

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
1 settembre 2014 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i seguenti vettori di \mathbb{R}^5 :

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Esiste un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^5 che contenga i vettori \underline{v}_1 , \underline{v}_2 e \underline{v}_3 ?

Sì, esistono sempre sottospazi vettoriali che contengono vettori di un dato spazio vettoriale. In questo caso i due esempi più ovvi sono \mathbb{R}^5 e il sottospazio generato da questi vettori, cioè il sottospazio

$$V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = \{a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2 + c\underline{v}_3 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

- b) Nel caso affermativo della domanda di cui sopra, quali dimensioni può avere detto sottospazio?

Un sottospazio che contenga i tre vettori \underline{v}_1 , \underline{v}_2 e \underline{v}_3 dovrà contenere almeno il sottospazio generato da essi, cioè V , ed essere contenuto in \mathbb{R}^5 . Le possibili dimensioni sono quindi tutte le dimensioni da quella di V alla dimensione di \mathbb{R}^5 , cioè 5. Rimane quindi da calcolare la dimensione di V che è la caratteristica della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ -1 & -5 & 4 \\ 1 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La caratteristica di M è 3 (per il procedimento di Kronecker, si possono scegliere il primo coefficiente in alto a sinistra, poi la matrice 2×2 in alto a sinistra, poi le due prime e la quarta riga) per cui i sottospazi che contengono \underline{v}_1 , \underline{v}_2 e \underline{v}_3 sono di dimensione 3, 4 o 5 (inoltre ce n'è un unico di dimensione 3 ed è V e un unico di dimensione 5 ed è \mathbb{R}^5).

c) Determinare dei reali a, b, c, d ed e in modo tale che il sottospazio

$$W = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{array} \right) \mid ax + by + cz + dt + eu = 0 \right\}$$

contenga i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e \underline{v}_3 .

I cinque reali devono soddisfare le condizioni seguenti:

$$\begin{cases} 3a - b + c + d - 5e = 0 \\ 4a - 5b - 6c + 2e = 0 \\ -5a + 4b + 3c - d - e = 0 \end{cases}$$

e sono quindi soluzioni di un sistema lineare di cui la matrice dei coefficienti è M_T . Il sistema è omogeneo con una matrice dei coefficienti di caratteristica 3. Esso ha quindi un insieme di soluzioni che dipendono da due parametri (da quanto accennato alla domanda precedente, c ed e possono essere presi come parametri). Una possibile soluzione è

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 1 \\ d = 0 \\ e = 0. \end{cases}$$

Si verifica in brutta che con questi 5 numeri i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e \underline{v}_3 stanno in W .

Nota: i sottospazi del tipo di W sono esattamente tutti i sottospazi di dimensione 4 che contengono i tre vettori.

Esercizio 2. Siano π e Π i piani di equazione

$$\begin{aligned} \pi &: 4x + 3y - z - 3 = 0 \\ \Pi &: x + \alpha y - 2z + 4 = 0 \end{aligned}$$

dove α è un reale. Sia r_1 la retta intersezione dei due piani (se esiste).

- a) Determinare α in modo tale che i due piani risultino ortogonali.

Un vettore normale a π è il vettore $\underline{n} = (4; 3; -1)$. Un vettore normale a Π è il vettore $\underline{N} = (1; \alpha; -2)$. I due piani sono ortogonali se e solo se \underline{n} e \underline{N} lo sono e questo è vero se e solo se il loro prodotto scalare, cioè $3\alpha + 6$, è nullo. I due piani π e Π sono quindi ortogonali se e solo se $\alpha = -2$.

Per tutto il resto dell'esercizio, prendiamo $\alpha = -2$.

- b) Sia r_2 la retta passante per $A(1; -1; -2)$, parallela al piano $z = 0$ e appartenente a π . Determinare il punto di intersezione B tra r_1 e r_2 .

Osserviamo inanzitutto che $A \in \pi$ e quindi la domanda ha senso.

Sia \underline{v} il vettore direttore di r_2 . Dobbiamo avere che la terza componente di \underline{v} è nulla e $\underline{n} \cdot \underline{v} = 0$ e quindi se $\underline{v} = (a; b; 0)$, $4a + 3b = 0$. Possiamo prendere $a = 3$ e $b = -4$, cioè $\underline{v} = (3; -4; 0)$. I punti di r_2 saranno quindi i punti di coordinate $(1 + 3t; -1 - 4t; -2)$ con $t \in \mathbb{R}$. (Osservazione: è opportuno verificare che tali punti soddisfano tutti l'equazione di π). L'intersezione di r_1 e r_2 , se esiste, è uguale all'intersezione di r_2 con Π . Per determinare tale intersezione è sufficiente inserire le coordinate appena determinate nell'equazione di Π . Si ottiene

$$11t + 11 = 0$$

ossia $t = -1$. Abbiamo quindi $B(-2; 3; -2)$. Siccome $B \in \pi$, il punto B appartiene effettivamente a r_1 ed è quindi il punto di intersezione di r_1 e r_2 .

