Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
2 luglio 2014 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V.

a) $V_1 = \mathbb{R}^3$ e $W_1 = \{(x; y; z) : 2x + 3y + z = 0\}$;

Possiamo riconoscere il piano ortogonale al vettore $(2; 3; 1)$, oppure osservare che se $(x; y; z) \in W_1$, allora $z = -2x - 3y$ e quindi $(x; y; z) = x(1; 0; -2) + y(0; 1; -3)$ e quindi si tratta del sottospazio generato dai vettori $(1; 0; 2)$ e $(0; 1; -3)$.

b) $V_2 = \mathbb{R}[x]$ (lo spazio dei polinomi) e $W_2 = \{P \in V_2 : P(1)P'(1) = 1\}$;

Il vettore nullo, cioè il polinomio costante uguale a 0, non appartiene al sottoinsieme, quindi non può essere un sottospazio vettoriale.

c) Determinare i valori di k tali che $W_3 = \left\{f \in V_3 : \int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t = -k^2 + 2k - 1\right\}$ sia un sottospazio vettoriale di $V_3 = \{\text{funzioni continue da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R}\}$.

Per essere un sottospazio vettoriale, W_3 deve contenere la funzione nulla. L'integrale della funzione nulla è 0, quindi dobbiamo avere $-k^2 + 2k - 1 = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono $k = 1$ (soluzione doppia). In quel caso, il sottoinsieme W_3 diventa $W_3 = \left\{f \in V_3 : \int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$ e diventa relativamente ovvio che è un sottospazio vettoriale. Infatti la funzione nulla vi appartiene e quindi è non vuoto. Inoltre se f e g sono due elementi di W_3 e λ e μ sono due reali, allora

$$\begin{aligned}\int_0^5 (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^5 \lambda f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^5 \mu g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_0^5 g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda 0 + \mu 0 = 0.\end{aligned}$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema, dipendente da un parametro k,

$$\begin{cases} x - 3y + 7z + 9t = 11 \\ 3x + 5y - 7z - t = -9 \\ 5x + y + kz + 13t = 7 \end{cases}$$

a) Discutere, al variare del parametro k, l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema.

Usiamo il teorema di Rouché–Capelli.

La matrice dei coefficienti,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & -7 & -1 \\ 5 & 1 & k & 13 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica almeno 2 perché il determinante della matrice 2×2 in alto a sinistra è $14 \neq 0$. Il determinante della sottomatrice di A costituita dalla prima, seconda e quarta colonna è nullo. Il determinante della sottomatrice costituita dalle tre prime colonne è

$$14k - 42$$

e quindi è nullo se e solo se $k = 3$. Per il teorema di Kronecker, $\operatorname{car} A = 2$ se $k = 3$ e $\operatorname{car} A = 3$ se no.

Sia

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Allora la matrice completa è $B = (A \mid \underline{v})$. Per $k \neq 3$, la matrice B ha sicuramente caratteristica 3 (perché la sua caratteristica massima è 3 e contiene una sottomatrice di caratteristica 3).

Il determinante della sottomatrice di B costituito dalla prima, seconda e quinta colonna è nullo per cui, per il teorema di Kronecker, la matrice B ha caratteristica 2 per $k = 3$.

Quindi per $k \neq 3$ il sistema ammette una retta di soluzioni e per $k = 3$ un piano di soluzioni.

b) Risolvere il sistema per $k = 3$.

Siamo nel caso in cui il sistema ammette soluzioni che dipendono da due parametri. Abbiamo visto alla domanda precedente che possiamo tenere le due prime equazioni e usare z e t come parametri. Rimane un sistema 2×2 da risolvere, seppur con due parametri nei coefficienti noti, e si trova che

$$\begin{cases} x = -z - 3t + 2 \\ y = 2z + 2t - 3 \end{cases}$$

Osservazione: si poteva usare la tecnica di Gauss per risolvere il sistema, fin dalla prima domanda. Usando la prima equazione per eliminare la x delle altre, veniva

$$\begin{cases} x - 3y + 7z + 9t = 11 \\ 14y - 28z - 28t = -42 \\ 16y + (k-35)z - 32t = -48 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x - 3y + 7z + 9t = 11 \\ y - 2z - 2t = -3 \\ 16y + (k-35)z - 32t = -48 \end{cases}$$

