Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
29 gennaio 2014 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Definiamo, per un parametro reale k, il sottoinsieme W_k di $\mathbb{R}^5$ nel modo seguente:

$$W_k = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / -5x_1 - x_2 + (k+2)x_3x_4 + 3x_5 = 0\} \ .$$

a) Verificare che W_{-2} è un sottospazio vettoriale.

Abbiamo
$$W_{-2} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / -5x_1 - x_2 + 3x_5 = 0\} \ .$$
cioè l'insieme dei vettori ortogonali al vettore $(-5, -1, 0, 0, 3)_T$ e, secondo la lezione, questo è un sottospazio vettoriale.

b) Verificare che se $k \neq -2$ allora W_k non è un sottospazio vettoriale.

Siano

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= (0, 0, 1, 0, 0) \\ \underline{v}_2 &= (0, 0, 0, 1, 0) \ . \end{aligned}$$

Allora $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ stanno entrambi in W_k (la parte "problematica" in x_3x_4 scompare perché uno dei due è nullo). Sia

$$\underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

e siano i reali $x_1, \ldots, x_5$ tali che $\underline{v}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Allora

$$-5x_1 - x_2 + (k+2)x_3x_4 + 3x_5 = k + 2$$

ma questo è diverso da 0 perché $k \neq -2$ e quindi $\underline{v}_3 \notin W_k$. Quindi W_k non è un sottospazio vettoriale.

c) Trovare una base di W_{-2}.

Abbiamo

$$\begin{aligned} W_{-2} &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / -5x_1 - x_2 + 3x_5 = 0\} \\ &= \{(x_1, -5x_1 + 3x_5, x_3, x_4, x_5)_T / x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1, -5, 0, 0, 0)_T + x_3(0, 0, 1, 0, 0)_T \\ &\qquad + x_4(0, 0, 0, 1, 0)_T + x_5(0, 3, 0, 0, 1)_T / x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, -5, 0, 0, 0)_T, (0, 0, 1, 0, 0)_T, (0, 0, 0, 1, 0)_T, (0, 3, 0, 0, 1)_T \rangle \ . \end{aligned}$$

Abbiamo quindi una famiglia generatrice di W_{-2} costituita da 4 vettori. La matrice costituita dai coefficienti di questi vettori, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 4 come si può vedere calcolando il minore costituito da tutte le colonne e tutte le righe tranne la seconda. Segue che i 4 vettori sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di W_{-2}.

Esercizio 2. Si consideri la conica γ di equazione

$$3x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + y^2 + 4(1+\sqrt{3})x - 4(\sqrt{3}-1)y + 12 = 0 \ .$$

a) Si dimostri che γ è una parabola e se ne determini la forma canonica.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} .$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \ , \qquad \underline{u}_2 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \ .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}\,y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $(x')^2 + 2x' - 2y' + 3 = 0$. La traslazione

$$\begin{cases} X = x' + 1 \\ Y = y' - 1 \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica $X^2 - 2Y = 0$, ossia $Y = \frac{1}{2}X^2$.

b) Si scriva l'equazione dell'asse della parabola nelle coordinate (x, y).

Nelle coordinate (X, Y) l'equazione dell'asse è ovviamente $X = 0$. Quindi nelle coordinate (x', y') essa diventa $x' = -1$. Per ottenere l'equazione nelle coordinate (x, y) possiamo sostituire $x' = -1$ nelle equazioni della rotazione, ottenendo

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} + y') \\ y = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\, y') \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche dell'asse, dove y' gioca il ruolo del parametro. Eliminandolo, si ottiene $\sqrt{3}\, x + y + 2 = 0$. Alternativamente, si può invertire la rotazione semplicemente passando alla matrice trasposta:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\, x + y) \\ y' = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}\, y) \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione $x' = -1$ si arriva nuovamente a $\sqrt{3}\, x + y + 2 = 0$.