Un modo alternativo per procedere era di dire che la retta r_2 è contenuta nel piano $z = -2$ (che è il piano parallelo al piano $z = 0$ passante per A) e determinare le coordinate di B ponendo $z = -2$ nelle equazioni di π e Π . Si otteneva allora immediatamente che r_2 era la retta AB perché la retta AB soddisfa i requisiti di r_2 .

- c) Determinare le coordinate del punto C di r_1 di ascissa -10 .

Come vettore direttore di r_1 possiamo prendere il prodotto vettoriale di \underline{n} e \underline{N} . Abbiamo

$$\underline{n} \wedge \underline{N} = (-8; 7; -11) .$$

Cerchiamo allora il $t \in \mathbb{R}$ tale che, se $\overrightarrow{BC} = t\underline{n} \wedge \underline{N}$, allora C ha ascissa -10 . Risulta $t = 1$ per cui $\overrightarrow{BC} = \underline{n} \wedge \underline{N}$ e $C(-10; 10; -13)$.

Una soluzione alternativa era di porre $x = -6$ nelle equazioni di π e Π e risolvere il sistema (lineare).

- d) Determinare l'area del triangolo ABC .

Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = (-3; 4; 0) \wedge (-8; 7; -11) = (-44; -33; 11) = -11 \cdot (4; 3; -1)$$

quindi

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{BC}\|^2 = 11^2 \cdot 26$$

e

$$\text{area di } ABC = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{BC}\| = \frac{11}{2} \sqrt{26}$$

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Si calcolino gli autovalori di A .

Si ha che

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 - \lambda & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda & -1 \\ 2 & 3 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

(Il calcolo risulta particolarmente semplice se si sostituisce la seconda riga con la somma della seconda e della terza, e poi la terza colonna con la differenza tra la terza e la seconda). Gli autovalori sono pertanto $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ e $\lambda_4 = 2$.

b) Si calcolino gli autovettori di A .

Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_1 = 0$ sono le soluzioni non banali del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 - \lambda_1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 - \lambda_1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda_1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 0 \\ -x - y - 2z + u = 0 \\ x + z - u = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

È quindi facile vedere che gli autovettori relativi a λ_1 sono i multipli non nulli di $\underline{v}_1 = (0, -1, 1, 1)_T$. In modo del tutto analogo si trova che gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 1$ sono i multipli non nulli di $\underline{v}_2 = (0, -1, 1, 0)_T$, quelli relativi a $\lambda_3 = -1$ sono i multipli non nulli di $\underline{v}_3 = (1, -1, 0, 1)_T$ e quelli relativi a $\lambda_4 = 2$ sono i multipli non nulli di $\underline{v}_4 = (1, 0, 0, 1)_T$.

c) Esiste una base di \mathbb{R}^4 fatta da autovettori di A ?

La matrice A è diagonalizzabile, poiché le radici del suo polinomio caratteristico sono tutte reali e distinte. Quindi esiste una base di autovettori. Una possibile scelta è data da $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$.

d) Esiste una base ortonormale di \mathbb{R}^4 fatta da autovettori di A ?

No, perché ciò accade se e solo se la matrice è simmetrica, mentre A non lo è.

Esercizio 4. Sia

$$z = \frac{(\sqrt{3} - i)(1 - i)}{(1 + i)^2}$$

Determinare parte reale, parte immaginaria, modulo e argomento di z^6 .

Poniamo $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 - i$ e $z_3 = 1 + i$. Allora

$$|z_1| = 2, \quad \text{e} \quad |z_2| = |z_3| = \sqrt{2},$$

mentre

$$\arg z_1 = -\frac{\pi}{6}, \quad \arg z_2 = -\frac{\pi}{4}, \quad \arg z_3 = \frac{\pi}{4}$$

quindi

$$|z| = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

e

$$\arg z = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} - 2\frac{\pi}{4} = -\frac{11\pi}{12}.$$

Quindi

$$|z^6| = 8 \quad \text{e} \quad \arg z^6 = -\frac{11\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

La parte reale di z^6 è quindi 0 mentre la sua parte immaginaria è 8, ossia $z^6 = 8i$.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
1 settembre 2014 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i seguenti vettori di \mathbb{R}^5 :

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Esiste un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^5 che contenga i vettori \underline{v}_1 , \underline{v}_2 e \underline{v}_3 ?