Usando la seconda equazione per semplificare la terza, viene allora

$$\begin{cases} x - 3y + 7z + 9t = 11 \\ y - 2z - 2t = -3 \\ (k-3)z = 0 \end{cases}$$

Per cui se $k \neq 3$, allora $z = 0$ e le soluzioni del sistema dipendono da un parametro (si può usare la seconda equazione per eliminare la y dalla prima e si trovano x e y in funzione di t). Se invece $k = 3$, l'ultima equazione diventa banale e le soluzioni del sistema dipendono da due parametri. Si può usare la seconda equazione per eliminare la y dalla prima e si ritrovano esattamente le soluzioni di cui sopra.

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 - 16x - 4y - 4z + 16 = 0 \ .$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -8 & -2 & -2 & 16 \end{pmatrix} \ .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

che non può essere soddisfatta (basta osservare la terza riga di A). Quindi σ non ha punti doppi.

b) La quadrica σ ha un centro? In caso affermativo, determinarlo.

Il centro di σ è dato dalla (eventuale) soluzione del sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Osservando la terza riga di B è facile capire che il sistema non ha soluzioni. Pertanto σ non è una quadrica a centro.

c) Scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel suo punto $(0, 0, 4)$.

Il piano cercato ha equazione

$$(0, 0, 4, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 ,$$

ossia $4x + y + z - 4 = 0$.

d) Dopo aver portato σ in forma canonica, riconoscere di che quadrica si tratta.

Basta riscrivere l'equazione di σ nella forma

$$4(x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 4(z + 1) = 0$$

ed effettuare la traslazione

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - 2 \\ z' = z + 1 \end{cases}$$

per arrivare alla forma canonica $z' = (x')^2 + \frac{(y')^2}{4}$. La quadrica σ è quindi un paraboloide ellittico. Ciò conferma la non esistenza del centro di σ.

Esercizio 4. Si consideri l'equazione

(*) $$(z + 2 - 2i)^4 = 64i$$

a) Trovare le soluzioni dell'equazione

$$z^4 = 64i$$

(si fa presente che $64 = 2^6$).

Sia $w = 64i$. Abbiamo $|w| = 64$ e $\arg w = \frac{\pi}{2}$ per cui le sue radici quarte sono

$$2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}+k\frac{i\pi}{2}} = 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}}i^k, \quad k \in \{0;1;2;3\}\ .$$

b) Trovare le soluzioni dell'equazione (*)

Vista la risposta alla domanda precedente, le soluzioni dell'equazione sono

$$z_k = -2 + 2i + 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}+k\frac{i\pi}{2}}, \quad k \in \{0;1;2;3\}\ .$$

c) Posizionare le soluzioni dell'equazione (*) nel piano di Gauss.

d) Quale figura geometrica si ottiene?

Si ottiene un quadrato, che è il traslato del quadrato formato dalle radici quarte di $64i$.

e) Indicare il centro e la lunghezza dei lati della figura geometrica di cui sopra.

Il centro è $-2+2i$. La lunghezza di un lato si può ottenere calcolando esplicitamente le coordinate di due spigoli successivi, ma è più conveniente sfruttare il fatto che conosciamo la lunghezza della diagonale. Infatti una diagonale è il segmento che congiunge z_0 a z_2 (l'altra congiunge z_1 a z_3). Ora, $z_2 - z_0$ ha modulo $2\sqrt[4]{|w|} = 4\sqrt{2}$ e quindi, per il teorema di Pitagora, il lato ha lunghezza 4.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
2 luglio 2014 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V.

a) $V_1 = \mathbb{R}^4$ e $W_1 = \{(x; y; z; t) : 2x - 3y + z + t = 2\}$;

Il vettore nullo, cioè $(0; 0; 0; 0)$, non appartiene al sottoinsieme, quindi W_1 non può essere un sottospazio vettoriale.

