Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
1 settembre 2014 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^5$:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Esiste un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ che contenga i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$?

Sì, esistono sempre sottospazi vettoriali che contengono vettori di un dato spazio vettoriale. In questo caso i due esempi più ovvi sono $\mathbb{R}^5$ e il sottospazio generato da questi vettori, cioè il sottospazio

$$V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = \{a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2 + c\underline{v}_3 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

b) Nel caso affermativo della domanda di cui sopra, quali dimensioni può avere detto sottospazio?

Un sottospazio che contenga i tre vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ dovrà contenere almeno il sottospazio generato da essi, cioè V, ed essere contenuto in $\mathbb{R}^5$. Le possibili dimensioni sono quindi tutte le dimensioni da quella di V alla dimensione di $\mathbb{R}^5$, cioè 5. Rimane quindi da calcolare la dimensione di V che è la caratteristica della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ -1 & -5 & 4 \\ 1 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La caratteristica di M è 3 (per il procedimento di Kronecker, si possono scegliere il primo coefficiente in alto a sinistra, poi la matrice 2×2 in alto a sinistra, poi le due prime e la quarta riga) per cui i sottospazi che contengono $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono di dimensione 3, 4 o 5 (inoltre ce n'è un unico di dimensione 3 ed è V e un unico di dimensione 5 ed è $\mathbb{R}^5$).

c) Determinare dei reali a, b, c, d ed e in modo tale che il sottospazio

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} \middle| \, ax + by + cz + dt + eu = 0 \right\}$$

contenga i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

I cinque reali devono soddisfare le condizioni seguenti:

$$\begin{cases} 3a - b + c + d - 5e = 0 \\ 4a - 5b - 6c + 2e = 0 \\ -5a + 4b + 3c - d - e = 0 \end{cases}$$

e sono quindi soluzioni di un sistema lineare di cui la matrice dei coefficienti è M_T. Il sistema è omogeneo con una matrice dei coefficienti di caratteristica 3. Esso ha quindi un insieme di soluzioni che dipendono da due parametri (da quanto accennato alla domanda precedente, c ed e possono essere presi come parametri). Una possibile soluzione è

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 1 \\ d = 0 \\ e = 0 \, . \end{cases}$$

Si verifica in brutta che con questi 5 numeri i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ stanno in W.

Nota: i sottospazi del tipo di W sono esattamente tutti i sottospazi di dimensione 4 che contengono i tre vettori.

Esercizio 2. Siano π e Π i piani di equazione

$$\pi : 4x + 3y - z - 3 = 0$$
$$\Pi : x + \alpha y - 2z + 4 = 0$$

dove α è un reale. Sia r_1 la retta intersezione dei due piani (se esiste).

a) Determinare α in modo tale che i due piani risultino ortogonali.

Un vettore normale a π è il vettore $\underline{n} = (4; 3; -1)$. Un vettore normale a Π è il vettore $\underline{N} = (1; \alpha; -2)$. I due piani sono ortogonali se e solo se $\underline{n}$ e $\underline{N}$ lo sono e questo è vero se e solo se il loro prodotto scalare, cioè $3\alpha + 6$, è nullo. I due piani π e Π sono quindi ortogonali se e solo se $\alpha = -2$.

Per tutto il resto dell'esercizio, prendiamo $\alpha = -2$.

b) Sia r_2 la retta passante per $A(1; -1; -2)$, parallela al piano $z = 0$ e appartenente a π. Determinare il punto di intersezione B tra r_1 e r_2.

Osserviamo inanzittutto che $A \in \pi$ e quindi la domanda ha senso.