Sì, esistono sempre sottospazi vettoriali che contengono vettori di un dato spazio vettoriale. In questo caso i due esempi più ovvi sono \mathbb{R}^5 e il sottospazio generato da questi vettori, cioè il sottospazio

$$V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = \{a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2 + c\underline{v}_3 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

- b) Nel caso affermativo della domanda di cui sopra, quali dimensioni può avere detto sottospazio?

Un sottospazio che contenga i tre vettori \underline{v}_1 , \underline{v}_2 e \underline{v}_3 dovrà contenere almeno il sottospazio generato da essi, cioè V , ed essere contenuto in \mathbb{R}^5 . Le possibili dimensioni sono quindi tutte le dimensioni da quella di V alla dimensione di \mathbb{R}^5 , cioè 5. Rimane quindi da calcolare la dimensione di V che è la caratteristica della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \\ -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La caratteristica di M è 3 (per il procedimento di Kronecker, si possono scegliere il primo coefficiente in alto a sinistra, poi la matrice 2×2 in alto a sinistra, poi le due prime e la quarta riga) per cui i sottospazi che contengono \underline{v}_1 , \underline{v}_2 e \underline{v}_3 sono di dimensione 3, 4 o 5 (inoltre ce n'è un unico di dimensione 3 ed è V e un unico di dimensione 5 ed è \mathbb{R}^5).

c) Determinare dei reali a, b, c, d ed e in modo tale che il sottospazio

$$W = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{array} \right) \mid ax + by + cz + dt + eu = 0 \right\}$$

contenga i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e \underline{v}_3 .

I cinque reali devono soddisfare le condizioni seguenti:

$$\begin{cases} 3a - b + c + d - 5e = 0 \\ -b - 2c + 4d - 2e = 0 \\ -a - c - 5d + 3e = 0 \end{cases}$$

e sono quindi soluzioni di un sistema lineare di cui la matrice dei coefficienti è M_T . Il sistema è omogeneo con una matrice dei coefficienti di caratteristica 3. Esso ha quindi un insieme di soluzioni che dipendono da due parametri (da quanto accennato alla domanda precedente, c ed e possono essere presi come parametri). Una possibile soluzione è

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 1 \\ d = 0 \\ e = 0. \end{cases}$$

Si verifica in brutta che con questi 5 numeri i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e \underline{v}_3 stanno in W .

Nota: i sottospazi del tipo di W sono esattamente tutti i sottospazi di dimensione 4 che contengono i tre vettori.

Esercizio 2. Siano π e Π i piani di equazione

$$\begin{aligned} \pi &: 8x + 3y + z - 3 = 0 \\ \Pi &: x + \alpha y - 2z + 12 = 0 \end{aligned}$$

dove α è un reale. Sia r_1 la retta intersezione dei due piani (se esiste).

- a) Determinare α in modo tale che i due piani risultino ortogonali.

Un vettore normale a π è il vettore $\underline{n} = (8; 3; 1)$. Un vettore normale a Π è il vettore $\underline{N} = (1; \alpha; -2)$. I due piani sono ortogonali se e solo se \underline{n} e \underline{N} lo sono e questo è vero se e solo se il loro prodotto scalare, cioè $3\alpha + 6$, è nullo. I due piani π e Π sono quindi ortogonali se e solo se $\alpha = -2$.

Per tutto il resto dell'esercizio, prendiamo $\alpha = -2$.

- b) Sia r_2 la retta passante per $A(1; -1; -2)$, parallela al piano $z = 0$ e appartenente a π . Determinare il punto di intersezione B tra r_1 e r_2 .

Osserviamo inanzitutto che $A \in \pi$ e quindi la domanda ha senso.

Sia \underline{v} il vettore direttore di r_2 . Dobbiamo avere che la terza componente di \underline{v} è nulla e $\underline{n} \cdot \underline{v} = 0$ e quindi se $\underline{v} = (a; b; 0)$, $8a + 3b = 0$. Possiamo prendere $a = 3$ e $b = -8$, cioè $\underline{v} = (3; -8; 0)$. I punti di r_2 saranno quindi i punti di coordinate $(1 + 3t; -1 - 8t; -2)$ con $t \in \mathbb{R}$. (Osservazione: è opportuno verificare che tali punti soddisfano tutti l'equazione di π). L'intersezione di r_1 e r_2 , se esiste, è uguale all'intersezione di r_2 con Π . Per determinare tale intersezione è sufficiente inserire le coordinate appena determinate nell'equazione di Π . Si ottiene

$$19t + 19 = 0$$

ossia $t = -1$. Abbiamo quindi $B(-2; 7; -2)$. Siccome $B \in \pi$, il punto B appartiene effettivamente a r_1 ed è quindi il punto di intersezione di r_1 e r_2 .