b) $V_2 = \mathbb{R}[x]$ (lo spazio dei polinomi) e $W_2 = \{P \in V_2 : P'(-1) = 0\}$;

Il vettore nullo, cioè il polinomio costante uguale a 0, appartiene al sottoinsieme, quindi non è vuoto. Dati due polinomio P e Q tali che $P'(-1) = Q'(-1) = 0$ e due reali λ e μ, $(\lambda P + \mu Q)'(-1) = \lambda P'(-1) + \mu Q'(-1) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$; quindi W_2 è un sottospazio vettoriale.

c) Determinare i valori di k tali che $W_3 = \left\{ f \in V_3 : \int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = -2k^2 + 5k - 2 \right\}$ sia un sottospazio vettoriale di $V_3 = \{\text{funzioni continue da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R}\}$.

Per essere un sottospazio vettoriale, W_3 deve contenere la funzione nulla. L'integrale della funzione nulla è 0, quindi dobbiamo avere $-2k^2 + 5k - 2 = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono $k = 2$ e $k = \frac{1}{2}$. In quel caso, il sottoinsieme W_3 diventa $W_3 = \left\{ f \in V_3 : \int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ e diventa relativamente ovvio che è un sottospazio vettoriale. Infatti la funzione nulla vi appartiene e quindi è non vuoto. Inoltre se f e g sono due elementi di W_3 e λ e μ sono due reali, allora

$$\begin{aligned}\int_0^4 (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^4 \lambda f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^4 \mu g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_0^4 g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda 0 + \mu 0 = 0.\end{aligned}$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema, dipendente da un parametro k,

$$\begin{cases} x + 5y - 9z - 7t = -13 \\ 5x - 4y + 13z + 23t = 22 \\ 5x + y + kz + 13t = 7 \end{cases}$$

a) Discutere, al variare del parametro k, l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema.

Usiamo il teorema di Rouché–Capelli.

La matrice dei coefficienti,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 & -7 \\ 5 & -4 & 13 & 23 \\ 5 & 1 & k & 13 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica almeno 2 perché il determinante della matrice 2×2 in alto a sinistra è $-29 \neq 0$. Il determinante della sottomatrice di A costituita dalla prima, seconda e quarta colonna è nullo. Il determinante della sottomatrice costituita dalle tre prime colonne è

$$-29k + 87$$

e quindi è nullo se e solo se $k = 3$. Per il teorema di Kronecker, $\operatorname{car} A = 2$ se $k = 3$ e $\operatorname{car} A = 3$ se no.

Sia

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} -13 \\ 22 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Allora la matrice completa è $B = (A \mid \underline{v})$. Per $k \neq 3$, la matrice B ha sicuramente caratteristica 3 (perché la sua caratteristica massima è 3 e contiene una sottomatrice di caratteristica 3).

Il determinante della sottomatrice di B costituito dalla prima, seconda e quinta colonna è nullo per cui, per il teorema di Kronecker, la matrice B ha caratteristica 2 per $k = 3$.

Quindi per $k \neq 3$ il sistema ammette una retta di soluzioni e per $k = 3$ un piano di soluzioni.

b) Risolvere il sistema per $k = 3$.

Siamo nel caso in cui il sistema ammette soluzioni che dipendono da due parametri. Abbiamo visto alla domanda precedente che possiamo tenere le due prime equazioni e usare z e t come parametri. Rimane un sistema 2×2 da risolvere, seppur con due parametri nei coefficienti noti, e si trova che

$$\begin{cases} x = -z - 3t + 2 \\ y = 2z + 2t - 3 \end{cases}$$

Osservazione: si poteva usare la tecnica di Gauss per risolvere il sistema, fin dalla prima domanda. Usando la prima equazione per eliminare la x delle altre, veniva

$$\begin{cases} x + 5y - 9z - 7t = -13 \\ -29y + 58z + 58t = 87 \\ -24y + (k+45)z + 48t = 72 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x + 5y - 9z - 7t = -13 \\ y - 2z - 2t = -3 \\ -24y + (k+45)z + 48t = 72 \end{cases}$$

