_y|=3$
Tenendo presente la definizione del modulo del vettore **b**, possiamo ricavare il valore della sua componente b_x lungo l'asse *x*: $b^2=b_x^2+b_y^2\Rightarrow|b_x|=\sqrt{b^2-b_y^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{25-9}=4$

Ab6. L'angolo formato dai due vettori **a** = 8**i**+6**j** e **b** = 3**i**+4**j** vale, in valore assoluto
(A) 16º 16' (B) 36º 52' (C) 43º 8' (D) 73º 44' (E) 90º

Ab7. Dati due vettori **a** e **b**, tali per cui |**a** + **b**| = 7 **e** |**a** – **b**| = 3 il prodotto scalare **a b** vale
(A) 2 (B) 3 (C) 5 **(D) 10** (E) ______

Ab8. Dati due vettori **a, b** con $|\mathbf{a}|=2|\mathbf{b}|$ formanti tra loro un angolo $\alpha = 37°$ con prodotto scalare $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=20$, il modulo |**a**| vale
(A) 7.08 (B) 7.91 (C) 9.36 (D) 10.62 (E) 13.24

Ab9. Dimostrare che i vettori **A** = 2**i** + 1**j**, **B** = 1.5**i** – 3**j** e **C** = – 3.5**i** + 2**j** , disposti punta-coda, sono i lati di un triangolo rettangolo.

Ab10. Dati i vettori **A** = 3**i** + 5**j**, **B** = – 7**i** + b_y**j**, determinare b_y affinché i due vettori risultino perpendicolari.
(A) 0 (B) 3 (C) 4 **(D) 4.2** (E) 8.5

Ab11. Dati i vettori **A** = a_x**i** + 1**j** – 1**k**, **B** = – 1**i** + 2**j** – b_z**k**, determinare a_x e b_z affinché i due vettori risultino paralleli.
(A) 3, –4 (B) –3, 4 (C) 2, 0.5 **(D) –0.5, 2** (E) 4, –3

Ab12. Il prodotto vettoriale **a**×**b** tra due vettori del piano *xy*, con **a** =3**i**+4**j** e **b**=b_x**i**+b_y**j** vale 25**k**.
Se **b** è perpendicolare ad **a**, le componenti cartesiane di **b** valgono
(A) 3, −4 (B) −3, 4 (C) 0, 5 **(D) −4, 3** (E) 4, −3

Ab13. Il prodotto vettoriale di due vettori **a**, **b** appartenenti al piano *x*,*y* è diretto nel verso dell'asse *z* (**k**) e il suo modulo è $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = 9$. Se **a** = 3**i** e il modulo di $|\mathbf{b}| = |b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}| = 9$ il valore assoluto della componente $|b_x|$ del vettore **b** lungo *x*, vale
(A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 5.2 **(E) 8.5**

Ab14. Il modulo di **a** vale 6 mentre **a**·**b** = 18 e |**a**×**b**| = 24. Tra le seguenti affermazioni è **falsa**
(A) **a** e **b** possono essere assunti nel piano del disegno con **a** = 6**i** e **b** = b_x**i** + b_y**j**
(B) |**b**| < |**a**|
(C) |**a** + **b**|> |**a**|
(D) L'angolo formato tra **a** e **b** è acuto
(E) Il vettore **b** è completamente determinato *

Ab15. Dati i vettori **A** = 2**i** + 1**j** + 1**k**, **B** = 1**i**, determinare il vettore **C** di modulo 5 che sia complanare ad **A** e a **B**. Il problema ha una soluzione unica?