Un modo alternativo per procedere era di dire che la retta r_2 è contenuta nel piano $z = -2$ (che è il piano parallelo al piano $z = 0$ passante per A) e determinare le coordinate di B ponendo $z = -2$ nelle equazioni di π e Π . Si otteneva allora immediatamente che r_2 era la retta AB perché la retta AB soddisfa i requisiti di r_2 .

- c) Determinare le coordinate del punto C di r_1 di ascissa -6 .

Come vettore direttore di r_1 possiamo prendere il prodotto vettoriale di \underline{n} e \underline{N} . Abbiamo

$$\underline{n} \wedge \underline{N} = (-4; 17; -19) .$$

Cerchiamo allora il $t \in \mathbb{R}$ tale che, se $\overrightarrow{BC} = t\underline{n} \wedge \underline{N}$, allora C ha ascissa -6 . Risulta $t = 1$ per cui $\overrightarrow{BC} = \underline{n} \wedge \underline{N}$ e $C(-6; 24; -21)$.

Una soluzione alternativa era di porre $x = -6$ nelle equazioni di π e Π e risolvere il sistema (lineare).

- d) Determinare l'area del triangolo ABC .

Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = (-3; 8; 0) \wedge (-4; 17; -19) = (-152; -57; -19) = -19 \cdot (8; 3; 1)$$

quindi

$$\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} \right\|^2 = 19^2 \cdot 74$$

e

$$\text{area di } ABC = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} \right\| = \frac{19}{2} \sqrt{74}$$

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Si calcolino gli autovalori di A .

Si ha che

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 - \lambda & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

(Il calcolo risulta particolarmente semplice se si sostituisce la seconda riga con la somma della seconda e della terza, e poi la terza colonna con la differenza tra la terza e la seconda). Gli autovalori sono pertanto $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ e $\lambda_4 = -2$.

b) Si calcolino gli autovettori di A .

Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_1 = 0$ sono le soluzioni non banali del sistema

$$\begin{pmatrix} -2 - \lambda_1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 - \lambda_1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda_1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia

$$\begin{cases} -2x - y - z = 0 \\ -x - y - 2z + u = 0 \\ x + z - u = 0 \\ -2x - y + -z = 0 \end{cases}$$

È quindi facile vedere che gli autovettori relativi a λ_1 sono i multipli non nulli di $\underline{v}_1 = (0, -1, 1, 1)_T$. In modo del tutto analogo si trova che gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 1$ sono i multipli non nulli di $\underline{v}_2 = (0, -1, 1, 0)_T$, quelli relativi a $\lambda_3 = -1$ sono i multipli non nulli di $\underline{v}_3 = (1, -1, 0, 1)_T$ e quelli relativi a $\lambda_4 = -2$ sono i multipli non nulli di $\underline{v}_4 = (1, 0, 0, 1)_T$.

c) Esiste una base di \mathbb{R}^4 fatta da autovettori di A ?

La matrice A è diagonalizzabile, poiché le radici del suo polinomio caratteristico sono tutte reali e distinte. Quindi esiste una base di autovettori. Una possibile scelta è data da $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$.

d) Esiste una base ortonormale di \mathbb{R}^4 fatta da autovettori di A ?

No, perché ciò accade se e solo se la matrice è simmetrica, mentre A non lo è.

Esercizio 4. Sia

$$z = \frac{(\sqrt{3} + i)(1 + i)}{(1 - i)^2}$$

Determinare parte reale, parte immaginaria, modulo e argomento di z^6 .

Poniamo $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 1 + i$ e $z_3 = 1 - i$. Allora

$$|z_1| = 2, \quad \text{e} \quad |z_2| = |z_3| = \sqrt{2},$$

mentre

$$\arg z_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \arg z_2 = \frac{\pi}{4}, \quad \arg z_3 = -\frac{\pi}{4}$$

quindi

$$|z| = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

e

$$\arg z = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{12}.$$

Quindi

$$|z^6| = 8 \quad \text{e} \quad \arg z^6 = \frac{11\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

La parte reale di z^6 è quindi 0 mentre la sua parte immaginaria è -8 , ossia $z^6 = -8i$.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
1 settembre 2014 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i seguenti vettori di \mathbb{R}^5 :

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Esiste un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^5 che contenga i vettori \underline{v}_1 , \underline{v}_2 e \underline{v}_3 ?