Esercizio 3. Risolvere al variare del parametro reale k il sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 1 \\ -x + (k-2)y + z = -1 \\ 4x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k-2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k-2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k-2 & 1 \\ 0 & 1-k & 0 \end{vmatrix} \mathrm{R}_3 - \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2 \\ &= (k-1) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(k-1) \end{aligned}$$

Quindi per $k \neq 1$ il sistema è determinato e ammette un'unica soluzione. Lo risolviamo in questo caso. Il sistema è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 1 \\ -x + (k-2)y + z = -1 \\ (1-k)y = 0 \qquad \mathrm{R}_3 - \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2 \end{cases}$$

Quindi $y = 0$ (perché $k \neq 1$), quindi $x = -1$ (prima più tre volte la seconda) e $z = -2$ (nella seconda).
Ora, se $k = 1$, il sistema di cui sopra rimane equivalente a quello iniziale. La terza equazione di questo sistema diventa $0 = 0$, quindi risulta soddisfatta per ogni x, y e z. Il sistema di partenza è quindi equivalente al sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -1 \end{cases}$$

Troviamo $z = 3x + 1$ (la prima più due volte la seconda) e quindi $y = 2x + 2$. Le soluzioni del sistema sono quindi della forma $\begin{pmatrix} x \\ 2x+2 \\ 3x+1 \end{pmatrix}$. A posteriori le condizioni del teorema di Rouché–Capelli sono quindi verificate e la caratteristica del sistema è 2.

Esercizio 4. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(z^3 - 2\sqrt{3} + 2i)((2 + 3i)z + (2 - 3i)\overline{z} - 3) = 0$$

e tracciare l'insieme delle soluzioni nel piano complesso.

L'equazione è della forma "un prodotto è nullo" per cui è soddisfatta se e solo se uno dei membri del prodotto è nullo. Le soluzioni dell'equazione sono quindi i z che soddisfano una delle due equazioni

$$z^3 - 2\sqrt{3} + 2i = 0$$
$$(2 + 3i)z + (2 - 3i)\overline{z} - 3 = 0$$

La prima equazione ha come soluzioni l'insieme delle radici cubiche di $w = 2\sqrt{3} - 2i$. Siccome $|w| = 4$ e $\arg w = -\frac{\pi}{6}$, le soluzioni della prima equazione sono $z_k = 2^{\frac{2}{3}} e^{i\left(-\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ con $k = 0$, 1 o 2 ovvero tre punti a distanza $2^{\frac{2}{3}}$ dell'origine agli angoli $-\frac{\pi}{18}$, $\frac{11\pi}{18}$ e $\frac{23\pi}{18}$.
La seconda equazione può essere riscritta in coordinate cartesiane in cui diventa

$$4x - 6y - 3 = 0$$

le soluzioni sono quindi su una retta, e si tratta dei complessi della forma $z = \frac{6y+3}{4} + iy$, con y qualsiasi in $\mathbb{R}$.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
29 gennaio 2014 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Definiamo, per un parametro reale k, il sottoinsieme W_k di $\mathbb{R}^5$ nel modo seguente:

$$W_k = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / x_1 - x_2 + (k-1)x_3x_4 + 3x_5 = 0\} \ .$$

a) Verificare che W_1 è un sottospazio vettoriale.

Abbiamo

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / x_1 - x_2 + 3x_5 = 0\} \ .$$

cioè l'insieme dei vettori ortogonali al vettore $(1, -1, 0, 0, 3)_T$ e, secondo la lezione, questo è un sottospazio vettoriale.

b) Verificare che se $k \neq 1$ allora W_k non è un sottospazio vettoriale.

Siano

$$\underline{v}_1 = (0, 0, 1, 0, 0)$$
$$\underline{v}_2 = (0, 0, 0, 1, 0) \ .$$

Allora $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ stanno entrambi in W_k (la parte "problematica" in x_3x_4 scompare perché uno dei due è nullo). Sia

$$\underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

e siano i reali $x_1, \ldots, x_5$ tali che $\underline{v}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Allora

$$+x_1 - x_2 + (k-1)x_3x_4 + 3x_5 = k - 1$$

ma questo è diverso da 0 perché $k \neq 1$ e quindi $\underline{v}_3 \notin W_k$. Quindi W_k non è un sottospazio vettoriale.

c) Trovare una base di W_1.

