Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
2 luglio 2014 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$, dipendente da un parametro k,

$$V_k = \left\{ \left(\begin{array}{c} 3a - 29b + (3k+2)c - 30d \\ -b + c - 3d \\ a + (3k-3)b + kc + (3k-2)d \end{array} \right) \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} .$$

a) Si dimostri che V_k è un sottospazio vettoriale per ogni k.

Si ha che

$$\left(\begin{array}{c} 3a - 29b + (3k+2)c - 30d \\ -b + c - 3d \\ a + (3k-3)b + kc + (3k-2)d \end{array} \right) = a \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -29 \\ -1 \\ 3k-3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3k+2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -30 \\ -3 \\ 3k-2 \end{pmatrix} ,$$

cosicché V_k è il sottospazio generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -29 \\ -1 \\ 3k-3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3k+2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} -30 \\ -3 \\ 3k-2 \end{pmatrix} .$$

Ciò dimostra che V_k è un sottospazio per ogni valore di k.

b) Esistono valori di k per i quali V_k è una retta? In caso affermativo, se ne scrivano le equazioni parametriche.

Per rispondere a questa domanda (e alla successiva) calcoliamo la dimensione di V_k al variare di k. Essa coincide con la caratteristica della matrice che ha come colonne i vettori generatori, ossia

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & -29 & 3k+2 & -30 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3k-3 & k & 3k-2 \end{pmatrix} .$$

La sottomatrice quadrata di ordine 2 in alto a sinistra ha determinante non nullo. Ciò implica che $\dim V_k \geq 2$ per ogni k e quindi V_k non è mai una retta.

c) Esistono valori di k per i quali V_k è un piano? In caso affermativo, se ne scriva l'equazione cartesiana.

Per il teorema di Kronecker, la caratteristica di A_k è uguale a 2 se e solo se si annullano i determinanti di entrambe le sottomatrici quadrate di ordine 3 che contengono la sottomatrice quadrata di ordine 2 in alto a sinistra. Poiché

$$\begin{vmatrix} 3 & -29 & 3k+2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3k-3 & k \end{vmatrix} = 9(-2-k), \quad \begin{vmatrix} 3 & -29 & -30 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 3k-3 & 3k-2 \end{vmatrix} = 18(k+2) \ ,$$

possiamo concludere che $\dim V_k = 2$ se e solo se $k = -2$. Questo è l'unico valore di k per il quale V_k è un piano. (Per $k \neq -2$ la dimensione di V_k è 3, ossia $V_k = \mathbb{R}^3$.)

Per trovare l'equazione cartesiana di V_{-2}, possiamo osservare che esso è il piano passante per l'origine e parallelo ai vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$. Il suo vettore normale è quindi $\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2 = (1; -2; -3)_T$ e la sua equazione cartesiana è $x - 2y - 3z = 0$.

d) Per l'eventuale valore di k individuato dalla domanda precedente, si esibisca una base di V_k.

Abbiamo già visto che una base di V_{-2} è data dai vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema, dipendente da un parametro k,

$$\begin{cases} x - 3y + 7z + 9t = 11 \\ 3x + 5y - 7z - t = -9 \\ 5x + y + kz + 13t = 7 \end{cases}$$

a) Discutere, al variare del parametro k, l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema.

Usiamo il teorema di Rouché–Capelli.

La matrice dei coefficienti,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & -7 & -1 \\ 5 & 1 & k & 13 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica almeno 2 perché il determinante della matrice 2×2 in alto a sinistra è $14 \neq 0$. Il determinante della sottomatrice di A costituita dalla prima, seconda e quarta colonna è nullo. Il determinante della sottomatrice costituita dalle tre prime colonne è

$$14k - 42$$

e quindi è nullo se e solo se $k = 3$. Per il teorema di Kronecker, $\operatorname{car} A = 2$ se $k = 3$ e $\operatorname{car} A = 3$ se no.

Sia
$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} .$$
Allora la matrice completa è $B = (A \mid \underline{v})$. Per $k \neq 3$, la matrice B ha sicuramente caratteristica 3 (perché la sua caratteristica massima è 3 e contiene una sottomatrice di caratteristica 3).

