Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
17 giugno 2014 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Determinare, al variare del parametro k, la dimensione del sottospazio generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} k \\ 4 \\ -3k \\ k \end{pmatrix}.$$

La dimensione del sottospazio generato da questi tre vettori è uguale alla caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & 2 \\ 1 & k & -3 & 1 \\ k & 4 & -3k & k \end{pmatrix}.$$

Usando la prima colonna per semplificare la terza e la quarta, la matrice A ha la stessa caratteristica di

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k+3 & 1 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ k & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, usando l'ultima colonna per semplificare le altre, A_1 ha la stessa caratteristica di

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ k & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e di

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ k & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A_3 è $(4-k^2) = (2-k)(2+k)$; quindi per $k \neq \pm 2$ le matrici A_3, A_2, A_1 e A avranno caratteristica 3 e quindi i tre vettori generano un sottospazio di dimension 3 (e quindi sono linearmente indipendenti). Invece per $k = \pm 2$ queste matrici avranno caratteristica al massimo 2. La caratteristica è 2 perché il determinante costituito dalle due prime righe e dalla prima e ultima colonna è diverso da 0. Quindi i tre vettori generano un sottospazio di dimensione 2.

b) Determinare per quali valori del parametro k vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

Vista la domanda precedente, i vettori sono linearmente indipendenti se e solo se $k \neq 2$.

Esercizio 2. Si considerino i piani $\pi_1 : x - 4y - 1 = 0$ e $\pi_2 : 3x - 2z + 3 = 0$.

a) Si scrivano le equazioni della retta r passante per $A(1;0;1)$ e parallela ai piani π_1 e π_2.

Il vettore direzionale della retta è $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2$, dove $\underline{n}_1 = (1;-4;0)$ e $\underline{n}_2 = (3;0;-2)$ sono i vettori normali ai due piani ai quali deve essere parallela. Poiché $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2 = (8;2;12)$, le equazioni parametriche scalari della retta r sono

$$\begin{cases} x = 1 + 8t \\ y = 2t \\ z = 1 + 12t \end{cases}$$

b) Si determini (se esiste) l'intersezione tra r e il piano π_3 di equazione $3x - 2y - z - 8 = 0$.

Basta sostituire le equazioni di r in quella di π_3. Si ottiene infatti $t = \frac{3}{4}$, ossia il punto $(7; \frac{3}{2}; 10)$.

c) Si calcoli l'angolo α formato dai piani π_1 e π_2.

Tale angolo coincide con quello formato dai vettori $\underline{n}_1$ e $\underline{n}_2$. Pertanto si ha che $\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 = |\underline{n}_1||\underline{n}_2| \cos\alpha$, ossia $\alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{221}}$.

Esercizio 3. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -17 & 77 \\ 2 & 12 & -56 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Determinare autovettori e autovalori della matrice A.

Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda.$$

Siccome l'elemento di posto $(3,1)$ di A è 0, conviene sviluppare lungo la prima colonna o la terza riga. In questo caso può essere utile aggiungere due volte la seconda riga alla prima prima di sviluppare lungo la prima colonna.

Una radice evidente del polinomio è 0, le altre due si trovano facilmente risolvendo l'equazione di grado 2 e sono 1 e 2.

Per trovare gli autovalori per l'autovalore 0 risolviamo il sistema

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dall'ultima riga, è immediato che $y = 5z$. Nella seconda riga viene $2x = -60z+56z = -4z$, cioè $x = -2z$. Quindi gli autovettori per l'autovalore 0 sono della forma

$$z\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $z \neq 0$.

Si verifica che $A\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{0}$

Si procede per gli autovalori 1 e 2 risolvendo i sistemi

$$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e si trova rispettivamente

$$z\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad z\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

come insieme di autovalori (sempre con $z \neq 0$).

Si verifica che $A\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ e che $A\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Determinare, se esistono, una matrice invertibile S e una matrice diagonale Λ tali che

$$A = S\Lambda S^{-1}.$$

Esistono tali S e Λ perché gli autovalori di A sono tutti reali e semplici (quindi regolari). Inoltre abbiamo già calcolato una base di ciascuno degli autospazi per cui possiamo prendere

$$S = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -7 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Qual è il caratteristica di A ?