Usando la seconda equazione per semplificare la terza, viene allora

$$\begin{cases} x + 5y - 9z - 7t = -13 \\ y - 2z - 2t = -3 \\ (k-3)z = 0 \end{cases}$$

Per cui se $k \neq 3$, allora $z = 0$ e le soluzioni del sistema dipendono da un parametro (si può usare la seconda equazione per eliminare la y dalla prima e si trovano x e y in funzione di t). Se invece $k = 3$, l'ultima equazione diventa banale e le soluzioni del sistema dipendono da due parametri. Si può usare la seconda equazione per eliminare la y dalla prima e si ritrovano esattamente le soluzioni di cui sopra.

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 + 8x - 4y - 4z + 4 = 0 \ .$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

che non può essere soddisfatta (basta osservare la terza riga di A). Quindi σ non ha punti doppi.

b) La quadrica σ ha un centro? In caso affermativo, determinarlo.

Il centro di σ è dato dalla (eventuale) soluzione del sistema

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Osservando la terza riga di B è facile capire che il sistema non ha soluzioni. Pertanto σ non è una quadrica a centro.

c) Scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel suo punto $(0, 0, 1)$.

Il piano cercato ha equazione

$$(0, 0, 1, 1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 ,$$

ossia $-2x + y + z - 1 = 0$.

d) Dopo aver portato σ in forma canonica, riconoscere di che quadrica si tratta.

Basta riscrivere l'equazione di σ nella forma

$$4(x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 4(z + 1) = 0$$

ed effettuare la traslazione

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \\ z' = z + 1 \end{cases}$$

per arrivare alla forma canonica $z' = (x')^2 + \frac{(y')^2}{4}$. La quadrica σ è quindi un paraboloide ellittico. Ciò conferma la non esistenza del centro di σ.

Esercizio 4. Si consideri l'equazione

(*) $$(z + 1 - 2i)^4 = 4i$$

a) Trovare le soluzioni dell'equazione
$$z^4 = 4i \ .$$

Sia $w = 4i$. Abbiamo $|w| = 4$ e $\arg w = \frac{\pi}{2}$ per cui le sue radici quarte sono
$$\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}+k\frac{i\pi}{2}} = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}}i^k, \quad k \in \{0; 1; 2; 3\} \ .$$

b) Trovare le soluzioni dell'equazione (*)

Vista la risposta alla domanda precedente, le soluzioni dell'equazione sono
$$z_k = -1 + 2i + \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}+k\frac{i\pi}{2}}, \quad k \in \{0; 1; 2; 3\} \ .$$

c) Posizionare le soluzioni dell'equazione (*) nel piano di Gauss.

d) Quale figura geometrica si ottiene?

Si ottiene un quadrato, che è il traslato del quadrato formato dalle radici quarte di $4i$.

e) Indicare il centro e la lunghezza dei lati della figura geometrica di cui sopra.

Il centro è $-1+2i$. La lunghezza di un lato si può ottenere calcolando esplicitamente le coordinate di due spigoli successivi, ma è più conveniente sfruttare il fatto che conosciamo la lunghezza della diagonale. Infatti una diagonale è il segmento che congiunge z_0 a z_2 (l'altra congiunge z_1 a z_3). Ora, $z_2 - z_0$ ha modulo $2\sqrt[4]{|w|} = 2\sqrt{2}$ e quindi, per il teorema di Pitagora, il lato ha lunghezza 2.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
2 luglio 2014 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V.

a) $V_1 = \mathbb{R}^3$ e $W_1 = \{(x+3y; 2y-3x; 3y) : x, y \in \mathbb{R}\}$;

Siccome $(x+3y; 2y-3x; 3y) = x(1; -3; 0) + y(3; 2; 3)$, si tratta del sottospazio generato dai vettori $(1; -3; 0)$ e $(3; 2; 3)$.

b) $V_2 = \mathbb{R}[x]$ (lo spazio dei polinomi) e $W_2 = \{P \in V_2 : P(3) = 1\}$;

Il vettore nullo, cioè il polinomio costante uguale a 0, non appartiene al sottoinsieme, quindi non può essere un sottospazio vettoriale.

c) Determinare i valori di k tali che $W_3 = \left\{f \in V_3 : \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t = k^2 + 2k + 1\right\}$ sia un sottospazio vettoriale di $V_3 = \{\text{funzioni continue da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R}\}$.

