Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
28 aprile 2014 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$, dipendente da un parametro k,

$$V_k = \left\{ \begin{pmatrix} 2x+y+3z \\ x-y+3z+(k+1) \\ 4x-2y+10z \\ -2x-3y-z \\ x-3y+5z \end{pmatrix} \middle| x,y,z \in \mathbb{R} \right\} .$$

a) Si dimostri che V_k è un sottospazio vettoriale se e solo se $k=-1$.

Verifichiamo che il vettore nullo appartiene a V_k se e solo se $k=-1$. Infatti perché ci sia il vettore nullo in V_k bisogna che esistano x, y e z tali che

$$\begin{cases} 2x+y+3z &= 0 \\ x-y+3z+(k+1) &= 0 \\ 4x-2y+10z &= 0 \\ -2x-3y-z &= 0 \\ x-3y+5z &= 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 7y-7z &= 0 \\ 2y-2z+(k+1) &= 0 \\ 10y-10z &= 0 \\ -9y+9z &= 0 \\ x-3y+5z &= 0 \end{cases}$$

e quindi $y=z$, $x=-2z$ e $k=-1$.

Abbiamo

$$V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 2x+y+3z \\ x-y+3z \\ 4x-2y+10z \\ -2x-3y-z \\ x-3y+5z \end{pmatrix} \middle| x,y,z \in \mathbb{R} \right\} .$$

Si vede che V_{-1} è l'immagine dell'applicazione lineare f_A di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 10 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

o, in modo analogo, che è il sottospazio generato da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Si determini una base di V_{-1}.

Abbiamo visto che gli x, y e z che danno il vettore nullo dipendono da un parametro. In altre parole il nucleo di f_A è di dimensione 1; siccome il dominio di f_A è $\mathbb{R}^3$, la dimensione di V_{-1} è $3 - 1 = 2$. Purtroppo non esplicita una base di V_{-1} ma segnala che i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono troppi per formare una base. D'altra parte le due prime colonne di A (cioè $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$) non sono proporzionali e quindi sono linearmente indipendenti; siccome V_{-1} è di dimensione 2, formano una base di V_{-1}.

Procedendo diversamente, non è difficile osservare che la matrice A, che è la matrice dei vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, ha caratteristica 2 e che le sue due prime colonne sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di V_{-1}.

Esercizio 2. Si consideri il piano π passante per i tre punti

$$A(7;1;-2), \quad B(2;1;0), \quad C(-6;4;5)$$

e la retta

$$r : \begin{cases} 6x - y - 3z - 1 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

a) Dopo aver verificato che i tre punti A, B e C non sono allineati, calcolare l'equazione del piano π.

Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} = (-5;0;2) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = (-13;3;7) \ ;$$

questi due vettori sono ovviamente non proporzionali per cui i punti non sono allineati. Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-6;9;-15)$$

per cui un vettore normale a π è $\underline{n} = (2,-3,5)$ e un'equazione di π è allora

$$\pi : 2x - 3y + 5z - 1 = 0 \ .$$

b) Dimostrare che la retta r e il piano π sono incidenti e calcolare la loro intersezione.

Basta mettere le tre equazioni di piano a sistema e risolverlo. Si tratta di un sistema di tre equazioni in tre incognite, determinato (questo si evince anche dalla domanda successiva), senza nessuna difficoltà. La sua unica soluzione è $(1; 2; 1)$, quindi l'intersezione tra π e r è ridotta al punto $D(1; 2; 1)$.

c) Verificare che r e π sono ortogonali.

Basta verificare che un vettore normale al piano π è direzionale per la retta r. Siccome la retta r è data dall'intersezione due piani π_1 e π_2, basta verificare che se $\underline{n}_1$ e $\underline{n}_2$ sono vettori normali a π_1 e π_2, allora $\underline{n} \cdot \underline{n}_1 = \underline{n} \cdot \underline{n}_2 = 0$. Possiamo prendere $\underline{n}_1 = (6; -1; -3)$ e $\underline{n}_2 = (1; -1; -1)$ e la verifica è immediata.

d) Trovare l'equazione di un piano π' parallelo a π e a distanza $\sqrt{38}$ da esso.