Il determinante della sottomatrice di B costituito dalla prima, seconda e quinta colonna è nullo per cui, per il teorema di Kronecker, la matrice B ha caratteristica 2 per $k = 3$.

Quindi per $k \neq 3$ il sistema ammette una retta di soluzioni e per $k = 3$ un piano di soluzioni.

b) Risolvere il sistema per $k = 3$.

Siamo nel caso in cui il sistema ammette soluzioni che dipendono da due parametri. Abbiamo visto alla domanda precedente che possiamo tenere le due prime equazioni e usare z e t come parametri. Rimane un sistema 2×2 da risolvere, seppur con due parametri nei coefficienti noti, e si trova che
$$\begin{cases} x = -z - 3t + 2 \\ y = \ 2z + 2t - 3 \end{cases}$$

Osservazione: si poteva usare la tecnica di Gauss per risolvere il sistema, fin dalla prima domanda. Usando la prima equazione per eliminare la x delle altre, veniva
$$\begin{cases} x - 3y + 7z + 9t = 11 \\ 14y - 28z - 28t = -42 \\ 16y + (k-35)z - 32t = -48 \end{cases}$$
ovvero
$$\begin{cases} x - 3y + 7z + 9t = 11 \\ y - 2z - 2t = -3 \\ 16y + (k-35)z - 32t = -48 \end{cases}$$
Usando la seconda equazione per semplificare la terza, viene allora
$$\begin{cases} x - 3y + 7z + 9t = 11 \\ y - 2z - 2t = -3 \\ (k-3)z = 0 \end{cases}$$

Per cui se $k \neq 3$, allora $z = 0$ e le soluzioni del sistema dipendono da un parametro (si può usare la seconda equazione per eliminare la y dalla prima e si trovano x e y in funzione di t). Se invece $k = 3$, l'ultima equazione diventa banale e le soluzioni del sistema dipendono da due parametri. Si può usare la seconda equazione per eliminare la y dalla prima e si ritrovano esattamente le soluzioni di cui sopra.

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 - 16x - 4y - 4z + 16 = 0 \ .$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -8 & -2 & -2 & 16 \end{pmatrix} \ .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

che non può essere soddisfatta (basta osservare la terza riga di A). Quindi σ non ha punti doppi.

b) La quadrica σ ha un centro? In caso affermativo, determinarlo.

Il centro di σ è dato dalla (eventuale) soluzione del sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Osservando la terza riga di B è facile capire che il sistema non ha soluzioni. Pertanto σ non è una quadrica a centro.

c) Scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel suo punto $(0,0,4)$.

Il piano cercato ha equazione

$$(0,0,4,1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

ossia $4x + y + z - 4 = 0$.

d) Dopo aver portato σ in forma canonica, riconoscere di che quadrica si tratta.

Basta riscrivere l'equazione di σ nella forma

$$4(x-2)^2 + (y-2)^2 - 4(z+1) = 0$$

ed effettuare la traslazione

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - 2 \\ z' = z + 1 \end{cases}$$

per arrivare alla forma canonica $z' = (x')^2 + \frac{(y')^2}{4}$. La quadrica σ è quindi un paraboloide ellittico. Ciò conferma la non esistenza del centro di σ.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
2 luglio 2014 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$, dipendente da un parametro k,

$$V_k = \left\{ \begin{pmatrix} 3a + 36b + (3k-3)c + 45d \\ -b + c - 3d \\ a + (3k+2)b + kc + (3k+3)d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} .$$

a) Si dimostri che V_k è un sottospazio vettoriale per ogni k.

Si ha che

$$\begin{pmatrix} 3a + 36b + (3k-3)c + 45d \\ -b + c - 3d \\ a + (3k+2)b + kc + (3k+3)d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 36 \\ -1 \\ 3k+2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3k-3 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 45 \\ -3 \\ 3k+3 \end{pmatrix},$$

cosicché V_k è il sottospazio generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 36 \\ -1 \\ 3k+2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3k-3 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 45 \\ -3 \\ 3k+3 \end{pmatrix} .$$

Ciò dimostra che V_k è un sottospazio per ogni valore di k.

b) Esistono valori di k per i quali V_k è una retta? In caso affermativo, se ne scrivano le equazioni parametriche.