Sia $\underline{v}$ il vettore direttore di r_2. Dobbiamo avere che la terza componente di $\underline{v}$ è nulla e $\underline{n} \cdot \underline{v} = 0$ e quindi se $\underline{v} = (a; b; 0)$, $4a + 3b = 0$. Possiamo prendere $a = 3$ e $b = -4$, cioè $\underline{v} = (3; -4; 0)$. I punti di r_2 saranno quindi i punti di coordinate $(1 + 3t; -1 - 4t; -2)$ con $t \in \mathbb{R}$. (Osservazione: è opportuno verificare che tali punti soddisfano tutti l'equazione di π). L'intersezione di r_1 e r_2, se esiste, è uguale all'intersezione di r_2 con Π. Per determinare tale intersezione è sufficiente inserire le coordinate appena determinate nell'equazione di Π. Si ottiene

$$11t + 11 = 0$$

ossia $t = -1$. Abbiamo quindi $B(-2; 3; -2)$. Siccome $B \in \pi$, il punto B appartiene effettivamente a r_1 ed è quindi il punto di intersezione di r_1 e r_2.

Un modo alternativo per procedere era di dire che la retta r_2 è contenuta nel piano $z = -2$ (che è il piano parallelo al piano $z = 0$ passante per A) e determinare le coordinate di B ponendo $z = -2$ nelle equazioni di π e Π. Si otteneva allora immediatamente che r_2 era la retta AB perché la retta AB soddisfa i requisiti di r_2.

c) Determinare le coordinate del punto C di r_1 di ascissa -10.

Come vettore direttore di r_1 possiamo prendere il prodotto vettoriale di $\underline{n}$ e $\underline{N}$. Abbiamo

$$\underline{n} \wedge \underline{N} = (-8; 7; -11) \ .$$

Cerchiamo allora il $t \in \mathbb{R}$ tale che, se $\overrightarrow{BC} = t\underline{n} \wedge \underline{N}$, allora C ha ascissa -10. Risulta $t = 1$ per cui $\overrightarrow{BC} = \underline{n} \wedge \underline{N}$ e $C(-10; 10; -13)$.

Una soluzione alternativa era di porre $x = -6$ nelle equazioni di π e Π e risolvere il sistema (lineare).

d) Determinare l'area del triangolo ABC.

Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = (-3; 4; 0) \wedge (-8; 7; -11) = (-44; -33; 11) = -11 \cdot (4; 3; -1)$$

quindi

$$\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\right\|^2 = 11^2 \cdot 26$$

e

$$\text{area di } ABC = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\right\| = \frac{11}{2}\sqrt{26}$$

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$9x^2 - 36y^2 - 12xz + 12x - 24z - 12 = 0 \ .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

Basta risolvere il sistema

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 0 & -36 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} .$$

Si trova facilmente l'unica soluzione $x = -2$, $y = 0$, $z = -2$. Quindi il centro di σ è il punto $C(-2, 0, -2)$.

b) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & -36 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -12 \\ 6 & 0 & -12 & -12 \end{pmatrix} .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 9x - 6z + 6 = 0 \\ -36y = 0 \\ -6x - 12 = 0 \\ 6x - 12z - 12 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(-2, 0, -2)$. Quindi il centro C è l'unico punto doppio di σ.

c) Dopo aver verificato che il punto $P(2, 0, 1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel punto P.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di P nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(2, 0, 1, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

ossia $3x - 4z - 2 = 0$.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ ha un unico punto doppio, essa è un cono (il cui vertice è proprio il punto doppio).

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
1 settembre 2014 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^5$:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Esiste un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ che contenga i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$?

Sì, esistono sempre sottospazi vettoriali che contengono vettori di un dato spazio vettoriale. In questo caso i due esempi più ovvi sono $\mathbb{R}^5$ e il sottospazio generato da questi vettori, cioè il sottospazio

$$V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = \{ a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2 + c\underline{v}_3 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \}$$

b) Nel caso affermativo della domanda di cui sopra, quali dimensioni può avere detto sottospazio?