Per essere un sottospazio vettoriale, W_3 deve contenere la funzione nulla. L'integrale della funzione nulla è 0, quindi dobbiamo avere $k^2+2k+1 = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono $k = -1$ (soluzione doppia). In quel caso, il sottoinsieme W_3 diventa $W_3 = \left\{f \in V_3 : \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$ e diventa relativamente ovvio che è un sottospazio vettoriale. Infatti la funzione nulla vi appartiene e quindi è non vuoto. Inoltre se f e g sono due elementi di W_3 e λ e μ sono due reali, allora

$$\begin{aligned}\int_1^3 (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^3 \lambda f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^3 \mu g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_1^3 g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda 0 + \mu 0 = 0.\end{aligned}$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema, dipendente da un parametro k,

$$\begin{cases} x - 5y + 11z + 13t = 17 \\ 3x \ - y \ + 5z + 11t = \ 9 \\ 4x - 2y \ + kz + 16t = 14 \end{cases}$$

a) Discutere, al variare del parametro k, l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema.

Usiamo il teorema di Rouché–Capelli.

La matrice dei coefficienti,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 11 & 13 \\ 3 & -1 & 5 & 11 \\ 4 & -2 & k & 16 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica almeno 2 perché il determinante della matrice 2×2 in alto a sinistra è $14 \neq 0$. Il determinante della sottomatrice di A costituita dalla prima, seconda e quarta colonna è nullo. Il determinante della sottomatrice costituita dalle tre prime colonne è

$$14k - 112$$

e quindi è nullo se e solo se $k = 8$. Per il teorema di Kronecker, $\operatorname{car} A = 2$ se $k = 8$ e $\operatorname{car} A = 3$ se no.

Sia

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} .$$

Allora la matrice completa è $B = (A \mid \underline{v})$. Per $k \neq 8$, la matrice B ha sicuramente caratteristica 3 (perché la sua caratteristica massima è 3 e contiene una sottomatrice di caratteristica 3).

Il determinante della sottomatrice di B costituito dalla prima, seconda e quinta colonna è nullo per cui, per il teorema di Kronecker, la matrice B ha caratteristica 2 per $k = 8$.

Quindi per $k \neq 8$ il sistema ammette una retta di soluzioni e per $k = 8$ un piano di soluzioni.

b) Risolvere il sistema per $k = 8$.

Siamo nel caso in cui il sistema ammette soluzioni che dipendono da due parametri. Abbiamo visto alla domanda precedente che possiamo tenere le due prime equazioni e usare z e t come parametri. Rimane un sistema 2×2 da risolvere, seppur con due parametri nei coefficienti noti, e si trova che

$$\begin{cases} x = -z - 3t + 2 \\ y = \ 2z + 2t - 3 \end{cases}$$

Osservazione: si poteva usare la tecnica di Gauss per risolvere il sistema, fin dalla prima domanda. Usando la prima equazione per eliminare la x delle altre, veniva

$$\begin{cases} x - 5y + 11z + 13t = 17 \\ 14y - 28z - 28t = -42 \\ 18y + (k-44)z - 36t = -54 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x - 5y + 11z + 13t = 17 \\ y - 2z - 2t = -3 \\ 18y + (k-44)z - 36t = -54 \end{cases}$$

Usando la seconda equazione per semplificare la terza, viene allora

$$\begin{cases} x - 5y + 11z + 13t = 17 \\ y - 2z - 2t = -3 \\ (k-8)z = 0 \end{cases}$$

Per cui se $k \neq 8$, allora $z = 0$ e le soluzioni del sistema dipendono da un parametro (si può usare la seconda equazione per eliminare la y dalla prima e si trovano x e y in funzione di t). Se invece $k = 8$, l'ultima equazione diventa banale e le soluzioni del sistema dipendono da due parametri. Si può usare la seconda equazione per eliminare la y dalla prima e si ritrovano esattamente le soluzioni di cui sopra.

