Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
17 giugno 2014 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Determinare, al variare del parametro k, la dimensione del sottospazio generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} k \\ 4 \\ -3k \\ k \end{pmatrix}.$$

La dimensione del sottospazio generato da questi tre vettori è uguale alla caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & 2 \\ 1 & k & -3 & 1 \\ k & 4 & -3k & k \end{pmatrix}.$$

Usando la prima colonna per semplificare la terza e la quarta, la matrice A ha la stessa caratteristica di

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k+3 & 1 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ k & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, usando l'ultima colonna per semplificare le altre, A_1 ha la stessa caratteristica di

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ k & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e di

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ k & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A_3 è $(4-k^2) = (2-k)(2+k)$; quindi per $k \neq \pm 2$ le matrici A_3, A_2, A_1 e A avranno caratteristica 3 e quindi i tre vettori generano un sottospazio di dimension 3 (e quindi sono linearmente indipendenti). Invece per $k = \pm 2$ queste matrici avranno caratteristica al massimo 2. La caratteristica è 2 perché il determinante costituito dalle due prime righe e dalla prima e ultima colonna è diverso da 0. Quindi i tre vettori generano un sottospazio di dimensione 2.

b) Determinare per quali valori del parametro k vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

Vista la domanda precedente, i vettori sono linearmente indipendenti se e solo se $k \neq 2$.

Esercizio 2. Si considerino i piani $\pi_1 : x - 4y - 1 = 0$ e $\pi_2 : 3x - 2z + 3 = 0$.

a) Si scrivano le equazioni della retta r passante per $A(1;0;1)$ e parallela ai piani π_1 e π_2.

Il vettore direzionale della retta è $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2$, dove $\underline{n}_1 = (1;-4;0)$ e $\underline{n}_2 = (3;0;-2)$ sono i vettori normali ai due piani ai quali deve essere parallela. Poiché $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2 = (8;2;12)$, le equazioni parametriche scalari della retta r sono

$$\begin{cases} x = 1 + 8t \\ y = 2t \\ z = 1 + 12t \end{cases}$$

b) Si determini (se esiste) l'intersezione tra r e il piano π_3 di equazione $3x - 2y - z - 8 = 0$.

Basta sostituire le equazioni di r in quella di π_3. Si ottiene infatti $t = \frac{3}{4}$, ossia il punto $(7; \frac{3}{2}; 10)$.

c) Si calcoli l'angolo α formato dai piani π_1 e π_2.

Tale angolo coincide con quello formato dai vettori $\underline{n}_1$ e $\underline{n}_2$. Pertanto si ha che $\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 = |\underline{n}_1||\underline{n}_2| \cos\alpha$, ossia $\alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{221}}$.

Esercizio 3. Sia

$$\begin{aligned} f_k : \ \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} &\longmapsto (a + kb^2 + d - b^2)x^2 + (4a - b + 4d)x + (4a - b + c + 4d) \end{aligned}$$

a) Sfruttando il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, individuare l'unico valore di k per il quale f_k può essere lineare.

Abbiamo

$$f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (k-1)x^2 - x - 1$$

e

$$f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4(k-1)x^2 - 2x - 2 \ ;$$

quindi

$$f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se $k = 1$. Quindi f_k può essere lineare solo se $k = 1$.

b) Per il valore di k di cui sopra, verificare che f_k è lineare.

Abbiamo

$$f_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (a+d)x^2 + (4a - b + 4d)x + (4a - b + c + 4d) \ ,$$

