

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
29 gennaio 2014 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Definiamo, per un parametro reale k , il sottoinsieme W_k di \mathbb{R}^5 nel modo seguente:

$$W_k = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / -5x_1 - x_2 + (k+2)x_3x_4 + 3x_5 = 0\} .$$

- a) Verificare che W_{-2} è un sottospazio vettoriale.

Abbiamo

$$W_{-2} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / -5x_1 - x_2 + 3x_5 = 0\} .$$

cioè l'insieme dei vettori ortogonali al vettore $(-5, -1, 0, 0, 3)_T$ e, secondo la lezione, questo è un sottospazio vettoriale.

- b) Verificare che se $k \neq -2$ allora W_k non è un sottospazio vettoriale.

Siano

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= (0, 0, 1, 0, 0) \\ \underline{v}_2 &= (0, 0, 0, 1, 0) . \end{aligned}$$

Allora \underline{v}_1 e \underline{v}_2 stanno entrambi in W_k (la parte "problematica" in x_3x_4 scompare perché uno dei due è nullo). Sia

$$\underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

e siano i reali x_1, \dots, x_5 tali che $\underline{v}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Allora

$$-5x_1 - x_2 + (k+2)x_3x_4 + 3x_5 = k+2$$

ma questo è diverso da 0 perché $k \neq -2$ e quindi $\underline{v}_3 \notin W_k$. Quindi W_k non è un sottospazio vettoriale.

c) Trovare una base di W_{-2} .

Abbiamo

$$\begin{aligned} W_{-2} &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / -5x_1 - x_2 + 3x_5 = 0\} \\ &= \{(x_1, -5x_1 + 3x_5, x_3, x_4, x_5)_T / x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1, -5, 0, 0, 0)_T + x_3(0, 0, 1, 0, 0)_T \\ &\quad + x_4(0, 0, 0, 1, 0)_T + x_5(0, 3, 0, 0, 1)_T / x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, -5, 0, 0, 0)_T, (0, 0, 1, 0, 0)_T, (0, 0, 0, 1, 0)_T, (0, 3, 0, 0, 1)_T \rangle . \end{aligned}$$

Abbiamo quindi una famiglia generatrice di W_{-2} costituita da 4 vettori. La matrice costituita dai coefficienti di questi vettori, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 4 come si può vedere calcolando il minore costituito da tutte le colonne e tutte le righe tranne la seconda. Segue che i 4 vettori sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di W_{-2} .

Esercizio 2. Si consideri la conica γ di equazione

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + 4(1 + \sqrt{3})x - 4(\sqrt{3} - 1)y + 12 = 0 .$$

a) Si dimostri che γ è una parabola e se ne determini la forma canonica.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} .$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \underline{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $(x')^2 + 2x' - 2y' + 3 = 0$. La traslazione

$$\begin{cases} X = x' + 1 \\ Y = y' - 1 \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica $X^2 - 2Y = 0$, ossia $Y = \frac{1}{2}X^2$.

b) Si scriva l'equazione dell'asse della parabola nelle coordinate (x, y) .

Nelle coordinate (X, Y) l'equazione dell'asse è ovviamente $X = 0$. Quindi nelle coordinate (x', y') essa diventa $x' = -1$. Per ottenere l'equazione nelle coordinate (x, y) possiamo sostituire $x' = -1$ nelle equazioni della rotazione, ottenendo

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} + y') \\ y = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}y') \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche dell'asse, dove y' gioca il ruolo del parametro. Eliminandolo, si ottiene $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$. Alternativamente, si può invertire la rotazione semplicemente passando alla matrice trasposta:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y) \\ y' = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y) \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione $x' = -1$ si arriva nuovamente a $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$.