Abbiamo

$$\begin{aligned}
W_1 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / + x_1 - x_2 + 3x_5 = 0\} \\
&= \{(x_1, +x_1 + 3x_5, x_3, x_4, x_5)_T / x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x_1(1,1,0,0,0)_T + x_3(0,0,1,0,0)_T \\
&\qquad + x_4(0,0,0,1,0)_T + x_5(0,3,0,0,1)_T / x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1,1,0,0,0)_T, (0,0,1,0,0)_T, (0,0,0,1,0)_T, (0,3,0,0,1)_T \rangle \ .
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi una famiglia generatrice di W_1 costituita da 4 vettori. La matrice costituita dai coefficienti di questi vettori, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 4 come si può vedere calcolando il minore costituito da tutte le colonne e tutte le righe tranne la seconda. Segue che i 4 vettori sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di W_1.

Esercizio 2. Si consideri la conica γ di equazione

$$3x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + y^2 + 4(1 + 2\sqrt{3})x - 4(\sqrt{3} - 2)y + 48 = 0 \ .$$

a) Si dimostri che γ è una parabola e se ne determini la forma canonica.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} .$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \ , \qquad \underline{u}_2 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \ .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}\,y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $(x')^2 + 4x' - 2y' + 12 = 0$. La traslazione

$$\begin{cases} X = x' + 2 \\ Y = y' - 4 \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica $X^2 - 2Y = 0$, ossia $Y = \frac{1}{2}X^2$.

b) Si scriva l'equazione dell'asse della parabola nelle coordinate (x, y).

Nelle coordinate (X, Y) l'equazione dell'asse è ovviamente $X = 0$. Quindi nelle coordinate (x', y') essa diventa $x' = -2$. Per ottenere l'equazione nelle coordinate (x, y) possiamo sostituire $x' = -2$ nelle equazioni della rotazione, ottenendo

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}(2\sqrt{3} + y') \\ y = \frac{1}{2}(-2 + \sqrt{3}\, y') \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche dell'asse, dove y' gioca il ruolo del parametro. Eliminandolo, si ottiene $\sqrt{3}\, x + y + 4 = 0$. Alternativamente, si può invertire la rotazione semplicemente passando alla matrice trasposta:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\, x + y) \\ y' = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}\, y) \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione $x' = -2$ si arriva nuovamente a $\sqrt{3}\, x + y + 4 = 0$.

Esercizio 3. Risolvere al variare del parametro reale k il sistema

$$\begin{cases} 5x + \qquad\quad 2y - 3z = \ \ 3 \\ -x + (k-4)y + \ \ z = -1 \\ 4x + \qquad\quad\ \ y - 2z = \ \ 2 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k-4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k-4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k-4 & 1 \\ 0 & 3-k & 0 \end{vmatrix} \mathrm{R}_3 - \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2 \\ &= (k-3) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(k-3) \end{aligned}$$

Quindi per $k \neq 3$ il sistema è determinato e ammette un'unica soluzione. Lo risolviamo in questo caso. Il sistema è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} 5x + \qquad\quad 2y - 3z = \ \ 3 \\ -x + (k-4)y + \ \ z = -1 \\ \qquad\ (3-k)y \qquad\quad = \ \ 0 \qquad \mathrm{R}_3 - \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2 \end{cases}$$

Quindi $y = 0$ (perché $k \neq 3$), quindi $x = 0$ (prima più tre volte la seconda) e $z = -1$ (nella seconda).
Ora, se $k = 3$, il sistema di cui sopra rimane equivalente a quello iniziale. La terza equazione di questo sistema diventa $0 = 0$, quindi risulta soddisfatta per ogni x, y e z. Il sistema di partenza è quindi equivalente al sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 3 \\ -x - y + z = -1 \end{cases}$$

Troviamo $z = 3x - 1$ (la prima più due volte la seconda) e quindi $y = 2x$. Le soluzioni del sistema sono quindi della forma $\begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x - 1 \end{pmatrix}$. A posteriori le condizioni del teorema di Rouché–Capelli sono quindi verificate e la caratteristica del sistema è 2.