per cui risulta relativamente ovvio che l'applicazione è lineare. Infatti per ogni $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f_1 \left(\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \right) &= f_1 \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \\ \lambda c_1 \\ \lambda d_1 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda a_1 + \lambda d_1)x^2 + (4\lambda a_1 - \lambda b_1 + 4\lambda d_1)x + (4\lambda a_1 - \lambda b_1 + \lambda c_1 + 4\lambda d_1) \\
&= \lambda\big((a_1 + d_1)x^2 + (4a_1 - b_1 + 4d_1)x + (4a_1 - b_1 + c_1 + 4d_1)\big) \\
&= \lambda f_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1 \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \right) &= f_1 \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \\ d_1+d_2 \end{pmatrix} \\
&= (a_1 + a_2 + d_1 + d_2)x^2 + \\
&\qquad (4(a_1+a_2) - (b_1+b_2) + 4(d_1+d_2))x + \\
&\qquad (4(a_1+a_2) - (b_1+b_2) + (c_1+c_2) + 4(d_1+d_2)) \\
&= (a_1 + d_1)x^2 + (a_2 + d_2)x^2 + \\
&\qquad (4a_1 - b_1 + 4d_1)x + (4a_2 - b_2 + 4d_2)x + \\
&\qquad (4a_1 - b_1 + c_1 + 4d_1) + (4a_2 - b_2 + c_2 + d_2) \\
&= f_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + f_1 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c) Ricordare (senza dimostrazione) quali sono le dimensioni degli spazi vettoriali $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}_2[x]$.

Sono rispettivamente di dimensione 4 e 3.

d) Scrivere la matrice dell'applicazione lineare f_1 nella base canonica di $\mathbb{R}^4$ e nella base $\{x^2 + 4x + 4; x + 1; 1\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$.

Il modo più semplice di risolvere la questione è di accorgersi che

$$f_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (a + d)(x^2 + 4x + 4) - b(x + 1) + c \ .$$

per cui la matrice è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un'altra possibilità è di risolvere il sistema

$$f_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \alpha(x^2 + 4x + 4) + \beta(x + 1) + \gamma \ ,$$

cioè

$$\begin{cases} \alpha & = a + d \\ 4\alpha + \beta & = 4a - b + 4d \\ 4\alpha + \beta + \gamma & = 4a - b + c + 4d \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \alpha = a + d \\ \beta = -b \\ \gamma = c \end{cases}$$

La matrice è (ovviamente) la stessa.

Esercizio 4. Risolvere l'equazione

$$z^2 - (3 + i)z + 8 - i = 0$$

utilizzando la forma algebrica e rappresentare le soluzioni sul piano di Gauss. Si segnala che $26^2 = 676$.

Si tratta di un'equazione del secondo grado. Il suo discriminante è

$$\Delta = (3 + i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (8 - i) = -24 + 10i \ .$$

Calcoliamo le radici quadrate del discriminante. Sono i complessi

$$\delta = a + ib$$

tali che

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = -24 \\ 2ab & = 10 \\ a^2 + b^2 & = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26 \end{cases}$$

Sommando la prima e la terza si trova $2a^2 = 2$, cioè $a = \pm 1$ e quindi nella seconda $b = \pm 5$ (con a e b dello stesso segno). Abbiamo quindi le due soluzioni dell'equazione

$$\begin{cases} z_1 & = \frac{3+i+1+5i}{2} = 2+3i \\ z_2 & = \frac{3+i-1-5i}{2} = 1-2i \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
17 giugno 2014 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Determinare, al variare del parametro k, la dimensione del sottospazio generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} k \\ 4 \\ 2k \\ k \end{pmatrix} .$$

La dimensione del sottospazio generato da questi tre vettori è uguale alla caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & -1 \\ 1 & k & 2 & 1 \\ k & 4 & 2k & k \end{pmatrix} .$$

Usando la prima colonna per semplificare la terza e la quarta, la matrice A ha la stessa caratteristica di

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k-2 & -2 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ k & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, usando l'ultima colonna per semplificare le altre, A_1 ha la stessa caratteristica di

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ k & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e di

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & k & 0 \\ k & 4 & 0 \end{pmatrix} .$$

Il determinante di A_3 è $-2(4-k^2) = -2(2-k)(2+k)$; quindi per $k \neq \pm 2$ le matrici A_3, A_2, A_1 e A avranno caratteristica 3 e quindi i tre vettori generano un sottospazio di dimension 3 (e quindi sono linearmente indipendenti). Invece per $k = \pm 2$ queste matrici avranno caratteristica al massimo 2. La caratteristica è 2 perché il determinante costituito dalle due prime righe e dalla prima e ultima colonna è diverso da 0. Quindi i tre vettori generano un sottospazio di dimensione 2.

b) Determinare per quali valori del parametro k vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

Vista la domanda precedente, i vettori sono linearmente indipendenti se e solo se $k \neq 2$.