Abbiamo visto che $\underline{n}$ è normale al piano. Inoltre $\|\underline{n}\| = \sqrt{38}$ per cui il punto E tale che $\overrightarrow{DE} = \underline{n}$ è alla giusta distanza di π. Abbiamo

$$E(3; -1; 6).$$

Il vettore $\underline{n}$ è normale a π' per cui un'equazione del piano π' è

$$\pi' : 2x - 3y + 5z - 39 = 0$$

Esercizio 3. Si consideri la conica

$$3x^2 - 4xy - \frac{2\sqrt{5}}{5}x - \frac{4\sqrt{5}}{5}y - 3 = 0 \ .$$

a) Si determini (se esiste) il centro della conica.

L'esistenza del centro e le sue coordinate si possono facilmente dedurre dalle risposte alle domande successive. In alternativa, possiamo considerare il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{c} = 0,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

Si trova che le coordinate del centro sono $x_C = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $y_C = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) Si trovi la forma canonica della conica e la si riconosca.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $-4xy$, ossia diagonalizzare la matrice B. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -1$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} , \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $4(x')^2 - (y')^2 - 2y' - 3 = 0$. (Si ricorda che basta trasformare il binomio $-\frac{2\sqrt{5}}{5}x - \frac{2\sqrt{5}}{5}y$, poiché sappiamo che i termini di secondo grado diventano $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$, mentre il termine noto rimane ovviamente invariato). L'equazione ottenuta può essere riscritta come $4(x')^2 - (y' + 1)^2 - 2 = 0$. Pertanto la traslazione

$$\begin{cases} X = x' \\ Y = y' + 1 \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$\frac{X^2}{\frac{1}{2}} - \frac{Y^2}{2} = 1 .$$

Si tratta quindi di un'iperbole.

c) Si determini la trasformazione di coordinate che porta la conica nella forma canonica.

Basta comporre la rotazione e la traslazione già trovate. Si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y) - \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ponendo $X = 0$ e $Y = 0$ si può verificare che il centro C ha coordinate $x_C = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $y_C = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, come già visto.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
28 aprile 2014 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$, dipendente da un parametro k,

$$V_k = \left\{ \left(\begin{array}{c} 2x+y+3z \\ x-2y+4z+(k+1) \\ 3x-y+7z \\ x-y+3z \\ x-3y+5z \end{array} \right) \middle| \, x,y,z \in \mathbb{R} \right\} .$$

a) Si dimostri che V_k è un sottospazio vettoriale se e solo se $k=-1$.

Verifichiamo che il vettore nullo appartiene a V_k se e solo se $k=-1$. Infatti perché ci sia il vettore nullo in V_k bisogna che esistano x, y e z tali che

$$\begin{cases} 2x+y+3z & =0 \\ x-2y+4z+(k+1) & =0 \\ 3x-y+7z & =0 \\ x-y+3z & =0 \\ x-3y+5z & =0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 7y-7z & =0 \\ y-z+(k+1) & =0 \\ 8y-8z & =0 \\ 2y-2z & =0 \\ x-3y+5z & =0 \end{cases}$$

e quindi $y=z$, $x=-2z$ e $k=-1$.

Abbiamo

$$V_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c} 2x+y+3z \\ x-2y+4z \\ 3x-y+7z \\ x-y+3z \\ x-3y+5z \end{array} \right) \middle| \, x,y,z \in \mathbb{R} \right\} .$$

Si vede che V_{-1} è l'immagine dell'applicazione lineare f_A di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

o, in modo analogo, che è il sottospazio generato da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Si determini una base di V_{-1}.

Abbiamo visto che gli x, y e z che danno il vettore nullo dipendono da un parametro. In altre parole il nucleo di f_A è di dimensione 1; siccome il dominio di f_A è $\mathbb{R}^3$, la dimensione di V_{-1} è $3 - 1 = 2$. Purtroppo non esplicita una base di V_{-1} ma segnala che i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono troppi per formare una base. D'altra parte le due prime colonne di A (cioè $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$) non sono proporzionali e quindi sono linearmente indipendenti; siccome V_{-1} è di dimensione 2, formano una base di V_{-1}.