Esercizio 4. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(z^3 - 2\sqrt{3} + 2i)((2 + 3i)z + (2 - 3i)\overline{z} - 3) = 0$$

e tracciare l'insieme delle soluzioni nel piano complesso.

L'equazione è della forma "un prodotto è nullo" per cui è soddisfatta se e solo se uno dei membri del prodotto è nullo. Le soluzioni dell'equazione sono quindi i z che soddisfano una delle due equazioni

$$z^3 - 2\sqrt{3} + 2i = 0$$
$$(2 + 3i)z + (2 - 3i)\overline{z} - 3 = 0$$

La prima equazione ha come soluzioni l'insieme delle radici cubiche di $w = 2\sqrt{3} - 2i$. Siccome $|w| = 4$ e $\arg w = -\frac{\pi}{6}$, le soluzioni della prima equazione sono $z_k = 2^{\frac{2}{3}} e^{i\left(-\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ con $k = 0$, 1 o 2 ovvero tre punti a distanza $2^{\frac{2}{3}}$ dell'origine agli angoli $-\frac{\pi}{18}$, $\frac{11\pi}{18}$ e $\frac{23\pi}{18}$.
La seconda equazione può essere riscritta in coordinate cartesiane in cui diventa

$$4x - 6y - 3 = 0$$

le soluzioni sono quindi su una retta, e si tratta dei complessi della forma $z = \frac{6y+3}{4} + iy$, con y qualsiasi in $\mathbb{R}$.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
29 gennaio 2014 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Definiamo, per un parametro reale k, il sottoinsieme W_k di $\mathbb{R}^5$ nel modo seguente:

$$W_k = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / -3x_1 - x_2 + (k+1)x_3x_4 + 3x_5 = 0\} \ .$$

a) Verificare che W_{-1} è un sottospazio vettoriale.

Abbiamo

$$W_{-1} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / -3x_1 - x_2 + 3x_5 = 0\} \ .$$

cioè l'insieme dei vettori ortogonali al vettore $(-3, -1, 0, 0, 3)_T$ e, secondo la lezione, questo è un sottospazio vettoriale.

b) Verificare che se $k \neq -1$ allora W_k non è un sottospazio vettoriale.

Siano

$$\underline{v}_1 = (0, 0, 1, 0, 0)$$
$$\underline{v}_2 = (0, 0, 0, 1, 0) \ .$$

Allora $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ stanno entrambi in W_k (la parte "problematica" in x_3x_4 scompare perché uno dei due è nullo). Sia

$$\underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

e siano i reali x_1, ..., x_5 tali che $\underline{v}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Allora

$$-3x_1 - x_2 + (k+1)x_3x_4 + 3x_5 = k + 1$$

ma questo è diverso da 0 perché $k \neq -1$ e quindi $\underline{v}_3 \notin W_k$. Quindi W_k non è un sottospazio vettoriale.

c) Trovare una base di W_{-1}.

Abbiamo

$$
\begin{aligned}
W_{-1} &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / -3x_1 - x_2 + 3x_5 = 0\} \\
&= \{(x_1, -3x_1 + 3x_5, x_3, x_4, x_5)_T / x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x_1(1, -3, 0, 0, 0)_T + x_3(0, 0, 1, 0, 0)_T \\
&\qquad + x_4(0, 0, 0, 1, 0)_T + x_5(0, 3, 0, 0, 1)_T / x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1, -3, 0, 0, 0)_T, (0, 0, 1, 0, 0)_T, (0, 0, 0, 1, 0)_T, (0, 3, 0, 0, 1)_T \rangle \ .
\end{aligned}
$$

Abbiamo quindi una famiglia generatrice di W_{-1} costituita da 4 vettori. La matrice costituita dai coefficienti di questi vettori, ovvero

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

ha caratteristica 4 come si può vedere calcolando il minore costituito da tutte le colonne e tutte le righe tranne la seconda. Segue che i 4 vettori sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di W_{-1}.