Esercizio 2. Si considerino i piani $\pi_1 : x - 4y - 1 = 0$ e $\pi_2 : 3x - 2z + 3 = 0$.

a) Si scrivano le equazioni della retta r passante per $A(1;0;-1)$ e parallela ai piani π_1 e π_2.

Il vettore direzionale della retta è $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2$, dove $\underline{n}_1 = (1;-4;0)$ e $\underline{n}_2 = (3;0;-2)$ sono i vettori normali ai due piani ai quali deve essere parallela. Poiché $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2 = (8;2;12)$, le equazioni parametriche scalari della retta r sono

$$\begin{cases} x = 1 + 8t \\ y = 2t \\ z = -1 + 12t \end{cases}$$

b) Si determini (se esiste) l'intersezione tra r e il piano π_3 di equazione $3x - 2y - z - 8 = 0$.

Basta sostituire le equazioni di r in quella di π_3. Si ottiene infatti $t = \frac{1}{2}$, ossia il punto $(5;1;5)$.

c) Si calcoli l'angolo α formato dai piani π_1 e π_2.

Tale angolo coincide con quello formato dai vettori $\underline{n}_1$ e $\underline{n}_2$. Pertanto si ha che $\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 = |\underline{n}_1||\underline{n}_2| \cos\alpha$, ossia $\alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{221}}$.

Esercizio 3. Sia

$$\begin{aligned} f_k : \ \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} &\longmapsto (a + kb^2 + d + b^2)x^2 + (4a - b + 4d)x + (4a - b + c + 4d) \end{aligned}$$

a) Sfruttando il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, individuare l'unico valore di k per il quale f_k può essere lineare.

Abbiamo

$$f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (k+1)x^2 - x - 1$$

e

$$f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4(k+1)x^2 - 2x - 2 \ ;$$

quindi

$$f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se $k = -1$. Quindi f_k può essere lineare solo se $k = -1$.

b) Per il valore di k di cui sopra, verificare che f_k è lineare.

Abbiamo

$$f_{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (a+d)x^2 + (4a - b + 4d)x + (4a - b + c + 4d) \ ,$$

per cui risulta relativamente ovvio che l'applicazione è lineare. Infatti per ogni $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_{-1}\left(\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}\right) &= f_{-1} \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \\ \lambda c_1 \\ \lambda d_1 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda a_1 + \lambda d_1)x^2 + (4\lambda a_1 - \lambda b_1 + 4\lambda d_1)x + (4\lambda a_1 - \lambda b_1 + \lambda c_1 + 4\lambda d_1) \\ &= \lambda\big((a_1 + d_1)x^2 + (4a_1 - b_1 + 4d_1)x + (4a_1 - b_1 + c_1 + 4d_1)\big) \\ &= \lambda f_{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{-1}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}\right) &= f_{-1} \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \\ d_1+d_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_1 + a_2 + d_1 + d_2)x^2 + \\ &\qquad (4(a_1+a_2) - (b_1+b_2) + 4(d_1+d_2))x + \\ &\qquad (4(a_1+a_2) - (b_1+b_2) + (c_1+c_2) + 4(d_1+d_2)) \\ &= (a_1+d_1)x^2 + (a_2+d_2)x^2 + \\ &\qquad (4a_1 - b_1 + 4d_1)x + (4a_2 - b_2 + 4d_2)x + \\ &\qquad (4a_1 - b_1 + c_1 + 4d_1) + (4a_2 - b_2 + c_2 + d_2) \\ &= f_{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + f_{-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Ricordare (senza dimostrazione) quali sono le dimensioni degli spazi vettoriali $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}_2[x]$.