Un sottospazio che contenga i tre vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ dovrà contenere almeno il sottospazio generato da essi, cioè V, ed essere contenuto in $\mathbb{R}^5$. Le possibili dimensioni sono quindi tutte le dimensioni da quella di V alla dimensione di $\mathbb{R}^5$, cioè 5. Rimane quindi da calcolare la dimensione di V che è la caratteristica della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \\ -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La caratteristica di M è 3 (per il procedimento di Kronecker, si possono scegliere il primo coefficiente in alto a sinistra, poi la matrice 2×2 in alto a sinistra, poi le due prime e la quarta riga) per cui i sottospazi che contengono $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono di dimensione 3, 4 o 5 (inoltre ce n'è un unico di dimensione 3 ed è V e un unico di dimensione 5 ed è $\mathbb{R}^5$).

c) Determinare dei reali a, b, c, d ed e in modo tale che il sottospazio

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} \middle| \, ax + by + cz + dt + eu = 0 \right\}$$

contenga i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

I cinque reali devono soddisfare le condizioni seguenti:

$$\begin{cases} 3a - b + c + d - 5e = 0 \\ \quad - b - 2c + 4d - 2e = 0 \\ -a \quad - c - 5d + 3e = 0 \end{cases}$$

e sono quindi soluzioni di un sistema lineare di cui la matrice dei coefficienti è M_T. Il sistema è omogeneo con una matrice dei coefficienti di caratteristica 3. Esso ha quindi un insieme di soluzioni che dipendono da due parametri (da quanto accennato alla domanda precedente, c ed e possono essere presi come parametri). Una possibile soluzione è

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 1 \\ d = 0 \\ e = 0\,. \end{cases}$$

Si verifica in brutta che con questi 5 numeri i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ stanno in W.

Nota: i sottospazi del tipo di W sono esattamente tutti i sottospazi di dimensione 4 che contengono i tre vettori.

Esercizio 2. Siano π e Π i piani di equazione

$$\pi : 8x + 3y + z - 3 = 0$$
$$\Pi : x + \alpha y - 2z + 12 = 0$$

dove α è un reale. Sia r_1 la retta intersezione dei due piani (se esiste).

a) Determinare α in modo tale che i due piani risultino ortogonali.

Un vettore normale a π è il vettore $\underline{n} = (8; 3; 1)$. Un vettore normale a Π è il vettore $\underline{N} = (1; \alpha; -2)$. I due piani sono ortogonali se e solo se $\underline{n}$ e $\underline{N}$ lo sono e questo è vero se e solo se il loro prodotto scalare, cioè $3\alpha + 6$, è nullo. I due piani π e Π sono quindi ortogonali se e solo se $\alpha = -2$.

Per tutto il resto dell'esercizio, prendiamo $\alpha = -2$.

b) Sia r_2 la retta passante per $A(1; -1; -2)$, parallela al piano $z = 0$ e appartenente a π. Determinare il punto di intersezione B tra r_1 e r_2.

Osserviamo inanzittutto che $A \in \pi$ e quindi la domanda ha senso.

Sia $\underline{v}$ il vettore direttore di r_2. Dobbiamo avere che la terza componente di $\underline{v}$ è nulla e $\underline{n} \cdot \underline{v} = 0$ e quindi se $\underline{v} = (a; b; 0)$, $8a + 3b = 0$. Possiamo prendere $a = 3$ e $b = -8$, cioè $\underline{v} = (3; -8; 0)$. I punti di r_2 saranno quindi i punti di coordinate $(1 + 3t; -1 - 8t; -2)$ con $t \in \mathbb{R}$. (Osservazione: è opportuno verificare che tali punti soddisfano tutti l'equazione di π). L'intersezione di r_1 e r_2, se esiste, è uguale all'intersezione di r_2 con Π. Per determinare tale intersezione è sufficiente inserire le coordinate appena determinate nell'equazione di Π. Si ottiene

$$19t + 19 = 0$$

ossia $t = -1$. Abbiamo quindi $B(-2; 7; -2)$. Siccome $B \in \pi$, il punto B appartiene effettivamente a r_1 ed è quindi il punto di intersezione di r_1 e r_2.

Un modo alternativo per procedere era di dire che la retta r_2 è contenuta nel piano $z = -2$ (che è il piano parallelo al piano $z = 0$ passante per A) e determinare le coordinate di B ponendo $z = -2$ nelle equazioni di π e Π. Si otteneva allora immediatamente che r_2 era la retta AB perché la retta AB soddisfa i requisiti di r_2.

c) Determinare le coordinate del punto C di r_1 di ascissa -6.