Sì, esistono sempre sottospazi vettoriali che contengono vettori di un dato spazio vettoriale. In questo caso i due esempi più ovvi sono \mathbb{R}^5 e il sottospazio generato da questi vettori, cioè il sottospazio

$$V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = \{a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2 + c\underline{v}_3 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

- b) Nel caso affermativo della domanda di cui sopra, quali dimensioni può avere detto sottospazio?

Un sottospazio che contenga i tre vettori \underline{v}_1 , \underline{v}_2 e \underline{v}_3 dovrà contenere almeno il sottospazio generato da essi, cioè V , ed essere contenuto in \mathbb{R}^5 . Le possibili dimensioni sono quindi tutte le dimensioni da quella di V alla dimensione di \mathbb{R}^5 , cioè 5. Rimane quindi da calcolare la dimensione di V che è la caratteristica della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La caratteristica di M è 3 (per il procedimento di Kronecker, si possono scegliere il primo coefficiente in alto a sinistra, poi la matrice 2×2 in alto a sinistra, poi le due prime e la quarta riga) per cui i sottospazi che contengono \underline{v}_1 , \underline{v}_2 e \underline{v}_3 sono di dimensione 3, 4 o 5 (inoltre ce n'è un unico di dimensione 3 ed è V e un unico di dimensione 5 ed è \mathbb{R}^5).

c) Determinare dei reali a, b, c, d ed e in modo tale che il sottospazio

$$W = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{array} \right) \mid ax + by + cz + dt + eu = 0 \right\}$$

contenga i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e \underline{v}_3 .

I cinque reali devono soddisfare le condizioni seguenti:

$$\begin{cases} 3a - b + c + d - 5e = 0 \\ 3a - 4b - 5c + d + e = 0 \\ -4a + 3b + 2c - 2d = 0 \end{cases}$$

e sono quindi soluzioni di un sistema lineare di cui la matrice dei coefficienti è M_T . Il sistema è omogeneo con una matrice dei coefficienti di caratteristica 3. Esso ha quindi un insieme di soluzioni che dipendono da due parametri (da quanto accennato alla domanda precedente, c ed e possono essere presi come parametri). Una possibile soluzione è

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 1 \\ d = 0 \\ e = 0. \end{cases}$$

Si verifica in brutta che con questi 5 numeri i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e \underline{v}_3 stanno in W .

Nota: i sottospazi del tipo di W sono esattamente tutti i sottospazi di dimensione 4 che contengono i tre vettori.

Esercizio 2. Siano π e Π i piani di equazione

$$\pi : -2x + 3y - 4z - 3 = 0$$

$$\Pi : x + \alpha y - 2z - 8 = 0$$

dove α è un reale. Sia r_1 la retta intersezione dei due piani (se esiste).

- a) Determinare α in modo tale che i due piani risultino ortogonali.

Un vettore normale a π è il vettore $\underline{n} = (-2; 3; -4)$. Un vettore normale a Π è il vettore $\underline{N} = (1; \alpha; -2)$. I due piani sono ortogonali se e solo se \underline{n} e \underline{N} lo sono e questo è vero se e solo se il loro prodotto scalare, cioè $3\alpha + 6$, è nullo. I due piani π e Π sono quindi ortogonali se e solo se $\alpha = -2$.

Per tutto il resto dell'esercizio, prendiamo $\alpha = -2$.

- b) Sia r_2 la retta passante per $A(1; -1; -2)$, parallela al piano $z = 0$ e appartenente a π . Determinare il punto di intersezione B tra r_1 e r_2 .

Osserviamo innanzitutto che $A \in \pi$ e quindi la domanda ha senso.

Sia \underline{v} il vettore direttore di r_2 . Dobbiamo avere che la terza componente di \underline{v} è nulla e $\underline{n} \cdot \underline{v} = 0$ e quindi se $\underline{v} = (a; b; 0)$, $-2a + 3b = 0$. Possiamo prendere $a = 3$ e $b = 2$, cioè $\underline{v} = (3; 2; 0)$. I punti di r_2 saranno quindi i punti di coordinate $(1 + 3t; -1 + 2t; -2)$ con $t \in \mathbb{R}$. (Osservazione: è opportuno verificare che tali punti soddisfano tutti l'equazione di π). L'intersezione di r_1 e r_2 , se esiste, è uguale all'intersezione di r_2 con Π . Per determinare tale intersezione è sufficiente inserire le coordinate appena determinate nell'equazione di Π . Si ottiene

$$-t - 1 = 0$$

ossia $t = -1$. Abbiamo quindi $B(-2; -3; -2)$. Siccome $B \in \pi$, il punto B appartiene effettivamente a r_1 ed è quindi il punto di intersezione di r_1 e r_2 .