Esercizio 3. Risolvere al variare del parametro reale k il sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 1 \\ -x + (k-2)y + z = -1 \\ 4x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k-2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k-2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k-2 & 1 \\ 0 & 1-k & 0 \end{vmatrix} \quad R_3 - R_1 - R_2 \\ &= (k-1) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(k-1) \end{aligned}$$

Quindi per $k \neq 1$ il sistema è determinato e ammette un'unica soluzione. Lo risolviamo in questo caso. Il sistema è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 1 \\ -x + (k-2)y + z = -1 \\ (1-k)y = 0 \end{cases} \quad R_3 - R_1 - R_2$$

Quindi $y = 0$ (perché $k \neq 1$), quindi $x = -1$ (prima più tre volte la seconda) e $z = -2$ (nella seconda).

Ora, se $k = 1$, il sistema di cui sopra rimane equivalente a quello iniziale. La terza equazione di questo sistema diventa $0 = 0$, quindi risulta soddisfatta per ogni x , y e z . Il sistema di partenza è quindi equivalente al sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -1 \end{cases}$$

Troviamo $z = 3x + 1$ (la prima più due volte la seconda) e quindi $y = 2x + 2$. Le soluzioni del sistema sono quindi della forma $\begin{pmatrix} x \\ 2x + 2 \\ 3x + 1 \end{pmatrix}$. A posteriori le condizioni del teorema di Rouché–Capelli sono quindi verificate e la caratteristica del sistema è 2.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
29 gennaio 2014 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Definiamo, per un parametro reale k , il sottoinsieme W_k di \mathbb{R}^5 nel modo seguente:

$$W_k = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / x_1 - x_2 + (k - 1)x_3x_4 + 3x_5 = 0\} .$$

- a) Verificare che W_1 è un sottospazio vettoriale.

Abbiamo

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / x_1 - x_2 + 3x_5 = 0\} .$$

cioè l'insieme dei vettori ortogonali al vettore $(1, -1, 0, 0, 3)_T$ e, secondo la lezione, questo è un sottospazio vettoriale.

- b) Verificare che se $k \neq 1$ allora W_k non è un sottospazio vettoriale.

Siano

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= (0, 0, 1, 0, 0) \\ \underline{v}_2 &= (0, 0, 0, 1, 0) . \end{aligned}$$

Allora \underline{v}_1 e \underline{v}_2 stanno entrambi in W_k (la parte "problematica" in x_3x_4 scompare perché uno dei due è nullo). Sia

$$\underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

e siano i reali x_1, \dots, x_5 tali che $\underline{v}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Allora

$$+x_1 - x_2 + (k - 1)x_3x_4 + 3x_5 = k - 1$$

ma questo è diverso da 0 perché $k \neq 1$ e quindi $\underline{v}_3 \notin W_k$. Quindi W_k non è un sottospazio vettoriale.

c) Trovare una base di W_1 .

Abbiamo

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / x_1 - x_2 + 3x_5 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_1 + 3x_5, x_3, x_4, x_5)_T / x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1, 1, 0, 0, 0)_T + x_3(0, 0, 1, 0, 0)_T \\ &\quad + x_4(0, 0, 0, 1, 0)_T + x_5(0, 3, 0, 0, 1)_T / x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 1, 0, 0, 0)_T, (0, 0, 1, 0, 0)_T, (0, 0, 0, 1, 0)_T, (0, 3, 0, 0, 1)_T \rangle . \end{aligned}$$

Abbiamo quindi una famiglia generatrice di W_1 costituita da 4 vettori. La matrice costituita dai coefficienti di questi vettori, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 4 come si può vedere calcolando il minore costituito da tutte le colonne e tutte le righe tranne la seconda. Segue che i 4 vettori sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di W_1 .

Esercizio 2. Si consideri la conica γ di equazione

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + 4(1 + 2\sqrt{3})x - 4(\sqrt{3} - 2)y + 48 = 0 .$$

a) Si dimostri che γ è una parabola e se ne determini la forma canonica.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} .$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \underline{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $(x')^2 + 4x' - 2y' + 12 = 0$. La traslazione

$$\begin{cases} X = x' + 2 \\ Y = y' - 4 \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica $X^2 - 2Y = 0$, ossia $Y = \frac{1}{2}X^2$.

b) Si scriva l'equazione dell'asse della parabola nelle coordinate (x, y) .