Come vettore direttore di r_1 possiamo prendere il prodotto vettoriale di $\underline{n}$ e $\underline{N}$. Abbiamo

$$\underline{n} \wedge \underline{N} = (-4; 17; -19) \ .$$

Cerchiamo allora il $t \in \mathbb{R}$ tale che, se $\overrightarrow{BC} = t\underline{n} \wedge \underline{N}$, allora C ha ascissa -6. Risulta $t = 1$ per cui $\overrightarrow{BC} = \underline{n} \wedge \underline{N}$ e $C(-6; 24; -21)$.

Una soluzione alternativa era di porre $x = -6$ nelle equazioni di π e Π e risolvere il sistema (lineare).

d) Determinare l'area del triangolo ABC.

Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = (-3; 8; 0) \wedge (-4; 17; -19) = (-152; -57; -19) = -19 \cdot (8; 3; 1)$$

quindi

$$\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\right\|^2 = 19^2 \cdot 74$$

e

$$\text{area di } ABC = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\right\| = \frac{19}{2}\sqrt{74}$$

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$9x^2 - 36y^2 - 3z^2 + 6xz - 6x - 18z - 15 = 0 \ .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

Basta risolvere il sistema

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & -36 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} , \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} .$$

Si trova facilmente l'unica soluzione $x = 1$, $y = 0$, $z = -2$. Quindi il centro di σ è il punto $C(1, 0, -2)$.

b) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & -36 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -9 \\ -3 & 0 & -9 & -15 \end{pmatrix} .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 9x + 3z - 3 = 0 \\ -36y = 0 \\ 3x - 3z - 9 = 0 \\ -3x - 9z - 15 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(1, 0, -2)$. Quindi il centro C è l'unico punto doppio di σ.

c) Dopo aver verificato che il punto $P(2, 0, 1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel punto P.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di P nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(2, 0, 1, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

ossia $3x - z - 5 = 0$.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ ha un unico punto doppio, essa è un cono (il cui vertice è proprio il punto doppio).

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
1 settembre 2014 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^5$:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Esiste un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ che contenga i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$?

Sì, esistono sempre sottospazi vettoriali che contengono vettori di un dato spazio vettoriale. In questo caso i due esempi più ovvi sono $\mathbb{R}^5$ e il sottospazio generato da questi vettori, cioè il sottospazio

$$V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = \{a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2 + c\underline{v}_3 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

b) Nel caso affermativo della domanda di cui sopra, quali dimensioni può avere detto sottospazio?

Un sottospazio che contenga i tre vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ dovrà contenere almeno il sottospazio generato da essi, cioè V, ed essere contenuto in $\mathbb{R}^5$. Le possibili dimensioni sono quindi tutte le dimensioni da quella di V alla dimensione di $\mathbb{R}^5$, cioè 5. Rimane quindi da calcolare la dimensione di V che è la caratteristica della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La caratteristica di M è 3 (per il procedimento di Kronecker, si possono scegliere il primo coefficiente in alto a sinistra, poi la matrice 2×2 in alto a sinistra, poi le due prime e la quarta riga) per cui i sottospazi che contengono $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono di dimensione 3, 4 o 5 (inoltre ce n'è un unico di dimensione 3 ed è V e un unico di dimensione 5 ed è $\mathbb{R}^5$).

c) Determinare dei reali a, b, c, d ed e in modo tale che il sottospazio

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} \middle| \, ax + by + cz + dt + eu = 0 \right\}$$

contenga i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

I cinque reali devono soddisfare le condizioni seguenti:

$$\begin{cases} 3a - b + c + d - 5e = 0 \\ 3a - 4b - 5c + d + e = 0 \\ -4a + 3b + 2c - 2d = 0 \end{cases}$$

e sono quindi soluzioni di un sistema lineare di cui la matrice dei coefficienti è M_T. Il sistema è omogeneo con una matrice dei coefficienti di caratteristica 3. Esso ha quindi un insieme di soluzioni che dipendono da due parametri (da quanto accennato alla domanda precedente, c ed e possono essere presi come parametri). Una possibile soluzione è

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 1 \\ d = 0 \\ e = 0 \,. \end{cases}$$

Si verifica in brutta che con questi 5 numeri i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ stanno in W.