Per rispondere a questa domanda (e alla successiva) calcoliamo la dimensione di V_k al variare di k. Essa coincide con la caratteristica della matrice che ha come colonne i vettori generatori, ossia

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & 36 & 3k-3 & 45 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3k+2 & k & 3k+3 \end{pmatrix} .$$

La sottomatrice quadrata di ordine 2 in alto a sinistra ha determinante non nullo. Ciò implica che $\dim V_k \geq 2$ per ogni k e quindi V_k non è mai una retta.

c) Esistono valori di k per i quali V_k è un piano? In caso affermativo, se ne scriva l'equazione cartesiana.

Per il teorema di Kronecker, la caratteristica di A_k è uguale a 2 se e solo se si annullano i determinanti di entrambe le sottomatrici quadrate di ordine 3 che contengono la sottomatrice quadrata di ordine 2 in alto a sinistra. Poiché

$$\begin{vmatrix} 3 & 36 & 3k-3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3k+2 & k \end{vmatrix} = 9(3-k), \qquad \begin{vmatrix} 3 & 36 & 45 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 3k+2 & 3k+3 \end{vmatrix} = 18(k-3)\ ,$$

possiamo concludere che $\dim V_k = 2$ se e solo se $k = 3$. Questo è l'unico valore di k per il quale V_k è un piano. (Per $k \neq 3$ la dimensione di V_k è 3, ossia $V_k = \mathbb{R}^3$.)

Per trovare l'equazione cartesiana di V_3, possiamo osservare che esso è il piano passante per l'origine e parallelo ai vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$. Il suo vettore normale è quindi $\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2 = (1; 3; -3)_T$ e la sua equazione cartesiana è $x + 3y - 3z = 0$.

d) Per l'eventuale valore di k individuato dalla domanda precedente, si esibisca una base di V_k.

Abbiamo già visto che una base di V_3 è data dai vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema, dipendente da un parametro k,

$$\begin{cases} x + 5y - 9z - 7t = -13 \\ 5x - 4y + 13z + 23t = 22 \\ 5x + y + kz + 13t = 7 \end{cases}$$

a) Discutere, al variare del parametro k, l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema.

Usiamo il teorema di Rouché–Capelli.

La matrice dei coefficienti,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 & -7 \\ 5 & -4 & 13 & 23 \\ 5 & 1 & k & 13 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica almeno 2 perché il determinante della matrice 2×2 in alto a sinistra è $-29 \neq 0$. Il determinante della sottomatrice di A costituita dalla prima, seconda e quarta colonna è nullo. Il determinante della sottomatrice costituita dalle tre prime colonne è

$$-29k + 87$$

e quindi è nullo se e solo se $k = 3$. Per il teorema di Kronecker, $\operatorname{car} A = 2$ se $k = 3$ e $\operatorname{car} A = 3$ se no.

Sia

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} -13 \\ 22 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Allora la matrice completa è $B = (A \mid \underline{v})$. Per $k \neq 3$, la matrice B ha sicuramente caratteristica 3 (perché la sua caratteristica massima è 3 e contiene una sottomatrice di caratteristica 3).

Il determinante della sottomatrice di B costituito dalla prima, seconda e quinta colonna è nullo per cui, per il teorema di Kronecker, la matrice B ha caratteristica 2 per $k = 3$.

Quindi per $k \neq 3$ il sistema ammette una retta di soluzioni e per $k = 3$ un piano di soluzioni.

b) Risolvere il sistema per $k = 3$.

Siamo nel caso in cui il sistema ammette soluzioni che dipendono da due parametri. Abbiamo visto alla domanda precedente che possiamo tenere le due prime equazioni e usare z e t come parametri. Rimane un sistema 2×2 da risolvere, seppur con due parametri nei coefficienti noti, e si trova che

$$\begin{cases} x = -z - 3t + 2 \\ y = \ \ 2z + 2t - 3 \end{cases}$$

Osservazione: si poteva usare la tecnica di Gauss per risolvere il sistema, fin dalla prima domanda. Usando la prima equazione per eliminare la x delle altre, veniva

$$\begin{cases} x + 5y - 9z - 7t = -13 \\ \quad - 29y + 58z + 58t = 87 \\ \quad - 24y + (k+45)z + 48t = 72 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x + 5y - 9z - 7t = -13 \\ \quad y - 2z - 2t = -3 \\ \quad - 24y + (k+45)z + 48t = 72 \end{cases}$$