La matrice A ammette l'autovalore 0 con molteplicità geometrica 1, quindi la dimensione del suo nucleo è 1 e quindi la dimensione della sua immagine è $3 - 1 = 2$, cioè la sua caratteristica è 2.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
17 giugno 2014 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Determinare, al variare del parametro k, la dimensione del sottospazio generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} k \\ 4 \\ 2k \\ k \end{pmatrix}.$$

La dimensione del sottospazio generato da questi tre vettori è uguale alla caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & -1 \\ 1 & k & 2 & 1 \\ k & 4 & 2k & k \end{pmatrix}.$$

Usando la prima colonna per semplificare la terza e la quarta, la matrice A ha la stessa caratteristica di

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k-2 & -2 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ k & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, usando l'ultima colonna per semplificare le altre, A_1 ha la stessa caratteristica di

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ k & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e di

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & k & 0 \\ k & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A_3 è $-2(4-k^2) = -2(2-k)(2+k)$; quindi per $k \neq \pm 2$ le matrici A_3, A_2, A_1 e A avranno caratteristica 3 e quindi i tre vettori generano un sottospazio di dimension 3 (e quindi sono linearmente indipendenti). Invece per $k = \pm 2$ queste matrici avranno caratteristica al massimo 2. La caratteristica è 2 perché il determinante costituito dalle due prime righe e dalla prima e ultima colonna è diverso da 0. Quindi i tre vettori generano un sottospazio di dimensione 2.

b) Determinare per quali valori del parametro k vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

Vista la domanda precedente, i vettori sono linearmente indipendenti se e solo se $k \neq 2$.

Esercizio 2. Si considerino i piani $\pi_1 : x - 4y - 1 = 0$ e $\pi_2 : 3x - 2z + 3 = 0$.

a) Si scrivano le equazioni della retta r passante per $A(1;0;-1)$ e parallela ai piani π_1 e π_2.

Il vettore direzionale della retta è $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2$, dove $\underline{n}_1 = (1;-4;0)$ e $\underline{n}_2 = (3;0;-2)$ sono i vettori normali ai due piani ai quali deve essere parallela. Poiché $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2 = (8;2;12)$, le equazioni parametriche scalari della retta r sono

$$\begin{cases} x = 1 + 8t \\ y = 2t \\ z = -1 + 12t \end{cases}$$

b) Si determini (se esiste) l'intersezione tra r e il piano π_3 di equazione $3x - 2y - z - 8 = 0$.

Basta sostituire le equazioni di r in quella di π_3. Si ottiene infatti $t = \frac{1}{2}$, ossia il punto $(5;1;5)$.

c) Si calcoli l'angolo α formato dai piani π_1 e π_2.

Tale angolo coincide con quello formato dai vettori $\underline{n}_1$ e $\underline{n}_2$. Pertanto si ha che $\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 = |\underline{n}_1||\underline{n}_2| \cos\alpha$, ossia $\alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{221}}$.

Esercizio 3. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -17 & 77 \\ 2 & 12 & -56 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Determinare autovettori e autovalori della matrice A.

Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda.$$

Siccome l'elemento di posto $(3,1)$ di A è 0, conviene sviluppare lungo la prima colonna o la terza riga. In questo caso può essere utile aggiungere due volte la seconda riga alla prima prima di sviluppare lungo la prima colonna.

Una radice evidente del polinomio è 0, le altre due si trovano facilmente risolvendo l'equazione di grado 2 e sono 1 e 2.

Per trovare gli autovalori per l'autovalore 0 risolviamo il sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dall'ultima riga, è immediato che $y = 5z$. Nella seconda riga viene $2x = -60z+56z = -4z$, cioè $x = -2z$. Quindi gli autovettori per l'autovalore 0 sono della forma

$$z \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $z \neq 0$.

Si verifica che $A \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{0}$

Si procede per gli autovalori 1 e 2 risolvendo i sistemi

$$(A-I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A-2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e si trova rispettivamente

$$z \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad z \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

come insieme di autovalori (sempre con $z \neq 0$).

Si verifica che $A \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ e che $A \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Determinare, se esistono, una matrice invertibile S e una matrice diagonale Λ tali che

$$A = S\Lambda S^{-1}.$$

Esistono tali S e Λ perché gli autovalori di A sono tutti reali e semplici (quindi regolari). Inoltre abbiamo già calcolato una base di ciascuno degli autospazi per cui possiamo prendere

$$S = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -7 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Qual è il caratteristica di A ?