Un modo alternativo per procedere era di dire che la retta r_2 è contenuta nel piano $z = -2$ (che è il piano parallelo al piano $z = 0$ passante per A) e determinare le coordinate di B ponendo $z = -2$ nelle equazioni di π e Π . Si otteneva allora immediatamente che r_2 era la retta AB perché la retta AB soddisfa i requisiti di r_2 .

- c) Determinare le coordinate del punto C di r_1 di ascissa -16 .

Come vettore direttore di r_1 possiamo prendere il prodotto vettoriale di \underline{n} e \underline{N} . Abbiamo

$$\underline{n} \wedge \underline{N} = (-14; -8; 1).$$

Cerchiamo allora il $t \in \mathbb{R}$ tale che, se $\overrightarrow{BC} = t\underline{n} \wedge \underline{N}$, allora C ha ascissa -16 . Risulta $t = 1$ per cui $\overrightarrow{BC} = \underline{n} \wedge \underline{N}$ e $C(-16; -11; -1)$.

Una soluzione alternativa era di porre $x = -6$ nelle equazioni di π e Π e risolvere il sistema (lineare).

- d) Determinare l'area del triangolo ABC .

Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = (-3; -2; 0) \wedge (-14; -8; 1) = (-2; 3; -4) = -1 \cdot (2; -3; 4)$$

quindi

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{BC}\|^2 = 29$$

e

$$\text{area di } ABC = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{BC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{29}$$

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Si calcolino gli autovalori di A .

Si ha che

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 - \lambda & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 1).$$

(Il calcolo risulta particolarmente semplice se si sostituisce la seconda riga con la somma della seconda e della terza, e poi la terza colonna con la differenza tra la terza e la seconda). Gli autovalori sono pertanto $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ e $\lambda_4 = 1$.

b) Si calcolino gli autovettori di A .

Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_1 = 0$ sono le soluzioni non banali del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 - \lambda_1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda_1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ -x - y - 2z + u = 0 \\ x + z - u = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

È quindi facile vedere che gli autovettori relativi a λ_1 sono i multipli non nulli di $\underline{v}_1 = (0, -1, 1, 1)_T$. In modo del tutto analogo si trova che gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 1$ sono i multipli non nulli di $\underline{v}_2 = (0, -1, 1, 0)_T$, quelli relativi a $\lambda_3 = -1$ sono i multipli non nulli di $\underline{v}_3 = (1, -1, 0, 1)_T$ e quelli relativi a $\lambda_4 = 1$ sono i multipli non nulli di $\underline{v}_4 = (1, 0, 0, 1)_T$.

c) Esiste una base di \mathbb{R}^4 fatta da autovettori di A ?

La matrice A è diagonalizzabile, poiché le radici del suo polinomio caratteristico sono tutte reali e distinte. Quindi esiste una base di autovettori. Una possibile scelta è data da $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$.

d) Esiste una base ortonormale di \mathbb{R}^4 fatta da autovettori di A ?

No, perché ciò accade se e solo se la matrice è simmetrica, mentre A non lo è.

Esercizio 4. Sia

$$z = \frac{(\sqrt{3} - i)(1 + i)}{(1 - i)^2}$$

Determinare parte reale, parte immaginaria, modulo e argomento di z^6 .

Poniamo $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 + i$ e $z_3 = 1 - i$. Allora

$$|z_1| = 2, \quad \text{e} \quad |z_2| = |z_3| = \sqrt{2},$$

mentre

$$\arg z_1 = -\frac{\pi}{6}, \quad \arg z_2 = \frac{\pi}{4}, \quad \arg z_3 = -\frac{\pi}{4}$$

quindi

$$|z| = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

e

$$\arg z = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}.$$

Quindi

$$|z^6| = 8 \quad \text{e} \quad \arg z^6 = \frac{7\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

La parte reale di z^6 è quindi 0 mentre la sua parte immaginaria è -8 , ossia $z^6 = -8i$.

Università degli Studi di Bergamo
— **Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma)** —
1 settembre 2014 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i seguenti vettori di \mathbb{R}^5 :

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Esiste un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^5 che contenga i vettori \underline{v}_1 , \underline{v}_2 e \underline{v}_3 ?