Sono rispettivamente di dimensione 4 e 3.

d) Scrivere la matrice dell'applicazione lineare f_{-1} nella base canonica di $\mathbb{R}^4$ e nella base $\{x^2+4x+4; x+1; 1\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$.

Il modo più semplice di risolvere la questione è di accorgersi che

$$f_{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (a+d)(x^2+4x+4) - b(x+1) + c\ .$$

per cui la matrice è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un'altra possibilità è di risolvere il sistema

$$f_{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \alpha(x^2+4x+4) + \beta(x+1) + \gamma\ ,$$

cioè

$$\begin{cases} \alpha & = a+d \\ 4\alpha+\beta & = 4a-b+4d \\ 4\alpha+\beta+\gamma & = 4a-b+c+4d \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \alpha = a+d \\ \beta = -b \\ \gamma = c \end{cases}$$

La matrice è (ovviamente) la stessa.

Esercizio 4. Risolvere l'equazione

$$z^2 - (5+2i)z + 9 + 7i = 0$$

utilizzando la forma algebrica e rappresentare le soluzioni sul piano di Gauss. Si segnala che $17^2 = 289$.

Si tratta di un'equazione del secondo grado. Il suo discriminante è

$$\Delta = (5+2i)^2 - 4\cdot 1\cdot(9+7i) = -15-8i\ .$$

Calcoliamo le radici quadrate del discriminante. Sono i complessi

$$\delta = a + ib$$

tali che

$$\begin{cases} a^2-b^2 & = -15 \\ 2ab & = -8 \\ a^2+b^2 & = \sqrt{15^2+8^2} = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17 \end{cases}$$

Sommando la prima e la terza si trova $2a^2 = 2$, cioè $a = \pm 1$ e quindi nella seconda $b = \mp 4$ (con a e b di segni opposti). Abbiamo quindi le due soluzioni dell'equazione

$$\begin{cases} z_1 & = \frac{5+2i+1-4i}{2} = 3 - i \\ z_2 & = \frac{5+2i-1+4i}{2} = 2 + 3i \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
17 giugno 2014 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Determinare, al variare del parametro k, la dimensione del sottospazio generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \\ 3 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} k \\ 4 \\ -2k \\ k \end{pmatrix}.$$

La dimensione del sottospazio generato da questi tre vettori è uguale alla caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & 3 \\ 1 & k & -2 & 1 \\ k & 4 & -2k & k \end{pmatrix}.$$

Usando la prima colonna per semplificare la terza e la quarta, la matrice A ha la stessa caratteristica di

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k+2 & 2 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ k & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, usando l'ultima colonna per semplificare le altre, A_1 ha la stessa caratteristica di

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ k & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e di

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & k & 0 \\ k & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A_3 è $2(4-k^2) = 2(2-k)(2+k)$; quindi per $k \neq \pm 2$ le matrici A_3, A_2, A_1 e A avranno caratteristica 3 e quindi i tre vettori generano un sottospazio di dimension 3 (e quindi sono linearmente indipendenti). Invece per $k = \pm 2$ queste matrici avranno caratteristica al massimo 2. La caratteristica è 2 perché il determinante costituito dalle due prime righe e dalla prima e ultima colonna è diverso da 0. Quindi i tre vettori generano un sottospazio di dimensione 2.

b) Determinare per quali valori del parametro k vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

Vista la domanda precedente, i vettori sono linearmente indipendenti se e solo se $k \neq 2$.

Esercizio 2. Si considerino i piani $\pi_1 : x - 4y - 1 = 0$ e $\pi_2 : 3x - 2z + 3 = 0$.

a) Si scrivano le equazioni della retta r passante per $A(1; 0; 2)$ e parallela ai piani π_1 e π_2.

Il vettore direzionale della retta è $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2$, dove $\underline{n}_1 = (1; -4; 0)$ e $\underline{n}_2 = (3; 0; -2)$ sono i vettori normali ai due piani ai quali deve essere parallela. Poiché $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2 = (8; 2; 12)$, le equazioni parametriche scalari della retta r sono

$$\begin{cases} x = 1 + 8t \\ y = 2t \\ z = 2 + 12t \end{cases}$$

b) Si determini (se esiste) l'intersezione tra r e il piano π_3 di equazione $3x - 2y - z - 8 = 0$.