Esercizio 2. Si consideri la conica γ di equazione

$$
3x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + y^2 + 4(1-\sqrt{3})x - 4(\sqrt{3}+1)y + 12 = 0 \ .
$$

a) Si dimostri che γ è una parabola e se ne determini la forma canonica.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$
B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} .
$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$
\underline{u}_1 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad \underline{u}_2 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} .
$$

La rotazione cercata è quindi

$$
\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}\,y') \end{cases}
$$

e la nuova equazione della conica è $(x')^2 - 2x' - 2y' + 3 = 0$. La traslazione

$$
\begin{cases} X = x' - 1 \\ Y = y' - 1 \end{cases}
$$

porta la conica nella forma canonica $X^2 - 2Y = 0$, ossia $Y = \frac{1}{2}X^2$.

b) Si scriva l'equazione dell'asse della parabola nelle coordinate (x, y).

Nelle coordinate (X, Y) l'equazione dell'asse è ovviamente $X = 0$. Quindi nelle coordinate (x', y') essa diventa $x' = 1$. Per ottenere l'equazione nelle coordinate (x, y) possiamo sostituire $x' = 1$ nelle equazioni della rotazione, ottenendo

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - y') \\ y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\, y') \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche dell'asse, dove y' gioca il ruolo del parametro. Eliminandolo, si ottiene $\sqrt{3}\, x + y - 2 = 0$. Alternativamente, si può invertire la rotazione semplicemente passando alla matrice trasposta:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\, x + y) \\ y' = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}\, y) \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione $x' = 1$ si arriva nuovamente a $\sqrt{3}\, x + y - 2 = 0$.

Esercizio 3. Risolvere al variare del parametro reale k il sistema

$$\begin{cases} 5x + \quad\quad 2y - 3z = -3 \\ -x + (k+2)y + \ \ z = -1 \\ 4x + \quad\quad\ \ y - 2z = -4 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k+2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k+2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k+2 & 1 \\ 0 & -3-k & 0 \end{vmatrix} \mathrm{R}_3 - \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2 \\ &= (k+3) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(k+3) \end{aligned}$$

Quindi per $k \neq -3$ il sistema è determinato e ammette un'unica soluzione. Lo risolviamo in questo caso. Il sistema è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} 5x + \quad\quad 2y - 3z = -3 \\ -x + \ \ (k+2)y + \ \ z = -1 \\ \quad\quad (-3-k)y \quad\quad = \ \ 0 \qquad \mathrm{R}_3 - \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2 \end{cases}$$

Quindi $y = 0$ (perché $k \neq -3$), quindi $x = -3$ (prima più tre volte la seconda) e $z = -4$ (nella seconda).
Ora, se $k = -3$, il sistema di cui sopra rimane equivalente a quello iniziale. La terza equazione di questo sistema diventa $0 = 0$, quindi risulta soddisfatta per ogni x, y e z. Il sistema di partenza è quindi equivalente al sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = -3 \\ -x - \ \ y + \ \ z = -1 \end{cases}$$

Troviamo $z = 3x + 5$ (la prima più due volte la seconda) e quindi $y = 2x + 6$. Le soluzioni del sistema sono quindi della forma $\begin{pmatrix} x \\ 2x+6 \\ 3x+5 \end{pmatrix}$. A posteriori le condizioni del teorema di Rouché–Capelli sono quindi verificate e la caratteristica del sistema è 2.

Esercizio 4. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(z^3 - 2\sqrt{3} + 2i)((2 + 3i)z + (2 - 3i)\overline{z} - 3) = 0$$

e tracciare l'insieme delle soluzioni nel piano complesso.