Procedendo diversamente, non è difficile osservare che la matrice A, che è la matrice dei vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, ha caratteristica 2 e che le sue due prime colonne sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di V_{-1}.

Esercizio 2. Si consideri il piano π passante per i tre punti

$$A(5;1;0), \quad B(0;-9;8), \quad C(-2;14;-5)$$

e la retta

$$r : \begin{cases} 4x - y - z - 1 = 0 \\ -x - 11y + 7z + 16 = 0 \end{cases}$$

a) Dopo aver verificato che i tre punti A, B e C non sono allineati, calcolare l'equazione del piano π.

Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} = (-5;-10;8) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = (-7;13;-5) \ ;$$

questi due vettori sono ovviamente non proporzionali per cui i punti non sono allineati. Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-54;-81;-135)$$

per cui un vettore normale a π è $\underline{n} = (2,3,5)$ e un'equazione di π è allora

$$\pi : 2x + 3y + 5z - 13 = 0 \ .$$

b) Dimostrare che la retta r e il piano π sono incidenti e calcolare la loro intersezione.

Basta mettere le tre equazioni di piano a sistema e risolverlo. Si tratta di un sistema di tre equazioni in tre incognite, determinato (questo si evince anche dalla domanda successiva), senza nessuna difficoltà. La sua unica soluzione è $(1; 2; 1)$, quindi l'intersezione tra π e r è ridotta al punto $D(1; 2; 1)$.

c) Verificare che r e π sono ortogonali.

Basta verificare che un vettore normale al piano π è direzionale per la retta r. Siccome la retta r è data dall'intersezione due piani π_1 e π_2, basta verificare che se $\underline{n}_1$ e $\underline{n}_2$ sono vettori normali a π_1 e π_2, allora $\underline{n} \cdot \underline{n}_1 = \underline{n} \cdot \underline{n}_2 = 0$. Possiamo prendere $\underline{n}_1 = (4; -1; -1)$ e $\underline{n}_2 = (-1; -11; 7)$ e la verifica è immediata.

d) Trovare l'equazione di un piano π' parallelo a π e a distanza $\sqrt{38}$ da esso.

Abbiamo visto che $\underline{n}$ è normale al piano. Inoltre $\|\underline{n}\| = \sqrt{38}$ per cui il punto E tale che $\overrightarrow{DE} = \underline{n}$ è alla giusta distanza di π. Abbiamo

$$E(3; 5; 6).$$

Il vettore $\underline{n}$ è normale a π' per cui un'equazione del piano π' è

$$\pi' : 2x + 3y + 5z - 51 = 0$$

Esercizio 3. Si consideri la conica

$$3x^2 - 4xy - \frac{2\sqrt{5}}{5}x - \frac{4\sqrt{5}}{5}y - 5 = 0 \ .$$

a) Si determini (se esiste) il centro della conica.

L'esistenza del centro e le sue coordinate si possono facilmente dedurre dalle risposte alle domande successive. In alternativa, possiamo considerare il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{c} = 0,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

Si trova che le coordinate del centro sono $x_C = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $y_C = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) Si trovi la forma canonica della conica e la si riconosca.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $-4xy$, ossia diagonalizzare la matrice B. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -1$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \ , \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \ .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $4(x')^2 - (y')^2 - 2y' - 5 = 0$. (Si ricorda che basta trasformare il binomio $-\frac{2\sqrt{5}}{5}x - \frac{2\sqrt{5}}{5}y$, poiché sappiamo che i termini di secondo grado diventano $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$, mentre il termine noto rimane ovviamente invariato). L'equazione ottenuta può essere riscritta come $4(x')^2 - (y' + 1)^2 - 4 = 0$. Pertanto la traslazione

$$\begin{cases} X = x' \\ Y = y' + 1 \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$X^2 - \frac{Y^2}{4} = 1 \ .$$

Si tratta quindi di un'iperbole.

c) Si determini la trasformazione di coordinate che porta la conica nella forma canonica.