Nelle coordinate (X, Y) l'equazione dell'asse è ovviamente $X = 0$. Quindi nelle coordinate (x', y') essa diventa $x' = -2$. Per ottenere l'equazione nelle coordinate (x, y) possiamo sostituire $x' = -2$ nelle equazioni della rotazione, ottenendo

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}(2\sqrt{3} + y') \\ y = \frac{1}{2}(-2 + \sqrt{3}y') \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche dell'asse, dove y' gioca il ruolo del parametro. Eliminandolo, si ottiene $\sqrt{3}x + y + 4 = 0$. Alternativamente, si può invertire la rotazione semplicemente passando alla matrice trasposta:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y) \\ y' = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y) \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione $x' = -2$ si arriva nuovamente a $\sqrt{3}x + y + 4 = 0$.

Esercizio 3. Risolvere al variare del parametro reale k il sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 3 \\ -x + (k-4)y + z = -1 \\ 4x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k-4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k-4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k-4 & 1 \\ 0 & 3-k & 0 \end{vmatrix} \quad R_3 - R_1 - R_2 \\ &= (k-3) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(k-3) \end{aligned}$$

Quindi per $k \neq 3$ il sistema è determinato e ammette un'unica soluzione. Lo risolviamo in questo caso. Il sistema è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 3 \\ -x + (k-4)y + z = -1 \\ (3-k)y = 0 \end{cases} \quad R_3 - R_1 - R_2$$

Quindi $y = 0$ (perché $k \neq 3$), quindi $x = 0$ (prima più tre volte la seconda) e $z = -1$ (nella seconda).

Ora, se $k = 3$, il sistema di cui sopra rimane equivalente a quello iniziale. La terza equazione di questo sistema diventa $0 = 0$, quindi risulta soddisfatta per ogni x , y e z . Il sistema di partenza è quindi equivalente al sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 3 \\ -x - y + z = -1 \end{cases}$$

Troviamo $z = 3x - 1$ (la prima più due volte la seconda) e quindi $y = 2x$. Le soluzioni del sistema sono quindi della forma $\begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x - 1 \end{pmatrix}$. A posteriori le condizioni del teorema di Rouché–Capelli sono quindi verificate e la caratteristica del sistema è 2.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
29 gennaio 2014 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Definiamo, per un parametro reale k , il sottoinsieme W_k di \mathbb{R}^5 nel modo seguente:

$$W_k = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / -3x_1 - x_2 + (k+1)x_3x_4 + 3x_5 = 0\} .$$

- a) Verificare che W_{-1} è un sottospazio vettoriale.

Abbiamo

$$W_{-1} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / -3x_1 - x_2 + 3x_5 = 0\} .$$

cioè l'insieme dei vettori ortogonali al vettore $(-3, -1, 0, 0, 3)_T$ e, secondo la lezione, questo è un sottospazio vettoriale.

- b) Verificare che se $k \neq -1$ allora W_k non è un sottospazio vettoriale.

Siano

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= (0, 0, 1, 0, 0) \\ \underline{v}_2 &= (0, 0, 0, 1, 0) . \end{aligned}$$

Allora \underline{v}_1 e \underline{v}_2 stanno entrambi in W_k (la parte "problematica" in x_3x_4 scompare perché uno dei due è nullo). Sia

$$\underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

e siano i reali x_1, \dots, x_5 tali che $\underline{v}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Allora

$$-3x_1 - x_2 + (k+1)x_3x_4 + 3x_5 = k+1$$

ma questo è diverso da 0 perché $k \neq -1$ e quindi $\underline{v}_3 \notin W_k$. Quindi W_k non è un sottospazio vettoriale.

c) Trovare una base di W_{-1} .