La matrice A ammette l'autovalore 0 con molteplicità geometrica 1, quindi la dimensione del suo nucleo è 1 e quindi la dimensione della sua immagine è $3 - 1 = 2$, cioè la sua caratteristica è 2.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
17 giugno 2014 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Determinare, al variare del parametro k, la dimensione del sottospazio generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \\ 3 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} k \\ 4 \\ -2k \\ k \end{pmatrix}.$$

La dimensione del sottospazio generato da questi tre vettori è uguale alla caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & 3 \\ 1 & k & -2 & 1 \\ k & 4 & -2k & k \end{pmatrix}.$$

Usando la prima colonna per semplificare la terza e la quarta, la matrice A ha la stessa caratteristica di

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k+2 & 2 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ k & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, usando l'ultima colonna per semplificare le altre, A_1 ha la stessa caratteristica di

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ k & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e di

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & k & 0 \\ k & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A_3 è $2(4-k^2) = 2(2-k)(2+k)$; quindi per $k \neq \pm 2$ le matrici A_3, A_2, A_1 e A avranno caratteristica 3 e quindi i tre vettori generano un sottospazio di dimension 3 (e quindi sono linearmente indipendenti). Invece per $k = \pm 2$ queste matrici avranno caratteristica al massimo 2. La caratteristica è 2 perché il determinante costituito dalle due prime righe e dalla prima e ultima colonna è diverso da 0. Quindi i tre vettori generano un sottospazio di dimensione 2.

b) Determinare per quali valori del parametro k vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

Vista la domanda precedente, i vettori sono linearmente indipendenti se e solo se $k \neq 2$.

Esercizio 2. Si considerino i piani $\pi_1 : x - 4y - 1 = 0$ e $\pi_2 : 3x - 2z + 3 = 0$.

a) Si scrivano le equazioni della retta r passante per $A(1;0;2)$ e parallela ai piani π_1 e π_2.

Il vettore direzionale della retta è $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2$, dove $\underline{n}_1 = (1;-4;0)$ e $\underline{n}_2 = (3;0;-2)$ sono i vettori normali ai due piani ai quali deve essere parallela. Poiché $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2 = (8;2;12)$, le equazioni parametriche scalari della retta r sono

$$\begin{cases} x = 1 + 8t \\ y = 2t \\ z = 2 + 12t \end{cases}$$

b) Si determini (se esiste) l'intersezione tra r e il piano π_3 di equazione $3x - 2y - z - 8 = 0$.

Basta sostituire le equazioni di r in quella di π_3. Si ottiene infatti $t = \frac{7}{8}$, ossia il punto $(8; \frac{7}{4}; \frac{25}{2})$.

c) Si calcoli l'angolo α formato dai piani π_1 e π_2.

Tale angolo coincide con quello formato dai vettori $\underline{n}_1$ e $\underline{n}_2$. Pertanto si ha che $\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 = |\underline{n}_1||\underline{n}_2| \cos\alpha$, ossia $\alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{221}}$.

Esercizio 3. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -17 & 77 \\ 2 & 12 & -56 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Determinare autovettori e autovalori della matrice A.

Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda.$$

Siccome l'elemento di posto $(3, 1)$ di A è 0, conviene sviluppare lungo la prima colonna o la terza riga. In questo caso può essere utile aggiungere due volte la seconda riga alla prima prima di sviluppare lungo la prima colonna.

Una radice evidente del polinomio è 0, le altre due si trovano facilmente risolvendo l'equazione di grado 2 e sono 1 e 2.

Per trovare gli autovalori per l'autovalore 0 risolviamo il sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dall'ultima riga, è immediato che $y = 5z$. Nella seconda riga viene $2x = -60z+56z = -4z$, cioè $x = -2z$. Quindi gli autovettori per l'autovalore 0 sono della forma

$$z \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $z \neq 0$.

Si verifica che $A \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{0}$

Si procede per gli autovalori 1 e 2 risolvendo i sistemi

$$(A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e si trova rispettivamente

$$z \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad z \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

come insieme di autovalori (sempre con $z \neq 0$).

Si verifica che $A \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ **e che** $A \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$**.**

b) Determinare, se esistono, una matrice invertibile S e una matrice diagonale Λ tali che

$$A = S\Lambda S^{-1}.$$

Esistono tali S e Λ perché gli autovalori di A sono tutti reali e semplici (quindi regolari). Inoltre abbiamo già calcolato una base di ciascuno degli autospazi per cui possiamo prendere

$$S = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -7 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Qual è il caratteristica di A ?