Usando la seconda equazione per semplificare la terza, viene allora

$$\begin{cases} x + 5y - 9z - 7t = -13 \\ \quad y - 2z - 2t = -3 \\ \quad (k-3)z = 0 \end{cases}$$

Per cui se $k \neq 3$, allora $z = 0$ e le soluzioni del sistema dipendono da un parametro (si può usare la seconda equazione per eliminare la y dalla prima e si trovano x e y in funzione di t). Se invece $k = 3$, l'ultima equazione diventa banale e le soluzioni del sistema dipendono da due parametri. Si può usare la seconda equazione per eliminare la y dalla prima e si ritrovano esattamente le soluzioni di cui sopra.

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 + 8x - 4y - 4z + 4 = 0 \ .$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

che non può essere soddisfatta (basta osservare la terza riga di A). Quindi σ non ha punti doppi.

b) La quadrica σ ha un centro? In caso affermativo, determinarlo.

Il centro di σ è dato dalla (eventuale) soluzione del sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Osservando la terza riga di B è facile capire che il sistema non ha soluzioni. Pertanto σ non è una quadrica a centro.

c) Scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel suo punto $(0,0,1)$.

Il piano cercato ha equazione

$$(0,0,1,1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

ossia $-2x + y + z - 1 = 0$.

d) Dopo aver portato σ in forma canonica, riconoscere di che quadrica si tratta.

Basta riscrivere l'equazione di σ nella forma

$$4(x+1)^2 + (y-2)^2 - 4(z+1) = 0$$

ed effettuare la traslazione

$$\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y-2 \\ z' = z+1 \end{cases}$$

per arrivare alla forma canonica $z' = (x')^2 + \frac{(y')^2}{4}$. La quadrica σ è quindi un paraboloide ellittico. Ciò conferma la non esistenza del centro di σ.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
2 luglio 2014 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$, dipendente da un parametro k,

$$V_k = \left\{ \left(\begin{array}{c} 3a - 16b + (3k+1)c - 15d \\ -b + c - 3d \\ a + (3k-2)b + kc + (3k-1)d \end{array} \right) \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} .$$

a) Si dimostri che V_k è un sottospazio vettoriale per ogni k.

Si ha che

$$\left(\begin{array}{c} 3a - 16b + (3k+1)c - 15d \\ -b + c - 3d \\ a + (3k-2)b + kc + (3k-1)d \end{array} \right) = a \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -16 \\ -1 \\ 3k-2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3k+1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -15 \\ -3 \\ 3k-1 \end{pmatrix} ;$$

cosicché V_k è il sottospazio generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -16 \\ -1 \\ 3k-2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3k+1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} -15 \\ -3 \\ 3k-1 \end{pmatrix} .$$

Ciò dimostra che V_k è un sottospazio per ogni valore di k.

b) Esistono valori di k per i quali V_k è una retta? In caso affermativo, se ne scrivano le equazioni parametriche.

Per rispondere a questa domanda (e alla successiva) calcoliamo la dimensione di V_k al variare di k. Essa coincide con la caratteristica della matrice che ha come colonne i vettori generatori, ossia

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & -16 & 3k+1 & -15 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3k-2 & k & 3k-1 \end{pmatrix} .$$

La sottomatrice quadrata di ordine 2 in alto a sinistra ha determinante non nullo. Ciò implica che $\dim V_k \geq 2$ per ogni k e quindi V_k non è mai una retta.

c) Esistono valori di k per i quali V_k è un piano? In caso affermativo, se ne scriva l'equazione cartesiana.

Per il teorema di Kronecker, la caratteristica di A_k è uguale a 2 se e solo se si annullano i determinanti di entrambe le sottomatrici quadrate di ordine 3 che contengono la sottomatrice quadrata di ordine 2 in alto a sinistra. Poiché

$$\begin{vmatrix} 3 & -16 & 3k+1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3k-2 & k \end{vmatrix} = 9(-1-k), \quad \begin{vmatrix} 3 & -16 & -15 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 3k-2 & 3k-1 \end{vmatrix} = 18(k+1) \; ,$$

possiamo concludere che $\dim V_k = 2$ se e solo se $k = -1$. Questo è l'unico valore di k per il quale V_k è un piano. (Per $k \neq -1$ la dimensione di V_k è 3, ossia $V_k = \mathbb{R}^3$.)