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 - 8x - 4y - 4z + 4 = 0 \ .$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

che non può essere soddisfatta (basta osservare la terza riga di A). Quindi σ non ha punti doppi.

b) La quadrica σ ha un centro? In caso affermativo, determinarlo.

Il centro di σ è dato dalla (eventuale) soluzione del sistema

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Osservando la terza riga di B è facile capire che il sistema non ha soluzioni. Pertanto σ non è una quadrica a centro.

c) Scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel suo punto $(0, 0, 1)$.

Il piano cercato ha equazione

$$(0, 0, 1, 1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

ossia $2x + y + z - 1 = 0$.

d) Dopo aver portato σ in forma canonica, riconoscere di che quadrica si tratta.

Basta riscrivere l'equazione di σ nella forma

$$4(x-1)^2 + (y-2)^2 - 4(z+1) = 0$$

ed effettuare la traslazione

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 2 \\ z' = z + 1 \end{cases}$$

per arrivare alla forma canonica $z' = (x')^2 + \frac{(y')^2}{4}$. La quadrica σ è quindi un paraboloide ellittico. Ciò conferma la non esistenza del centro di σ.

Esercizio 4. Si consideri l'equazione

(*) $$(z - 2 - 2i)^4 = 4i$$

a) Trovare le soluzioni dell'equazione
$$z^4 = 4i \ .$$

Sia $w = 4i$. Abbiamo $|w| = 4$ e $\arg w = \frac{\pi}{2}$ per cui le sue radici quarte sono

$$\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}+k\frac{i\pi}{2}} = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}}i^k, \quad k \in \{0;1;2;3\} \ .$$

b) Trovare le soluzioni dell'equazione (*)

Vista la risposta alla domanda precedente, le soluzioni dell'equazione sono

$$z_k = 2 + 2i + \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}+k\frac{i\pi}{2}}, \quad k \in \{0;1;2;3\} \ .$$

c) Posizionare le soluzioni dell'equazione (*) nel piano di Gauss.

d) Quale figura geometrica si ottiene?

Si ottiene un quadrato, che è il traslato del quadrato formato dalle radici quarte di $4i$.

e) Indicare il centro e la lunghezza dei lati della figura geometrica di cui sopra.

Il centro è $2 + 2i$. La lunghezza di un lato si può ottenere calcolando esplicitamente le coordinate di due spigoli successivi, ma è più conveniente sfruttare il fatto che conosciamo la lunghezza della diagonale. Infatti una diagonale è il segmento che congiunge z_0 a z_2 (l'altra congiunge z_1 a z_3). Ora, $z_2 - z_0$ ha modulo $2\sqrt[4]{|w|} = 2\sqrt{2}$ e quindi, per il teorema di Pitagora, il lato ha lunghezza 2.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
2 luglio 2014 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V.

a) $V_1 = \mathbb{R}^3$ e $W_1 = \{(x-3y; 5x+y; xy) : x, y \in \mathbb{R}\}$;

I vettori $(1;5;0)$ $(x=1,\ y=0)$ e $(-3;1;0)$ $(x=0,\ y=1)$ appartengono a W_1, però la loro somma $\underline{v} = (-2;6;0)$ non vi appartiene. Infatti per appartenere al questo insieme dovrebbe essere della forma $\underline{v} = (x-3y; 5x+y; xy)$, quindi o $x=0$ o $y=0$. Se $x=0$, dobbiamo avere $y=6$ (per la seconda componente), ma la prima sarebbe -18; se invece $y=0$, dobbiamo avere $x=-2$ (per la prima componente), ma la seconda sarebbe -10. Quindi non è un sottospazio vettoriale.

b) $V_2 = \mathbb{R}_3[x]$ e $W_2 = \left\{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in V_2 : 2a_3 + a_1 = 0\right\}$. Ricordiamo che $\mathbb{R}_3[x]$ è lo spazio dei polinomi di grado al massimo 3;