La matrice A ammette l'autovalore 0 con molteplicità geometrica 1, quindi la dimensione del suo nucleo è 1 e quindi la dimensione della sua immagine è $3 - 1 = 2$, cioè la sua caratteristica è 2.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
17 giugno 2014 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Determinare, al variare del parametro k, la dimensione del sottospazio generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \\ -2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} k \\ 4 \\ 3k \\ k \end{pmatrix}.$$

La dimensione del sottospazio generato da questi tre vettori è uguale alla caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & -2 \\ 1 & k & 3 & 1 \\ k & 4 & 3k & k \end{pmatrix}.$$

Usando la prima colonna per semplificare la terza e la quarta, la matrice A ha la stessa caratteristica di

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k-3 & -3 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ k & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, usando l'ultima colonna per semplificare le altre, A_1 ha la stessa caratteristica di

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ k & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e di

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & k & 0 \\ k & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A_3 è $-3(4-k^2) = -3(2-k)(2+k)$; quindi per $k \neq \pm 2$ le matrici A_3, A_2, A_1 e A avranno caratteristica 3 e quindi i tre vettori generano un sottospazio di dimension 3 (e quindi sono linearmente indipendenti). Invece per $k = \pm 2$ queste matrici avranno caratteristica al massimo 2. La caratteristica è 2 perché il determinante costituito dalle due prime righe e dalla prima e ultima colonna è diverso da 0. Quindi i tre vettori generano un sottospazio di dimensione 2.

b) Determinare per quali valori del parametro k vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

Vista la domanda precedente, i vettori sono linearmente indipendenti se e solo se $k \neq 2$.

Esercizio 2. Si considerino i piani $\pi_1 : x - 4y - 1 = 0$ e $\pi_2 : 3x - 2z + 3 = 0$.

a) Si scrivano le equazioni della retta r passante per $A(1; 0; -2)$ e parallela ai piani π_1 e π_2.

Il vettore direzionale della retta è $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2$, dove $\underline{n}_1 = (1; -4; 0)$ e $\underline{n}_2 = (3; 0; -2)$ sono i vettori normali ai due piani ai quali deve essere parallela. Poiché $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2 = (8; 2; 12)$, le equazioni parametriche scalari della retta r sono

$$\begin{cases} x = 1 + 8t \\ y = 2t \\ z = -2 + 12t \end{cases}$$

b) Si determini (se esiste) l'intersezione tra r e il piano π_3 di equazione $3x - 2y - z - 8 = 0$.

Basta sostituire le equazioni di r in quella di π_3. Si ottiene infatti $t = \frac{3}{8}$, ossia il punto $(4; \frac{3}{4}; \frac{5}{2})$.

c) Si calcoli l'angolo α formato dai piani π_1 e π_2.

Tale angolo coincide con quello formato dai vettori $\underline{n}_1$ e $\underline{n}_2$. Pertanto si ha che $\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 = |\underline{n}_1||\underline{n}_2| \cos\alpha$, ossia $\alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{221}}$.

Esercizio 3. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -17 & 77 \\ 2 & 12 & -56 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Determinare autovettori e autovalori della matrice A.

Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda.$$

Siccome l'elemento di posto $(3,1)$ di A è 0, conviene sviluppare lungo la prima colonna o la terza riga. In questo caso può essere utile aggiungere due volte la seconda riga alla prima prima di sviluppare lungo la prima colonna.

Una radice evidente del polinomio è 0, le altre due si trovano facilmente risolvendo l'equazione di grado 2 e sono 1 e 2.

Per trovare gli autovalori per l'autovalore 0 risolviamo il sistema

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dall'ultima riga, è immediato che $y = 5z$. Nella seconda riga viene $2x = -60z+56z = -4z$, cioè $x = -2z$. Quindi gli autovettori per l'autovalore 0 sono della forma

$$z\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $z \neq 0$.

Si verifica che $A\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{0}$

Si procede per gli autovalori 1 e 2 risolvendo i sistemi

$$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e si trova rispettivamente

$$z\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad z\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

come insieme di autovalori (sempre con $z \neq 0$).

Si verifica che $A\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ **e che** $A\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$**.**

b) Determinare, se esistono, una matrice invertibile S e una matrice diagonale Λ tali che

$$A = S\Lambda S^{-1}.$$

Esistono tali S e Λ perché gli autovalori di A sono tutti reali e semplici (quindi regolari). Inoltre abbiamo già calcolato una base di ciascuno degli autospazi per cui possiamo prendere

$$S = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -7 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Qual è il caratteristica di A ?

La matrice A ammette l'autovalore 0 con molteplicità geometrica 1, quindi la dimensione del suo nucleo è 1 e quindi la dimensione della sua immagine è $3 - 1 = 2$, cioè la sua caratteristica è 2.