Nota: i sottospazi del tipo di W sono esattamente tutti i sottospazi di dimensione 4 che contengono i tre vettori.

Esercizio 2. Siano π e Π i piani di equazione

$$\pi : -2x + 3y - 4z - 3 = 0$$
$$\Pi : x + \alpha y - 2z - 8 = 0$$

dove α è un reale. Sia r_1 la retta intersezione dei due piani (se esiste).

a) Determinare α in modo tale che i due piani risultino ortogonali.

Un vettore normale a π è il vettore $\underline{n} = (-2; 3; -4)$. Un vettore normale a Π è il vettore $\underline{N} = (1; \alpha; -2)$. I due piani sono ortogonali se e solo se $\underline{n}$ e $\underline{N}$ lo sono e questo è vero se e solo se il loro prodotto scalare, cioè $3\alpha + 6$, è nullo. I due piani π e Π sono quindi ortogonali se e solo se $\alpha = -2$.

Per tutto il resto dell'esercizio, prendiamo $\alpha = -2$.

b) Sia r_2 la retta passante per $A(1; -1; -2)$, parallela al piano $z = 0$ e appartenente a π. Determinare il punto di intersezione B tra r_1 e r_2.

Osserviamo inanzittutto che $A \in \pi$ e quindi la domanda ha senso.

Sia $\underline{v}$ il vettore direttore di r_2. Dobbiamo avere che la terza componente di $\underline{v}$ è nulla e $\underline{n} \cdot \underline{v} = 0$ e quindi se $\underline{v} = (a; b; 0)$, $-2a + 3b = 0$. Possiamo prendere $a = 3$ e $b = 2$, cioè $\underline{v} = (3; 2; 0)$. I punti di r_2 saranno quindi i punti di coordinate $(1 + 3t; -1 + 2t; -2)$ con $t \in \mathbb{R}$. (Osservazione: è opportuno verificare che tali punti soddisfano tutti l'equazione di π). L'intersezione di r_1 e r_2, se esiste, è uguale all'intersezione di r_2 con Π. Per determinare tale intersezione è sufficiente inserire le coordinate appena determinate nell'equazione di Π. Si ottiene

$$-t - 1 = 0$$

ossia $t = -1$. Abbiamo quindi $B(-2; -3; -2)$. Siccome $B \in \pi$, il punto B appartiene effettivamente a r_1 ed è quindi il punto di intersezione di r_1 e r_2.

Un modo alternativo per procedere era di dire che la retta r_2 è contenuta nel piano $z = -2$ (che è il piano parallelo al piano $z = 0$ passante per A) e determinare le coordinate di B ponendo $z = -2$ nelle equazioni di π e Π. Si otteneva allora immediatamente che r_2 era la retta AB perché la retta AB soddisfa i requisiti di r_2.

c) Determinare le coordinate del punto C di r_1 di ascissa -16.

Come vettore direttore di r_1 possiamo prendere il prodotto vettoriale di $\underline{n}$ e $\underline{N}$. Abbiamo

$$\underline{n} \wedge \underline{N} = (-14; -8; 1) \ .$$

Cerchiamo allora il $t \in \mathbb{R}$ tale che, se $\overrightarrow{BC} = t\underline{n} \wedge \underline{N}$, allora C ha ascissa -16. Risulta $t = 1$ per cui $\overrightarrow{BC} = \underline{n} \wedge \underline{N}$ e $C(-16; -11; -1)$.

Una soluzione alternativa era di porre $x = -6$ nelle equazioni di π e Π e risolvere il sistema (lineare).

d) Determinare l'area del triangolo ABC.

Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = (-3; -2; 0) \wedge (-14; -8; 1) = (-2; 3; -4) = -1 \cdot (2; -3; 4)$$

quindi

$$\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\right\|^2 = 29$$

e

$$\text{area di } ABC = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{29}$$

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$9x^2 - 36y^2 + 12xz - 12x - 24z - 12 = 0 \ .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

Basta risolvere il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ 0 & -36 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} .$$

Si trova facilmente l'unica soluzione $x = 2$, $y = 0$, $z = -2$. Quindi il centro di σ è il punto $C(2, 0, -2)$.

b) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & -36 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -12 \\ -6 & 0 & -12 & -12 \end{pmatrix} .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 9x + 6z - 6 = 0 \\ -36y = 0 \\ 6x - 12 = 0 \\ -6x - 12z - 12 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(2, 0, -2)$. Quindi il centro C è l'unico punto doppio di σ.

c) Dopo aver verificato che il punto $P(2, 0, 1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel punto P.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di P nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(2, 0, 1, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

ossia $3x - 6 = 0$.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ ha un unico punto doppio, essa è un cono (il cui vertice è proprio il punto doppio).

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
1 settembre 2014 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^5$:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Esiste un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ che contenga i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$?

Sì, esistono sempre sottospazi vettoriali che contengono vettori di un dato spazio vettoriale. In questo caso i due esempi più ovvi sono $\mathbb{R}^5$ e il sottospazio generato da questi vettori, cioè il sottospazio

$$V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = \{a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2 + c\underline{v}_3 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

b) Nel caso affermativo della domanda di cui sopra, quali dimensioni può avere detto sottospazio?

Un sottospazio che contenga i tre vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ dovrà contenere almeno il sottospazio generato da essi, cioè V, ed essere contenuto in $\mathbb{R}^5$. Le possibili dimensioni sono quindi tutte le dimensioni da quella di V alla dimensione di $\mathbb{R}^5$, cioè 5. Rimane quindi da calcolare la dimensione di V che è la caratteristica della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & -6 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

La caratteristica di M è 3 (per il procedimento di Kronecker, si possono scegliere il primo coefficiente in alto a sinistra, poi la matrice 2×2 in alto a sinistra, poi le due prime e la quarta riga) per cui i sottospazi che contengono $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono di dimensione 3, 4 o 5 (inoltre ce n'è un unico di dimensione 3 ed è V e un unico di dimensione 5 ed è $\mathbb{R}^5$).

c) Determinare dei reali a, b, c, d ed e in modo tale che il sottospazio

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} \middle| \, ax + by + cz + dt + eu = 0 \right\}$$

contenga i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

I cinque reali devono soddisfare le condizioni seguenti:

$$\begin{cases} 3a - b + c + d - 5e = 0 \\ -a - c + 5d - 3e = 0 \\ -b - 2c - 6d + 4e = 0 \end{cases}$$

e sono quindi soluzioni di un sistema lineare di cui la matrice dei coefficienti è M_T. Il sistema è omogeneo con una matrice dei coefficienti di caratteristica 3. Esso ha quindi un insieme di soluzioni che dipendono da due parametri (da quanto accennato alla domanda precedente, c ed e possono essere presi come parametri). Una possibile soluzione è

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 1 \\ d = 0 \\ e = 0\,. \end{cases}$$

Si verifica in brutta che con questi 5 numeri i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ stanno in W.

Nota: i sottospazi del tipo di W sono esattamente tutti i sottospazi di dimensione 4 che contengono i tre vettori.

Esercizio 2. Siano π e Π i piani di equazione

$$\pi : 2x + 3y - 2z - 3 = 0$$
$$\Pi : x + \alpha y - 2z = 0$$

dove α è un reale. Sia r_1 la retta intersezione dei due piani (se esiste).

a) Determinare α in modo tale che i due piani risultino ortogonali.

Un vettore normale a π è il vettore $\underline{n} = (2; 3; -2)$. Un vettore normale a Π è il vettore $\underline{N} = (1; \alpha; -2)$. I due piani sono ortogonali se e solo se $\underline{n}$ e $\underline{N}$ lo sono e questo è vero se e solo se il loro prodotto scalare, cioè $3\alpha + 6$, è nullo. I due piani π e Π sono quindi ortogonali se e solo se $\alpha = -2$.