Il vettore nullo, cioè il polinomio costante uguale a 0, appartiene al sottoinsieme, quindi non è vuoto. Dati due polinomio $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $Q(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ tali che $2a_3 + a_1 = 0$ e $2b_3 + b_1 = 0$ e due reali λ e μ, abbiamo $(\lambda P + \mu Q) = (\lambda a_3 + \mu b_3)x^3 + (\lambda a_2 + \mu b_2)x^2 + (\lambda a_1 + \mu b_1)x + \lambda a_0 + \mu b_0$ quindi $2(\lambda a_3 + \mu b_3) + \lambda a_1 + \mu b_1 = 2\lambda a_3 + \lambda a_1 + 2\mu b_3 + \mu b_1 = \lambda 0 + \mu 0 = 0$ e quindi W_2 è un sottospazio vettoriale.

c) Determinare i valori di k tali che $W_3 = \left\{f \in V_3 : \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2k^2 + 5k + 2\right\}$ sia un sottospazio vettoriale di $V_3 = \{\text{funzioni continue da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R}\}$.

Per essere un sottospazio vettoriale, W_3 deve contenere la funzione nulla. L'integrale della funzione nulla è 0, quindi dobbiamo avere $2k^2 + 5k + 2 = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono $k = -2$ e $k = -\frac{1}{2}$. In quel caso, il sottoinsieme W_3 diventa $W_3 = \left\{f \in V_3 : \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$ e diventa relativamente ovvio che è un sottospazio vettoriale. Infatti la funzione nulla vi appartiene e quindi è non vuoto. Inoltre se f e g sono due elementi di W_3 e λ e μ sono due reali, allora

$$\begin{aligned}\int_1^2 (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^2 \lambda f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \mu g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_1^2 g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda 0 + \mu 0 = 0.\end{aligned}$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema, dipendente da un parametro k,

$$\begin{cases} x - 3y + 7z + 9t = 11 \\ 2x - 2y + 6z + 10t = 10 \\ 5x + y + kz + 13t = 7 \end{cases}$$

a) Discutere, al variare del parametro k, l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema.

Usiamo il teorema di Rouché–Capelli.

La matrice dei coefficienti,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 6 & 10 \\ 5 & 1 & k & 13 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica almeno 2 perché il determinante della matrice 2×2 in alto a sinistra è $4 \neq 0$. Il determinante della sottomatrice di A costituita dalla prima, seconda e quarta colonna è nullo. Il determinante della sottomatrice costituita dalle tre prime colonne è

$$4k - 12$$

e quindi è nullo se e solo se $k = 3$. Per il teorema di Kronecker, $\operatorname{car} A = 2$ se $k = 3$ e $\operatorname{car} A = 3$ se no.

Sia

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Allora la matrice completa è $B = (A \mid \underline{v})$. Per $k \neq 3$, la matrice B ha sicuramente caratteristica 3 (perché la sua caratteristica massima è 3 e contiene una sottomatrice di caratteristica 3).

Il determinante della sottomatrice di B costituito dalla prima, seconda e quinta colonna è nullo per cui, per il teorema di Kronecker, la matrice B ha caratteristica 2 per $k = 3$.

Quindi per $k \neq 3$ il sistema ammette una retta di soluzioni e per $k = 3$ un piano di soluzioni.

b) Risolvere il sistema per $k = 3$.

Siamo nel caso in cui il sistema ammette soluzioni che dipendono da due parametri. Abbiamo visto alla domanda precedente che possiamo tenere le due prime equazioni e usare z e t come parametri. Rimane un sistema 2×2 da risolvere, seppur con due parametri nei coefficienti noti, e si trova che

$$\begin{cases} x = -z - 3t + 2 \\ y = \ \ 2z + 2t - 3 \end{cases}$$

Osservazione: si poteva usare la tecnica di Gauss per risolvere il sistema, fin dalla prima domanda. Usando la prima equazione per eliminare la x delle altre, veniva

$$\begin{cases} x - 3y \qquad\qquad + 7z \ \ + 9t = \ \ 11 \\ \qquad 4y \qquad\qquad - 8z \ \ - 8t = -12 \\ \qquad 16y + (k-35)z - 32t = -48 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x - 3y \qquad\qquad + 7z \ \ + 9t = \ \ 11 \\ \qquad y \qquad\qquad - 2z \ \ - 2t = \ \ -3 \\ \qquad 16y + (k-35)z - 32t = -48 \end{cases}$$