Sì, esistono sempre sottospazi vettoriali che contengono vettori di un dato spazio vettoriale. In questo caso i due esempi più ovvi sono \mathbb{R}^5 e il sottospazio generato da questi vettori, cioè il sottospazio

$$V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = \{a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2 + c\underline{v}_3 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

- b) Nel caso affermativo della domanda di cui sopra, quali dimensioni può avere detto sottospazio?

Un sottospazio che contenga i tre vettori \underline{v}_1 , \underline{v}_2 e \underline{v}_3 dovrà contenere almeno il sottospazio generato da essi, cioè V , ed essere contenuto in \mathbb{R}^5 . Le possibili dimensioni sono quindi tutte le dimensioni da quella di V alla dimensione di \mathbb{R}^5 , cioè 5. Rimane quindi da calcolare la dimensione di V che è la caratteristica della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & -6 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

La caratteristica di M è 3 (per il procedimento di Kronecker, si possono scegliere il primo coefficiente in alto a sinistra, poi la matrice 2×2 in alto a sinistra, poi le due prime e la quarta riga) per cui i sottospazi che contengono \underline{v}_1 , \underline{v}_2 e \underline{v}_3 sono di dimensione 3, 4 o 5 (inoltre ce n'è un unico di dimensione 3 ed è V e un unico di dimensione 5 ed è \mathbb{R}^5).

c) Determinare dei reali a, b, c, d ed e in modo tale che il sottospazio

$$W = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{array} \right) \mid ax + by + cz + dt + eu = 0 \right\}$$

contenga i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e \underline{v}_3 .

I cinque reali devono soddisfare le condizioni seguenti:

$$\begin{cases} 3a - b + c + d - 5e = 0 \\ -a - c + 5d - 3e = 0 \\ -b - 2c - 6d + 4e = 0 \end{cases}$$

e sono quindi soluzioni di un sistema lineare di cui la matrice dei coefficienti è M_T . Il sistema è omogeneo con una matrice dei coefficienti di caratteristica 3. Esso ha quindi un insieme di soluzioni che dipendono da due parametri (da quanto accennato alla domanda precedente, c ed e possono essere presi come parametri). Una possibile soluzione è

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 1 \\ d = 0 \\ e = 0. \end{cases}$$

Si verifica in brutta che con questi 5 numeri i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e \underline{v}_3 stanno in W .

Nota: i sottospazi del tipo di W sono esattamente tutti i sottospazi di dimensione 4 che contengono i tre vettori.

Esercizio 2. Siano π e Π i piani di equazione

$$\pi : 2x + 3y - 2z - 3 = 0$$

$$\Pi : x + \alpha y - 2z = 0$$

dove α è un reale. Sia r_1 la retta intersezione dei due piani (se esiste).

- a) Determinare α in modo tale che i due piani risultino ortogonali.

Un vettore normale a π è il vettore $\underline{n} = (2; 3; -2)$. Un vettore normale a Π è il vettore $\underline{N} = (1; \alpha; -2)$. I due piani sono ortogonali se e solo se \underline{n} e \underline{N} lo sono e questo è vero se e solo se il loro prodotto scalare, cioè $3\alpha + 6$, è nullo. I due piani π e Π sono quindi ortogonali se e solo se $\alpha = -2$.

Per tutto il resto dell'esercizio, prendiamo $\alpha = -2$.

- b) Sia r_2 la retta passante per $A(1; -1; -2)$, parallela al piano $z = 0$ e appartenente a π . Determinare il punto di intersezione B tra r_1 e r_2 .

Osserviamo inanzitutto che $A \in \pi$ e quindi la domanda ha senso.

Sia \underline{v} il vettore direttore di r_2 . Dobbiamo avere che la terza componente di \underline{v} è nulla e $\underline{n} \cdot \underline{v} = 0$ e quindi se $\underline{v} = (a; b; 0)$, $2a + 3b = 0$. Possiamo prendere $a = 3$ e $b = -2$, cioè $\underline{v} = (3; -2; 0)$. I punti di r_2 saranno quindi i punti di coordinate $(1 + 3t; -1 - 2t; -2)$ con $t \in \mathbb{R}$. (Osservazione: è opportuno verificare che tali punti soddisfano tutti l'equazione di π). L'intersezione di r_1 e r_2 , se esiste, è uguale all'intersezione di r_2 con Π . Per determinare tale intersezione è sufficiente inserire le coordinate appena determinate nell'equazione di Π . Si ottiene

$$7t + 7 = 0$$

ossia $t = -1$. Abbiamo quindi $B(-2; 1; -2)$. Siccome $B \in \pi$, il punto B appartiene effettivamente a r_1 ed è quindi il punto di intersezione di r_1 e r_2 .