Per tutto il resto dell'esercizio, prendiamo $\alpha = -2$.

b) Sia r_2 la retta passante per $A(1; -1; -2)$, parallela al piano $z = 0$ e appartenente a π. Determinare il punto di intersezione B tra r_1 e r_2.

Osserviamo inanzittutto che $A \in \pi$ e quindi la domanda ha senso.

Sia $\underline{v}$ il vettore direttore di r_2. Dobbiamo avere che la terza componente di $\underline{v}$ è nulla e $\underline{n} \cdot \underline{v} = 0$ e quindi se $\underline{v} = (a; b; 0)$, $2a + 3b = 0$. Possiamo prendere $a = 3$ e $b = -2$, cioè $\underline{v} = (3; -2; 0)$. I punti di r_2 saranno quindi i punti di coordinate $(1 + 3t; -1 - 2t; -2)$ con $t \in \mathbb{R}$. (Osservazione: è opportuno verificare che tali punti soddisfano tutti l'equazione di π). L'intersezione di r_1 e r_2, se esiste, è uguale all'intersezione di r_2 con Π. Per determinare tale intersezione è sufficiente inserire le coordinate appena determinate nell'equazione di Π. Si ottiene

$$7t + 7 = 0$$

ossia $t = -1$. Abbiamo quindi $B(-2; 1; -2)$. Siccome $B \in \pi$, il punto B appartiene effettivamente a r_1 ed è quindi il punto di intersezione di r_1 e r_2.

Un modo alternativo per procedere era di dire che la retta r_2 è contenuta nel piano $z = -2$ (che è il piano parallelo al piano $z = 0$ passante per A) e determinare le coordinate di B ponendo $z = -2$ nelle equazioni di π e Π. Si otteneva allora immediatamente che r_2 era la retta AB perché la retta AB soddisfa i requisiti di r_2.

c) Determinare le coordinate del punto C di r_1 di ascissa -12.

Come vettore direttore di r_1 possiamo prendere il prodotto vettoriale di $\underline{n}$ e $\underline{N}$. Abbiamo

$$\underline{n} \wedge \underline{N} = (-10; 2; -7) \ .$$

Cerchiamo allora il $t \in \mathbb{R}$ tale che, se $\overrightarrow{BC} = t\underline{n} \wedge \underline{N}$, allora C ha ascissa -12. Risulta $t = 1$ per cui $\overrightarrow{BC} = \underline{n} \wedge \underline{N}$ e $C(-12; 3; -9)$.

Una soluzione alternativa era di porre $x = -6$ nelle equazioni di π e Π e risolvere il sistema (lineare).

d) Determinare l'area del triangolo ABC.

Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = (-3; 2; 0) \wedge (-10; 2; -7) = (-14; -21; 14) = -7 \cdot (2; 3; -2)$$

quindi

$$\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} \right\|^2 = 7^2 \cdot 17$$

e

$$\text{area di } ABC = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} \right\| = \frac{7}{2}\sqrt{17}$$

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$9x^2 - 36y^2 - 3z^2 - 6xz + 6x - 18z - 15 = 0 \ .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

Basta risolvere il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 0 & -36 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} , \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} .$$

Si trova facilmente l'unica soluzione $x = -1$, $y = 0$, $z = -2$. Quindi il centro di σ è il punto $C(-1, 0, -2)$.

b) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -36 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -9 \\ 3 & 0 & -9 & -15 \end{pmatrix} .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 9x - 3z + 3 = 0 \\ -36y = 0 \\ -3x - 3z - 9 = 0 \\ 3x - 9z - 15 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(-1, 0, -2)$. Quindi il centro C è l'unico punto doppio di σ.

c) Dopo aver verificato che il punto $P(2, 0, 1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel punto P.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di P nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(2, 0, 1, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

ossia $3x - 3z - 3 = 0$.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ ha un unico punto doppio, essa è un cono (il cui vertice è proprio il punto doppio).