L'equazione è della forma "un prodotto è nullo" per cui è soddisfatta se e solo se uno dei membri del prodotto è nullo. Le soluzioni dell'equazione sono quindi i z che soddisfano una delle due equazioni

$$z^3 - 2\sqrt{3} + 2i = 0$$
$$(2 + 3i)z + (2 - 3i)\overline{z} - 3 = 0$$

La prima equazione ha come soluzioni l'insieme delle radici cubiche di $w = 2\sqrt{3} - 2i$. Siccome $|w| = 4$ e $\arg w = -\frac{\pi}{6}$, le soluzioni della prima equazione sono $z_k = 2^{\frac{2}{3}} e^{i\left(-\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ con $k = 0$, 1 o 2 ovvero tre punti a distanza $2^{\frac{2}{3}}$ dell'origine agli angoli $-\frac{\pi}{18}$, $\frac{11\pi}{18}$ e $\frac{23\pi}{18}$.
La seconda equazione può essere riscritta in coordinate cartesiane in cui diventa

$$4x - 6y - 3 = 0$$

le soluzioni sono quindi su una retta, e si tratta dei complessi della forma $z = \frac{6y+3}{4} + iy$, con y qualsiasi in $\mathbb{R}$.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
29 gennaio 2014 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Definiamo, per un parametro reale k, il sottoinsieme W_k di $\mathbb{R}^5$ nel modo seguente:

$$W_k = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / 3x_1 - x_2 + (k-2)x_3x_4 + 3x_5 = 0\} \ .$$

a) Verificare che W_2 è un sottospazio vettoriale.

Abbiamo
$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / 3x_1 - x_2 + 3x_5 = 0\} \ .$$
cioè l'insieme dei vettori ortogonali al vettore $(3, -1, 0, 0, 3)_T$ e, secondo la lezione, questo è un sottospazio vettoriale.

b) Verificare che se $k \neq 2$ allora W_k non è un sottospazio vettoriale.

Siano

$$\underline{v}_1 = (0, 0, 1, 0, 0)$$
$$\underline{v}_2 = (0, 0, 0, 1, 0) \ .$$

Allora $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ stanno entrambi in W_k (la parte "problematica" in x_3x_4 scompare perché uno dei due è nullo). Sia

$$\underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

e siano i reali $x_1, \ldots, x_5$ tali che $\underline{v}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Allora

$$+3x_1 - x_2 + (k-2)x_3x_4 + 3x_5 = k - 2$$

ma questo è diverso da 0 perché $k \neq 2$ e quindi $\underline{v}_3 \notin W_k$. Quindi W_k non è un sottospazio vettoriale.

c) Trovare una base di W_2.

Abbiamo

$$\begin{aligned} W_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / +3x_1 - x_2 + 3x_5 = 0\} \\ &= \{(x_1, +3x_1 + 3x_5, x_3, x_4, x_5)_T / x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1,3,0,0,0)_T + x_3(0,0,1,0,0)_T \\ &\qquad + x_4(0,0,0,1,0)_T + x_5(0,3,0,0,1)_T / x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,3,0,0,0)_T, (0,0,1,0,0)_T, (0,0,0,1,0)_T, (0,3,0,0,1)_T \rangle \ . \end{aligned}$$

Abbiamo quindi una famiglia generatrice di W_2 costituita da 4 vettori. La matrice costituita dai coefficienti di questi vettori, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 4 come si può vedere calcolando il minore costituito da tutte le colonne e tutte le righe tranne la seconda. Segue che i 4 vettori sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di W_2.

Esercizio 2. Si consideri la conica γ di equazione

$$3x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + y^2 + 4(1 - 2\sqrt{3})x - 4(\sqrt{3} + 2)y + 48 = 0 \ .$$

a) Si dimostri che γ è una parabola e se ne determini la forma canonica.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} .$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \ , \qquad \underline{u}_2 = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \ .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}\,y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $(x')^2 - 4x' - 2y' + 12 = 0$. La traslazione

$$\begin{cases} X = x' - 2 \\ Y = y' - 4 \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica $X^2 - 2Y = 0$, ossia $Y = \frac{1}{2}X^2$.

b) Si scriva l'equazione dell'asse della parabola nelle coordinate (x, y).