Un modo alternativo per procedere era di dire che la retta r_2 è contenuta nel piano $z = -2$ (che è il piano parallelo al piano $z = 0$ passante per A) e determinare le coordinate di B ponendo $z = -2$ nelle equazioni di π e Π . Si otteneva allora immediatamente che r_2 era la retta AB perché la retta AB soddisfa i requisiti di r_2 .

- c) Determinare le coordinate del punto C di r_1 di ascissa -12 .

Come vettore direttore di r_1 possiamo prendere il prodotto vettoriale di \underline{n} e \underline{N} . Abbiamo

$$\underline{n} \wedge \underline{N} = (-10; 2; -7) .$$

Cerchiamo allora il $t \in \mathbb{R}$ tale che, se $\overrightarrow{BC} = t\underline{n} \wedge \underline{N}$, allora C ha ascissa -12 . Risulta $t = 1$ per cui $\overrightarrow{BC} = \underline{n} \wedge \underline{N}$ e $C(-12; 3; -9)$.

Una soluzione alternativa era di porre $x = -6$ nelle equazioni di π e Π e risolvere il sistema (lineare).

- d) Determinare l'area del triangolo ABC .

Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = (-3; 2; 0) \wedge (-10; 2; -7) = (-14; -21; 14) = -7 \cdot (2; 3; -2)$$

quindi

$$\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} \right\|^2 = 7^2 \cdot 17$$

e

$$\text{area di } ABC = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} \right\| = \frac{7}{2} \sqrt{17}$$

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Si calcolino gli autovalori di A .

Si ha che

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 - \lambda & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda & -1 \\ -3 & -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 3).$$

(Il calcolo risulta particolarmente semplice se si sostituisce la seconda riga con la somma della seconda e della terza, e poi la terza colonna con la differenza tra la terza e la seconda). Gli autovalori sono pertanto $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ e $\lambda_4 = -3$.

b) Si calcolino gli autovettori di A .

Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_1 = 0$ sono le soluzioni non banali del sistema

$$\begin{pmatrix} -3 - \lambda_1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 - \lambda_1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda_1 & -1 \\ -3 & -2 & -2 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia

$$\begin{cases} -3x - 2y - 2z = 0 \\ -x - y - 2z + u = 0 \\ x + z - u = 0 \\ -3x - 2y + -2z = 0 \end{cases}$$

È quindi facile vedere che gli autovettori relativi a λ_1 sono i multipli non nulli di $\underline{v}_1 = (0, -1, 1, 1)_T$. In modo del tutto analogo si trova che gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 1$ sono i multipli non nulli di $\underline{v}_2 = (0, -1, 1, 0)_T$, quelli relativi a $\lambda_3 = -1$ sono i multipli non nulli di $\underline{v}_3 = (1, -1, 0, 1)_T$ e quelli relativi a $\lambda_4 = -3$ sono i multipli non nulli di $\underline{v}_4 = (1, 0, 0, 1)_T$.

c) Esiste una base di \mathbb{R}^4 fatta da autovettori di A ?

La matrice A è diagonalizzabile, poiché le radici del suo polinomio caratteristico sono tutte reali e distinte. Quindi esiste una base di autovettori. Una possibile scelta è data da $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$.

d) Esiste una base ortonormale di \mathbb{R}^4 fatta da autovettori di A ?

No, perché ciò accade se e solo se la matrice è simmetrica, mentre A non lo è.

Esercizio 4. Sia

$$z = \frac{(\sqrt{3} + i)(1 - i)}{(1 + i)^2}$$

Determinare parte reale, parte immaginaria, modulo e argomento di z^6 .

Poniamo $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 1 - i$ e $z_3 = 1 + i$. Allora

$$|z_1| = 2, \quad \text{e} \quad |z_2| = |z_3| = \sqrt{2},$$

mentre

$$\arg z_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \arg z_2 = -\frac{\pi}{4}, \quad \arg z_3 = \frac{\pi}{4}$$

quindi

$$|z| = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

e

$$\arg z = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} - 2\frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{12}.$$

Quindi

$$|z^6| = 8 \quad \text{e} \quad \arg z^6 = -\frac{7\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

La parte reale di z^6 è quindi 0 mentre la sua parte immaginaria è 8, ossia $z^6 = 8i$.