Basta sostituire le equazioni di r in quella di π_3. Si ottiene infatti $t = \frac{7}{8}$, ossia il punto $(8; \frac{7}{4}; \frac{25}{2})$.

c) Si calcoli l'angolo α formato dai piani π_1 e π_2.

Tale angolo coincide con quello formato dai vettori $\underline{n}_1$ e $\underline{n}_2$. Pertanto si ha che $\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 = |\underline{n}_1||\underline{n}_2| \cos\alpha$, ossia $\alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{221}}$.

Esercizio 3. Sia

$$\begin{aligned} f_k : \ \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} &\longmapsto (a + kb^2 + d - 2b^2)x^2 + (4a - b + 4d)x + (4a - b + c + 4d) \end{aligned}$$

a) Sfruttando il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, individuare l'unico valore di k per il quale f_k può essere lineare.

Abbiamo

$$f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (k-2)x^2 - x - 1$$

e

$$f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4(k-2)x^2 - 2x - 2 \ ;$$

quindi

$$f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se $k = 2$. Quindi f_k può essere lineare solo se $k = 2$.

b) Per il valore di k di cui sopra, verificare che f_k è lineare.

Abbiamo

$$f_2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (a+d)x^2 + (4a - b + 4d)x + (4a - b + c + 4d) \ ,$$

per cui risulta relativamente ovvio che l'applicazione è lineare. Infatti per ogni $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_2 \left(\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \right) &= f_2 \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \\ \lambda c_1 \\ \lambda d_1 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda a_1 + \lambda d_1)x^2 + (4\lambda a_1 - \lambda b_1 + 4\lambda d_1)x + (4\lambda a_1 - \lambda b_1 + \lambda c_1 + 4\lambda d_1) \\ &= \lambda\big((a_1 + d_1)x^2 + (4a_1 - b_1 + 4d_1)x + (4a_1 - b_1 + c_1 + 4d_1)\big) \\ &= \lambda f_2 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \right) &= f_2 \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \\ d_1+d_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_1 + a_2 + d_1 + d_2)x^2 + \\ &\qquad (4(a_1+a_2) - (b_1+b_2) + 4(d_1+d_2))x + \\ &\qquad (4(a_1+a_2) - (b_1+b_2) + (c_1+c_2) + 4(d_1+d_2)) \\ &= (a_1+d_1)x^2 + (a_2+d_2)x^2 + \\ &\qquad (4a_1 - b_1 + 4d_1)x + (4a_2 - b_2 + 4d_2)x + \\ &\qquad (4a_1 - b_1 + c_1 + 4d_1) + (4a_2 - b_2 + c_2 + d_2) \\ &= f_2 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + f_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Ricordare (senza dimostrazione) quali sono le dimensioni degli spazi vettoriali $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}_2[x]$.

Sono rispettivamente di dimensione 4 e 3.

d) Scrivere la matrice dell'applicazione lineare f_2 nella base canonica di $\mathbb{R}^4$ e nella base $\{x^2 + 4x + 4; x + 1; 1\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$.

Il modo più semplice di risolvere la questione è di accorgersi che

$$f_2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (a + d)(x^2 + 4x + 4) - b(x + 1) + c \ .$$

per cui la matrice è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un'altra possibilità è di risolvere il sistema

$$f_2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \alpha(x^2 + 4x + 4) + \beta(x + 1) + \gamma \ ,$$

cioè

$$\begin{cases} \alpha & = a + d \\ 4\alpha + \beta & = 4a - b + 4d \\ 4\alpha + \beta + \gamma & = 4a - b + c + 4d \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \alpha = a + d \\ \beta = -b \\ \gamma = c \end{cases}$$

La matrice è (ovviamente) la stessa.