Nelle coordinate (X, Y) l'equazione dell'asse è ovviamente $X = 0$. Quindi nelle coordinate (x', y') essa diventa $x' = 2$. Per ottenere l'equazione nelle coordinate (x, y) possiamo sostituire $x' = 2$ nelle equazioni della rotazione, ottenendo

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - y') \\ y = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3}\,y') \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche dell'asse, dove y' gioca il ruolo del parametro. Eliminandolo, si ottiene $\sqrt{3}\,x + y - 4 = 0$. Alternativamente, si può invertire la rotazione semplicemente passando alla matrice trasposta:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x + y) \\ y' = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}\,y) \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione $x' = 2$ si arriva nuovamente a $\sqrt{3}\,x + y - 4 = 0$.

Esercizio 3. Risolvere al variare del parametro reale k il sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 2 \\ -x + (k-3)y + z = -1 \\ 4x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k-3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k-3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k-3 & 1 \\ 0 & 2-k & 0 \end{vmatrix} \mathrm{R}_3 - \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2 \\ &= (k-2)\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(k-2) \end{aligned}$$

Quindi per $k \neq 2$ il sistema è determinato e ammette un'unica soluzione. Lo risolviamo in questo caso. Il sistema è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 2 \\ -x + (k-3)y + z = -1 \\ (2-k)y = 0 \qquad \mathrm{R}_3 - \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2 \end{cases}$$

Quindi $y = 0$ (perché $k \neq 2$), quindi $x = -\frac{1}{2}$ (prima più tre volte la seconda) e $z = -\frac{3}{2}$ (nella seconda).
Ora, se $k = 2$, il sistema di cui sopra rimane equivalente a quello iniziale. La terza equazione di questo sistema diventa $0 = 0$, quindi risulta soddisfatta per ogni x, y e z. Il sistema di partenza è quindi equivalente al sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 2 \\ -x - y + z = -1 \end{cases}$$

Troviamo $z = 3x$ (la prima più due volte la seconda) e quindi $y = 2x + 1$. Le soluzioni del sistema sono quindi della forma $\begin{pmatrix} x \\ 2x+1 \\ 3x \end{pmatrix}$. A posteriori le condizioni del teorema di Rouché–Capelli sono quindi verificate e la caratteristica del sistema è 2.

Esercizio 4. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(z^3 - 2\sqrt{3} + 2i)((2 + 3i)z + (2 - 3i)\overline{z} - 3) = 0$$

e tracciare l'insieme delle soluzioni nel piano complesso.

L'equazione è della forma "un prodotto è nullo" per cui è soddisfatta se e solo se uno dei membri del prodotto è nullo. Le soluzioni dell'equazione sono quindi i z che soddisfano una delle due equazioni

$$z^3 - 2\sqrt{3} + 2i = 0$$
$$(2 + 3i)z + (2 - 3i)\overline{z} - 3 = 0$$

La prima equazione ha come soluzioni l'insieme delle radici cubiche di $w = 2\sqrt{3} - 2i$. Siccome $|w| = 4$ e $\arg w = -\frac{\pi}{6}$, le soluzioni della prima equazione sono $z_k = 2^{\frac{2}{3}} e^{i\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ con $k = 0$, 1 o 2 ovvero tre punti a distanza $2^{\frac{2}{3}}$ dell'origine agli angoli $-\frac{\pi}{18}$, $\frac{11\pi}{18}$ e $\frac{23\pi}{18}$.
La seconda equazione può essere riscritta in coordinate cartesiane in cui diventa

$$4x - 6y - 3 = 0$$

le soluzioni sono quindi su una retta, e si tratta dei complessi della forma $z = \frac{6y+3}{4} + iy$, con y qualsiasi in $\mathbb{R}$.