Basta comporre la rotazione e la traslazione già trovate. Si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y) - \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ponendo $X = 0$ e $Y = 0$ si può verificare che il centro C ha coordinate $x_C = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $y_C = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, come già visto.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
28 aprile 2014 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$, dipendente da un parametro k,

$$V_k = \left\{ \left(\begin{array}{c} 2x+y+3z \\ x-3y+5z+(k+1) \\ 2x+4z \\ -x+y-3z \\ x-3y+5z \end{array} \right) \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} .$$

a) Si dimostri che V_k è un sottospazio vettoriale se e solo se $k = -1$.

Verifichiamo che il vettore nullo appartiene a V_k se e solo se $k = -1$. Infatti perché ci sia il vettore nullo in V_k bisogna che esistano x, y e z tali che

$$\begin{cases} 2x+y+3z & = 0 \\ x-3y+5z+(k+1) & = 0 \\ 2x+4z & = 0 \\ -x+y-3z & = 0 \\ x-3y+5z & = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 7y-7z & = 0 \\ +(k+1) & = 0 \\ 6y-6z & = 0 \\ -2y+2z & = 0 \\ x-3y+5z & = 0 \end{cases}$$

e quindi $y = z$, $x = -2z$ e $k = -1$.

Abbiamo

$$V_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c} 2x+y+3z \\ x-3y+5z \\ 2x+4z \\ -x+y-3z \\ x-3y+5z \end{array} \right) \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} .$$

Si vede che V_{-1} è l'immagine dell'applicazione lineare f_A di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

o, in modo analogo, che è il sottospazio generato da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Si determini una base di V_{-1}.

Abbiamo visto che gli x, y e z che danno il vettore nullo dipendono da un parametro. In altre parole il nucleo di f_A è di dimensione 1; siccome il dominio di f_A è $\mathbb{R}^3$, la dimensione di V_{-1} è $3 - 1 = 2$. Purtroppo non esplicita una base di V_{-1} ma segnala che i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono troppi per formare una base. D'altra parte le due prime colonne di A (cioè $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$) non sono proporzionali e quindi sono linearmente indipendenti; siccome V_{-1} è di dimensione 2, formano una base di V_{-1}.

Procedendo diversamente, non è difficile osservare che la matrice A, che è la matrice dei vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, ha caratteristica 2 e che le sue due prime colonne sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di V_{-1}.

Esercizio 2. Si consideri il piano π passante per i tre punti

$$A(17; -1; -6), \quad B(8; -9; -4), \quad C(-22; 16; 13)$$

e la retta

$$r : \begin{cases} 16x - 3y - 7z - 3 = 0 \\ 7x - 11y - 5z + 20 = 0 \end{cases}$$

a) Dopo aver verificato che i tre punti A, B e C non sono allineati, calcolare l'equazione del piano π.

Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} = (-9; -8; 2) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = (-39; 17; 19) \ ;$$

questi due vettori sono ovviamente non proporzionali per cui i punti non sono allineati. Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-186; 93; -465)$$

per cui un vettore normale a π è $\underline{n} = (2, -1, 5)$ e un'equazione di π è allora

$$\pi : 2x - y + 5z - 5 = 0 \ .$$

b) Dimostrare che la retta r e il piano π sono incidenti e calcolare la loro intersezione.

Basta mettere le tre equazioni di piano a sistema e risolverlo. Si tratta di un sistema di tre equazioni in tre incognite, determinato (questo si evince anche dalla domanda successiva), senza nessuna difficoltà. La sua unica soluzione è $(1; 2; 1)$, quindi l'intersezione tra π e r è ridotta al punto $D(1; 2; 1)$.

c) Verificare che r e π sono ortogonali.

Basta verificare che un vettore normale al piano π è direzionale per la retta r. Siccome la retta r è data dall'intersezione due piani π_1 e π_2, basta verificare che se $\underline{n}_1$ e $\underline{n}_2$ sono vettori normali a π_1 e π_2, allora $\underline{n} \cdot \underline{n}_1 = \underline{n} \cdot \underline{n}_2 = 0$. Possiamo prendere $\underline{n}_1 = (16; -3; -7)$ e $\underline{n}_2 = (7; -11; -5)$ e la verifica è immediata.

d) Trovare l'equazione di un piano π' parallelo a π e a distanza $\sqrt{30}$ da esso.