Per trovare l'equazione cartesiana di V_{-1}, possiamo osservare che esso è il piano passante per l'origine e parallelo ai vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$. Il suo vettore normale è quindi $\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2 = (1; -1; -3)_T$ e la sua equazione cartesiana è $x - y - 3z = 0$.

d) Per l'eventuale valore di k individuato dalla domanda precedente, si esibisca una base di V_k.

Abbiamo già visto che una base di V_{-1} è data dai vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema, dipendente da un parametro k,

$$\begin{cases} x - 5y + 11z + 13t = 17 \\ 3x - y + 5z + 11t = 9 \\ 4x - 2y + kz + 16t = 14 \end{cases}$$

a) Discutere, al variare del parametro k, l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema.

Usiamo il teorema di Rouché–Capelli.

La matrice dei coefficienti,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 11 & 13 \\ 3 & -1 & 5 & 11 \\ 4 & -2 & k & 16 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica almeno 2 perché il determinante della matrice 2×2 in alto a sinistra è $14 \neq 0$. Il determinante della sottomatrice di A costituita dalla prima, seconda e quarta colonna è nullo. Il determinante della sottomatrice costituita dalle tre prime colonne è

$$14k - 112$$

e quindi è nullo se e solo se $k = 8$. Per il teorema di Kronecker, $\operatorname{car} A = 2$ se $k = 8$ e $\operatorname{car} A = 3$ se no.

Sia

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Allora la matrice completa è $B = (A \mid \underline{v})$. Per $k \neq 8$, la matrice B ha sicuramente caratteristica 3 (perché la sua caratteristica massima è 3 e contiene una sottomatrice di caratteristica 3).

Il determinante della sottomatrice di B costituito dalla prima, seconda e quinta colonna è nullo per cui, per il teorema di Kronecker, la matrice B ha caratteristica 2 per $k = 8$.

Quindi per $k \neq 8$ il sistema ammette una retta di soluzioni e per $k = 8$ un piano di soluzioni.

b) Risolvere il sistema per $k = 8$.

Siamo nel caso in cui il sistema ammette soluzioni che dipendono da due parametri. Abbiamo visto alla domanda precedente che possiamo tenere le due prime equazioni e usare z e t come parametri. Rimane un sistema 2×2 da risolvere, seppur con due parametri nei coefficienti noti, e si trova che

$$\begin{cases} x = -z - 3t + 2 \\ y = \ \ 2z + 2t - 3 \end{cases}$$

Osservazione: si poteva usare la tecnica di Gauss per risolvere il sistema, fin dalla prima domanda. Usando la prima equazione per eliminare la x delle altre, veniva

$$\begin{cases} x - 5y \quad\quad + 11z + 13t = \ \ 17 \\ \quad 14y \quad\quad - 28z - 28t = -42 \\ \quad 18y + (k-44)z - 36t = -54 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x - 5y \quad\quad + 11z + 13t = \ \ 17 \\ \quad\quad y \quad\quad\ \ - 2z \ \ - 2t = \ -3 \\ \quad 18y + (k-44)z - 36t = -54 \end{cases}$$

Usando la seconda equazione per semplificare la terza, viene allora

$$\begin{cases} x - 5y \ \ + 11z + 13t = \ 17 \\ \quad\quad y \quad - 2z \ \ - 2t = -3 \\ \quad\quad (k-8)z \quad\quad\ \ = \ \ 0 \end{cases}$$

Per cui se $k \neq 8$, allora $z = 0$ e le soluzioni del sistema dipendono da un parametro (si può usare la seconda equazione per eliminare la y dalla prima e si trovano x e y in funzione di t). Se invece $k = 8$, l'ultima equazione diventa banale e le soluzioni del sistema dipendono da due parametri. Si può usare la seconda equazione per eliminare la y dalla prima e si ritrovano esattamente le soluzioni di cui sopra.