Esercizio 4. Risolvere l'equazione

$$z^2 - (3 + i)z + 8 - i = 0$$

utilizzando la forma algebrica e rappresentare le soluzioni sul piano di Gauss. Si segnala che $26^2 = 676$.

Si tratta di un'equazione del secondo grado. Il suo discriminante è

$$\Delta = (3 + i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (8 - i) = -24 + 10i \ .$$

Calcoliamo le radici quadrate del discriminante. Sono i complessi

$$\delta = a + ib$$

tali che

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = -24 \\ 2ab & = 10 \\ a^2 + b^2 & = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26 \end{cases}$$

Sommando la prima e la terza si trova $2a^2 = 2$, cioè $a = \pm 1$ e quindi nella seconda $b = \pm 5$ (con a e b dello stesso segno). Abbiamo quindi le due soluzioni dell'equazione

$$\begin{cases} z_1 & = \frac{3+i+1+5i}{2} = 2+3i \\ z_2 & = \frac{3+i-1-5i}{2} = 1-2i \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
17 giugno 2014 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Determinare, al variare del parametro k, la dimensione del sottospazio generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \\ -2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} k \\ 4 \\ 3k \\ k \end{pmatrix} .$$

La dimensione del sottospazio generato da questi tre vettori è uguale alla caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & -2 \\ 1 & k & 3 & 1 \\ k & 4 & 3k & k \end{pmatrix} .$$

Usando la prima colonna per semplificare la terza e la quarta, la matrice A ha la stessa caratteristica di

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k-3 & -3 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ k & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, usando l'ultima colonna per semplificare le altre, A_1 ha la stessa caratteristica di

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ k & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e di

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & k & 0 \\ k & 4 & 0 \end{pmatrix} .$$

Il determinante di A_3 è $-3(4-k^2) = -3(2-k)(2+k)$; quindi per $k \neq \pm 2$ le matrici A_3, A_2, A_1 e A avranno caratteristica 3 e quindi i tre vettori generano un sottospazio di dimension 3 (e quindi sono linearmente indipendenti). Invece per $k = \pm 2$ queste matrici avranno caratteristica al massimo 2. La caratteristica è 2 perché il determinante costituito dalle due prime righe e dalla prima e ultima colonna è diverso da 0. Quindi i tre vettori generano un sottospazio di dimensione 2.

b) Determinare per quali valori del parametro k vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

Vista la domanda precedente, i vettori sono linearmente indipendenti se e solo se $k \neq 2$.

Esercizio 2. Si considerino i piani $\pi_1 : x - 4y - 1 = 0$ e $\pi_2 : 3x - 2z + 3 = 0$.

a) Si scrivano le equazioni della retta r passante per $A(1; 0; -2)$ e parallela ai piani π_1 e π_2.

Il vettore direzionale della retta è $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2$, dove $\underline{n}_1 = (1; -4; 0)$ e $\underline{n}_2 = (3; 0; -2)$ sono i vettori normali ai due piani ai quali deve essere parallela. Poiché $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2 = (8; 2; 12)$, le equazioni parametriche scalari della retta r sono

$$\begin{cases} x = 1 + 8t \\ y = 2t \\ z = -2 + 12t \end{cases}$$

b) Si determini (se esiste) l'intersezione tra r e il piano π_3 di equazione $3x - 2y - z - 8 = 0$.

Basta sostituire le equazioni di r in quella di π_3. Si ottiene infatti $t = \frac{3}{8}$, ossia il punto $(4; \frac{3}{4}; \frac{5}{2})$.

c) Si calcoli l'angolo α formato dai piani π_1 e π_2.

Tale angolo coincide con quello formato dai vettori $\underline{n}_1$ e $\underline{n}_2$. Pertanto si ha che $\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 = |\underline{n}_1||\underline{n}_2| \cos\alpha$, ossia $\alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{221}}$.

Esercizio 3. Sia

$$\begin{aligned} f_k : \ \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} &\longmapsto (a + kb^2 + d + 2b^2)x^2 + (4a - b + 4d)x + (4a - b + c + 4d) \end{aligned}$$

a) Sfruttando il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, individuare l'unico valore di k per il quale f_k può essere lineare.