Abbiamo visto che $\underline{n}$ è normale al piano. Inoltre $\|\underline{n}\| = \sqrt{30}$ per cui il punto E tale che $\overrightarrow{DE} = \underline{n}$ è alla giusta distanza di π. Abbiamo

$$E(3; 1; 6).$$

Il vettore $\underline{n}$ è normale a π' per cui un'equazione del piano π' è

$$\pi' : 2x - y + 5z - 35 = 0$$

Esercizio 3. Si consideri la conica

$$3x^2 - 4xy - \frac{2\sqrt{5}}{5}x - \frac{4\sqrt{5}}{5}y - 2 = 0 \ .$$

a) Si determini (se esiste) il centro della conica.

L'esistenza del centro e le sue coordinate si possono facilmente dedurre dalle risposte alle domande successive. In alternativa, possiamo considerare il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{c} = 0,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

Si trova che le coordinate del centro sono $x_C = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $y_C = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) Si trovi la forma canonica della conica e la si riconosca.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $-4xy$, ossia diagonalizzare la matrice B. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -1$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} , \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $4(x')^2 - (y')^2 - 2y' - 2 = 0$. (Si ricorda che basta trasformare il binomio $-\frac{2\sqrt{5}}{5}x - \frac{2\sqrt{5}}{5}y$, poiché sappiamo che i termini di secondo grado diventano $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$, mentre il termine noto rimane ovviamente invariato). L'equazione ottenuta può essere riscritta come $4(x')^2 - (y' + 1)^2 - 1 = 0$. Pertanto la traslazione

$$\begin{cases} X = x' \\ Y = y' + 1 \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$\frac{X^2}{\frac{1}{4}} - Y^2 = 1 .$$

Si tratta quindi di un'iperbole.

c) Si determini la trasformazione di coordinate che porta la conica nella forma canonica.

Basta comporre la rotazione e la traslazione già trovate. Si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y) - \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ponendo $X = 0$ e $Y = 0$ si può verificare che il centro C ha coordinate $x_C = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $y_C = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, come già visto.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
28 aprile 2014 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$, dipendente da un parametro k,

$$V_k = \left\{ \left(\begin{array}{c} 2x+y+3z \\ x-4y+6z+(k+1) \\ x+y+z \\ 2x+3y+z \\ x-3y+5z \end{array} \right) \middle| \, x,y,z \in \mathbb{R} \right\} .$$

a) Si dimostri che V_k è un sottospazio vettoriale se e solo se $k=-1$.

Verifichiamo che il vettore nullo appartiene a V_k se e solo se $k=-1$. Infatti perché ci sia il vettore nullo in V_k bisogna che esistano x, y e z tali che

$$\begin{cases} 2x+y+3z & =0 \\ x-4y+6z+(k+1) & =0 \\ x+y+z & =0 \\ 2x+3y+z & =0 \\ x-3y+5z & =0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 7y-7z & =0 \\ -y+z+(k+1) & =0 \\ 4y-4z & =0 \\ 9y-9z & =0 \\ x-3y+5z & =0 \end{cases}$$

e quindi $y=z$, $x=-2z$ e $k=-1$.

Abbiamo

$$V_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c} 2x+y+3z \\ x-4y+6z \\ x+y+z \\ 2x+3y+z \\ x-3y+5z \end{array} \right) \middle| \, x,y,z \in \mathbb{R} \right\} .$$

Si vede che V_{-1} è l'immagine dell'applicazione lineare f_A di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

o, in modo analogo, che è il sottospazio generato da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Si determini una base di V_{-1}.

Abbiamo visto che gli x, y e z che danno il vettore nullo dipendono da un parametro. In altre parole il nucleo di f_A è di dimensione 1; siccome il dominio di f_A è $\mathbb{R}^3$, la dimensione di V_{-1} è $3-1=2$. Purtroppo non esplicita una base di V_{-1} ma segnala che i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono troppi per formare una base. D'altra parte le due prime colonne di A (cioè $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$) non sono proporzionali e quindi sono linearmente indipendenti; siccome V_{-1} è di dimensione 2, formano una base di V_{-1}.