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 - 8x - 4y - 4z + 4 = 0 \ .$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

che non può essere soddisfatta (basta osservare la terza riga di A). Quindi σ non ha punti doppi.

b) La quadrica σ ha un centro? In caso affermativo, determinarlo.

Il centro di σ è dato dalla (eventuale) soluzione del sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Osservando la terza riga di B è facile capire che il sistema non ha soluzioni. Pertanto σ non è una quadrica a centro.

c) Scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel suo punto $(0,0,1)$.

Il piano cercato ha equazione

$$(0,0,1,1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

ossia $2x + y + z - 1 = 0$.

d) Dopo aver portato σ in forma canonica, riconoscere di che quadrica si tratta.

Basta riscrivere l'equazione di σ nella forma

$$4(x-1)^2 + (y-2)^2 - 4(z+1) = 0$$

ed effettuare la traslazione

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 2 \\ z' = z + 1 \end{cases}$$

per arrivare alla forma canonica $z' = (x')^2 + \frac{(y')^2}{4}$. La quadrica σ è quindi un paraboloide ellittico. Ciò conferma la non esistenza del centro di σ.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
2 luglio 2014 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$, dipendente da un parametro k,

$$V_k = \left\{ \begin{pmatrix} 3a + 23b + (3k-2)c + 30d \\ -b + c - 3d \\ a + (3k+1)b + kc + (3k+2)d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} .$$

a) Si dimostri che V_k è un sottospazio vettoriale per ogni k.

Si ha che

$$\begin{pmatrix} 3a + 23b + (3k-2)c + 30d \\ -b + c - 3d \\ a + (3k+1)b + kc + (3k+2)d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 23 \\ -1 \\ 3k+1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3k-2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 30 \\ -3 \\ 3k+2 \end{pmatrix} ,$$

cosicché V_k è il sottospazio generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 23 \\ -1 \\ 3k+1 \end{pmatrix} , \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3k-2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} , \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 30 \\ -3 \\ 3k+2 \end{pmatrix} .$$

Ciò dimostra che V_k è un sottospazio per ogni valore di k.

b) Esistono valori di k per i quali V_k è una retta? In caso affermativo, se ne scrivano le equazioni parametriche.

Per rispondere a questa domanda (e alla successiva) calcoliamo la dimensione di V_k al variare di k. Essa coincide con la caratteristica della matrice che ha come colonne i vettori generatori, ossia

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & 23 & 3k-2 & 30 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3k+1 & k & 3k+2 \end{pmatrix} .$$

La sottomatrice quadrata di ordine 2 in alto a sinistra ha determinante non nullo. Ciò implica che $\dim V_k \geq 2$ per ogni k e quindi V_k non è mai una retta.

c) Esistono valori di k per i quali V_k è un piano? In caso affermativo, se ne scriva l'equazione cartesiana.

Per il teorema di Kronecker, la caratteristica di A_k è uguale a 2 se e solo se si annullano i determinanti di entrambe le sottomatrici quadrate di ordine 3 che contengono la sottomatrice quadrata di ordine 2 in alto a sinistra. Poiché

$$\begin{vmatrix} 3 & 23 & 3k-2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3k+1 & k \end{vmatrix} = 9(2-k), \qquad \begin{vmatrix} 3 & 23 & 30 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 3k+1 & 3k+2 \end{vmatrix} = 18(k-2)\ ,$$

possiamo concludere che $\dim V_k = 2$ se e solo se $k = 2$. Questo è l'unico valore di k per il quale V_k è un piano. (Per $k \neq 2$ la dimensione di V_k è 3, ossia $V_k = \mathbb{R}^3$.)

Per trovare l'equazione cartesiana di V_2, possiamo osservare che esso è il piano passante per l'origine e parallelo ai vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$. Il suo vettore normale è quindi $\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2 = (1; 2; -3)_T$ e la sua equazione cartesiana è $x + 2y - 3z = 0$.

d) Per l'eventuale valore di k individuato dalla domanda precedente, si esibisca una base di V_k.

Abbiamo già visto che una base di V_2 è data dai vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema, dipendente da un parametro k,

$$\begin{cases} x - 3y + 7z + 9t = 11 \\ 2x - 2y + 6z + 10t = 10 \\ 5x + y + kz + 13t = 7 \end{cases}$$

a) Discutere, al variare del parametro k, l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema.