Abbiamo

$$f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (k+2)x^2 - x - 1$$

e

$$f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4(k+2)x^2 - 2x - 2 \ ;$$

quindi

$$f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se $k = -2$. Quindi f_k può essere lineare solo se $k = -2$.

b) Per il valore di k di cui sopra, verificare che f_k è lineare.

Abbiamo

$$f_{-2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (a+d)x^2 + (4a - b + 4d)x + (4a - b + c + 4d) \ ,$$

per cui risulta relativamente ovvio che l'applicazione è lineare. Infatti per ogni $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_{-2} \left(\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \right) &= f_{-2} \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \\ \lambda c_1 \\ \lambda d_1 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda a_1 + \lambda d_1)x^2 + (4\lambda a_1 - \lambda b_1 + 4\lambda d_1)x + (4\lambda a_1 - \lambda b_1 + \lambda c_1 + 4\lambda d_1) \\ &= \lambda\big((a_1 + d_1)x^2 + (4a_1 - b_1 + 4d_1)x + (4a_1 - b_1 + c_1 + 4d_1)\big) \\ &= \lambda f_{-2} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{-2} \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \right) &= f_{-2} \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \\ d_1+d_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_1 + a_2 + d_1 + d_2)x^2 + \\ &\qquad (4(a_1+a_2) - (b_1+b_2) + 4(d_1+d_2))x + \\ &\qquad (4(a_1+a_2) - (b_1+b_2) + (c_1+c_2) + 4(d_1+d_2)) \\ &= (a_1+d_1)x^2 + (a_2+d_2)x^2 + \\ &\qquad (4a_1 - b_1 + 4d_1)x + (4a_2 - b_2 + 4d_2)x + \\ &\qquad (4a_1 - b_1 + c_1 + 4d_1) + (4a_2 - b_2 + c_2 + d_2) \\ &= f_{-2} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + f_{-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Ricordare (senza dimostrazione) quali sono le dimensioni degli spazi vettoriali $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}_2[x]$.

Sono rispettivamente di dimensione 4 e 3.

d) Scrivere la matrice dell'applicazione lineare f_{-2} nella base canonica di $\mathbb{R}^4$ e nella base $\{x^2+4x+4; x+1; 1\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$.

Il modo più semplice di risolvere la questione è di accorgersi che

$$f_{-2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (a+d)(x^2+4x+4) - b(x+1) + c \ .$$

per cui la matrice è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un'altra possibilità è di risolvere il sistema

$$f_{-2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \alpha(x^2+4x+4) + \beta(x+1) + \gamma \ ,$$

cioè

$$\begin{cases} \alpha & = a+d \\ 4\alpha+\beta & = 4a-b+4d \\ 4\alpha+\beta+\gamma & = 4a-b+c+4d \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \alpha = a+d \\ \beta = -b \\ \gamma = c \end{cases}$$

La matrice è (ovviamente) la stessa.

Esercizio 4. Risolvere l'equazione

$$z^2 - (5+2i)z + 9 + 7i = 0$$

utilizzando la forma algebrica e rappresentare le soluzioni sul piano di Gauss. Si segnala che $17^2 = 289$.

Si tratta di un'equazione del secondo grado. Il suo discriminante è

$$\Delta = (5+2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9+7i) = -15 - 8i \ .$$

Calcoliamo le radici quadrate del discriminante. Sono i complessi

$$\delta = a + ib$$

tali che

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = -15 \\ 2ab & = -8 \\ a^2 + b^2 & = \sqrt{15^2+8^2} = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17 \end{cases}$$

Sommando la prima e la terza si trova $2a^2 = 2$, cioè $a = \pm 1$ e quindi nella seconda $b = \mp 4$ (con a e b di segni opposti). Abbiamo quindi le due soluzioni dell'equazione

$$\begin{cases} z_1 & = \frac{5+2i+1-4i}{2} = 3 - i \\ z_2 & = \frac{5+2i-1+4i}{2} = 2 + 3i \end{cases}$$