Procedendo diversamente, non è difficile osservare che la matrice A, che è la matrice dei vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, ha caratteristica 2 e che le sue due prime colonne sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di V_{-1}.

Esercizio 2. Si consideri il piano π passante per i tre punti

$$A(6;1;-1), \quad B(6;-9;-1), \quad C(-9;14;5)$$

e la retta

$$r : \begin{cases} 5x - y - 2z - 1 = 0 \\ 5x - 11y - 2z + 19 = 0 \end{cases}$$

a) Dopo aver verificato che i tre punti A, B e C non sono allineati, calcolare l'equazione del piano π.

Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} = (0;-10;0) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = (-15;13;6) \ ;$$

questi due vettori sono ovviamente non proporzionali per cui i punti non sono allineati. Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-60;0;-150)$$

per cui un vettore normale a π è $\underline{n} = (2,0,5)$ e un'equazione di π è allora

$$\pi : 2x + 5z - 7 = 0 \ .$$

b) Dimostrare che la retta r e il piano π sono incidenti e calcolare la loro intersezione.

Basta mettere le tre equazioni di piano a sistema e risolverlo. Si tratta di un sistema di tre equazioni in tre incognite, determinato (questo si evince anche dalla domanda successiva), senza nessuna difficoltà. La sua unica soluzione è $(1; 2; 1)$, quindi l'intersezione tra π e r è ridotta al punto $D(1; 2; 1)$.

c) Verificare che r e π sono ortogonali.

Basta verificare che un vettore normale al piano π è direzionale per la retta r. Siccome la retta r è data dall'intersezione due piani π_1 e π_2, basta verificare che se $\underline{n}_1$ e $\underline{n}_2$ sono vettori normali a π_1 e π_2, allora $\underline{n} \cdot \underline{n}_1 = \underline{n} \cdot \underline{n}_2 = 0$. Possiamo prendere $\underline{n}_1 = (5; -1; -2)$ e $\underline{n}_2 = (5; -11; -2)$ e la verifica è immediata.

d) Trovare l'equazione di un piano π' parallelo a π e a distanza $\sqrt{29}$ da esso.

Abbiamo visto che $\underline{n}$ è normale al piano. Inoltre $\|\underline{n}\| = \sqrt{29}$ per cui il punto E tale che $\overrightarrow{DE} = \underline{n}$ è alla giusta distanza di π. Abbiamo

$$E(3; 2; 6).$$

Il vettore $\underline{n}$ è normale a π' per cui un'equazione del piano π' è

$$\pi' : 2x + 5z - 36 = 0$$

Esercizio 3. Si consideri la conica

$$3x^2 - 4xy - \frac{2\sqrt{5}}{5}x - \frac{4\sqrt{5}}{5}y - 4 = 0 \ .$$

a) Si determini (se esiste) il centro della conica.

L'esistenza del centro e le sue coordinate si possono facilmente dedurre dalle risposte alle domande successive. In alternativa, possiamo considerare il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{c} = 0,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

Si trova che le coordinate del centro sono $x_C = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $y_C = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) Si trovi la forma canonica della conica e la si riconosca.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $-4xy$, ossia diagonalizzare la matrice B. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -1$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} , \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $4(x')^2 - (y')^2 - 2y' - 4 = 0$. (Si ricorda che basta trasformare il binomio $-\frac{2\sqrt{5}}{5}x - \frac{2\sqrt{5}}{5}y$, poiché sappiamo che i termini di secondo grado diventano $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$, mentre il termine noto rimane ovviamente invariato). L'equazione ottenuta può essere riscritta come $4(x')^2 - (y' + 1)^2 - 3 = 0$. Pertanto la traslazione

$$\begin{cases} X = x' \\ Y = y' + 1 \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$\frac{X^2}{\frac{3}{4}} - \frac{Y^2}{3} = 1 .$$

Si tratta quindi di un'iperbole.

c) Si determini la trasformazione di coordinate che porta la conica nella forma canonica.

Basta comporre la rotazione e la traslazione già trovate. Si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y) - \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ponendo $X = 0$ e $Y = 0$ si può verificare che il centro C ha coordinate $x_C = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $y_C = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, come già visto.