Usiamo il teorema di Rouché–Capelli.

La matrice dei coefficienti,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 6 & 10 \\ 5 & 1 & k & 13 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica almeno 2 perché il determinante della matrice 2×2 in alto a sinistra è $4 \neq 0$. Il determinante della sottomatrice di A costituita dalla prima, seconda e quarta colonna è nullo. Il determinante della sottomatrice costituita dalle tre prime colonne è

$$4k - 12$$

e quindi è nullo se e solo se $k = 3$. Per il teorema di Kronecker, $\operatorname{car} A = 2$ se $k = 3$ e $\operatorname{car} A = 3$ se no.

Sia
$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}.$$
Allora la matrice completa è $B = (A \mid \underline{v})$. Per $k \neq 3$, la matrice B ha sicuramente caratteristica 3 (perché la sua caratteristica massima è 3 e contiene una sottomatrice di caratteristica 3).

Il determinante della sottomatrice di B costituito dalla prima, seconda e quinta colonna è nullo per cui, per il teorema di Kronecker, la matrice B ha caratteristica 2 per $k = 3$.

Quindi per $k \neq 3$ il sistema ammette una retta di soluzioni e per $k = 3$ un piano di soluzioni.

b) Risolvere il sistema per $k = 3$.

Siamo nel caso in cui il sistema ammette soluzioni che dipendono da due parametri. Abbiamo visto alla domanda precedente che possiamo tenere le due prime equazioni e usare z e t come parametri. Rimane un sistema 2×2 da risolvere, seppur con due parametri nei coefficienti noti, e si trova che
$$\begin{cases} x = -z - 3t + 2 \\ y = \ \ 2z + 2t - 3 \end{cases}$$

Osservazione: si poteva usare la tecnica di Gauss per risolvere il sistema, fin dalla prima domanda. Usando la prima equazione per eliminare la x delle altre, veniva
$$\begin{cases} x - 3y + 7z + 9t = 11 \\ \quad 4y - 8z - 8t = -12 \\ \quad 16y + (k-35)z - 32t = -48 \end{cases}$$
ovvero
$$\begin{cases} x - 3y + 7z + 9t = 11 \\ \quad y - 2z - 2t = -3 \\ \quad 16y + (k-35)z - 32t = -48 \end{cases}$$
Usando la seconda equazione per semplificare la terza, viene allora
$$\begin{cases} x - 3y + 7z + 9t = 11 \\ \quad y - 2z - 2t = -3 \\ \quad (k-3)z = 0 \end{cases}$$
Per cui se $k \neq 3$, allora $z = 0$ e le soluzioni del sistema dipendono da un parametro (si può usare la seconda equazione per eliminare la y dalla prima e si trovano x e y in funzione di t). Se invece $k = 3$, l'ultima equazione diventa banale e le soluzioni del sistema dipendono da due parametri. Si può usare la seconda equazione per eliminare la y dalla prima e si ritrovano esattamente le soluzioni di cui sopra.

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 + 16x - 4y - 4z + 16 = 0 \; .$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \; ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 8 & -2 & -2 & 16 \end{pmatrix} \; .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ,$$

che non può essere soddisfatta (basta osservare la terza riga di A). Quindi σ non ha punti doppi.

b) La quadrica σ ha un centro? In caso affermativo, determinarlo.

Il centro di σ è dato dalla (eventuale) soluzione del sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; .$$

Osservando la terza riga di B è facile capire che il sistema non ha soluzioni. Pertanto σ non è una quadrica a centro.

c) Scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel suo punto $(0, 0, 4)$.

Il piano cercato ha equazione

$$(0,0,4,1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

ossia $-4x + y + z - 4 = 0$.

d) Dopo aver portato σ in forma canonica, riconoscere di che quadrica si tratta.

Basta riscrivere l'equazione di σ nella forma

$$4(x+2)^2 + (y-2)^2 - 4(z+1) = 0$$

ed effettuare la traslazione

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 2 \\ z' = z + 1 \end{cases}$$

per arrivare alla forma canonica $z' = (x')^2 + \frac{(y')^2}{4}$. La quadrica σ è quindi un paraboloide ellittico. Ciò conferma la non esistenza del centro di σ.