Usando la seconda equazione per semplificare la terza, viene allora

$$\begin{cases} x - 3y \quad + 7z + 9t = \ 11 \\ \qquad y \quad - 2z - 2t = -3 \\ \qquad (k-3)z \qquad = \ \ 0 \end{cases}$$

Per cui se $k \neq 3$, allora $z = 0$ e le soluzioni del sistema dipendono da un parametro (si può usare la seconda equazione per eliminare la y dalla prima e si trovano x e y in funzione di t). Se invece $k = 3$, l'ultima equazione diventa banale e le soluzioni del sistema dipendono da due parametri. Si può usare la seconda equazione per eliminare la y dalla prima e si ritrovano esattamente le soluzioni di cui sopra.

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 + 16x - 4y - 4z + 16 = 0 \ .$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 8 & -2 & -2 & 16 \end{pmatrix} .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

che non può essere soddisfatta (basta osservare la terza riga di A). Quindi σ non ha punti doppi.

b) La quadrica σ ha un centro? In caso affermativo, determinarlo.

Il centro di σ è dato dalla (eventuale) soluzione del sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Osservando la terza riga di B è facile capire che il sistema non ha soluzioni. Pertanto σ non è una quadrica a centro.

c) Scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel suo punto $(0, 0, 4)$.

Il piano cercato ha equazione

$$(0, 0, 4, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 ,$$

ossia $-4x + y + z - 4 = 0$.

d) Dopo aver portato σ in forma canonica, riconoscere di che quadrica si tratta.

Basta riscrivere l'equazione di σ nella forma

$$4(x + 2)^2 + (y - 2)^2 - 4(z + 1) = 0$$

ed effettuare la traslazione
$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 2 \\ z' = z + 1 \end{cases}$$
per arrivare alla forma canonica $z' = (x')^2 + \frac{(y')^2}{4}$. La quadrica σ è quindi un paraboloide ellittico. Ciò conferma la non esistenza del centro di σ.

Esercizio 4. Si consideri l'equazione

(*) $$(z - 1 - 2i)^4 = 64i$$

a) Trovare le soluzioni dell'equazione
$$z^4 = 64i$$
(si fa presente che $64 = 2^6$).

Sia $w = 64i$. Abbiamo $|w| = 64$ e $\arg w = \frac{\pi}{2}$ per cui le sue radici quarte sono
$$2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}+k\frac{i\pi}{2}} = 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}}i^k, \quad k \in \{0;1;2;3\} .$$

b) Trovare le soluzioni dell'equazione (*)

Vista la risposta alla domanda precedente, le soluzioni dell'equazione sono
$$z_k = 1 + 2i + 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}+k\frac{i\pi}{2}}, \quad k \in \{0;1;2;3\} .$$

c) Posizionare le soluzioni dell'equazione (*) nel piano di Gauss.

d) Quale figura geometrica si ottiene?

Si ottiene un quadrato, che è il traslato del quadrato formato dalle radici quarte di $64i$.

e) Indicare il centro e la lunghezza dei lati della figura geometrica di cui sopra.

Il centro è $1 + 2i$. La lunghezza di un lato si può ottenere calcolando esplicitamente le coordinate di due spigoli successivi, ma è più conveniente sfruttare il fatto che conosciamo la lunghezza della diagonale. Infatti una diagonale è il segmento che congiunge z_0 a z_2 (l'altra congiunge z_1 a z_3). Ora, $z_2 - z_0$ ha modulo $2\sqrt[4]{|w|} = 4\sqrt{2}$ e quindi, per il teorema di Pitagora, il lato ha lunghezza 4.