Abbiamo

$$\begin{aligned} W_{-1} &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / -3x_1 - x_2 + 3x_5 = 0\} \\ &= \{(x_1, -3x_1 + 3x_5, x_3, x_4, x_5)_T / x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1, -3, 0, 0, 0)_T + x_3(0, 0, 1, 0, 0)_T \\ &\quad + x_4(0, 0, 0, 1, 0)_T + x_5(0, 3, 0, 0, 1)_T / x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, -3, 0, 0, 0)_T, (0, 0, 1, 0, 0)_T, (0, 0, 0, 1, 0)_T, (0, 3, 0, 0, 1)_T \rangle . \end{aligned}$$

Abbiamo quindi una famiglia generatrice di W_{-1} costituita da 4 vettori. La matrice costituita dai coefficienti di questi vettori, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 4 come si può vedere calcolando il minore costituito da tutte le colonne e tutte le righe tranne la seconda. Segue che i 4 vettori sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di W_{-1} .

Esercizio 2. Si consideri la conica γ di equazione

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + 4(1 - \sqrt{3})x - 4(\sqrt{3} + 1)y + 12 = 0 .$$

a) Si dimostri che γ è una parabola e se ne determini la forma canonica.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} .$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \underline{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $(x')^2 - 2x' - 2y' + 3 = 0$. La traslazione

$$\begin{cases} X = x' - 1 \\ Y = y' - 1 \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica $X^2 - 2Y = 0$, ossia $Y = \frac{1}{2}X^2$.

b) Si scriva l'equazione dell'asse della parabola nelle coordinate (x, y) .

Nelle coordinate (X, Y) l'equazione dell'asse è ovviamente $X = 0$. Quindi nelle coordinate (x', y') essa diventa $x' = 1$. Per ottenere l'equazione nelle coordinate (x, y) possiamo sostituire $x' = 1$ nelle equazioni della rotazione, ottenendo

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - y') \\ y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}y') \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche dell'asse, dove y' gioca il ruolo del parametro. Eliminandolo, si ottiene $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$. Alternativamente, si può invertire la rotazione semplicemente passando alla matrice trasposta:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y) \\ y' = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y) \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione $x' = 1$ si arriva nuovamente a $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$.

Esercizio 3. Risolvere al variare del parametro reale k il sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = -3 \\ -x + (k+2)y + z = -1 \\ 4x + y - 2z = -4 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k+2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k+2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k+2 & 1 \\ 0 & -3-k & 0 \end{vmatrix} \text{R}_3 - \text{R}_1 - \text{R}_2 \\ &= (k+3) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(k+3) \end{aligned}$$

Quindi per $k \neq -3$ il sistema è determinato e ammette un'unica soluzione. Lo risolviamo in questo caso. Il sistema è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = -3 \\ -x + (k+2)y + z = -1 \\ (-3-k)y = 0 \end{cases} \text{R}_3 - \text{R}_1 - \text{R}_2$$

Quindi $y = 0$ (perché $k \neq -3$), quindi $x = -3$ (prima più tre volte la seconda) e $z = -4$ (nella seconda).

Ora, se $k = -3$, il sistema di cui sopra rimane equivalente a quello iniziale. La terza equazione di questo sistema diventa $0 = 0$, quindi risulta soddisfatta per ogni x , y e z . Il sistema di partenza è quindi equivalente al sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = -3 \\ -x - y + z = -1 \end{cases}$$

Troviamo $z = 3x + 5$ (la prima più due volte la seconda) e quindi $y = 2x + 6$. Le soluzioni del sistema sono quindi della forma $\begin{pmatrix} x \\ 2x + 6 \\ 3x + 5 \end{pmatrix}$. A posteriori le condizioni del teorema di Rouché–Capelli sono quindi verificate e la caratteristica del sistema è 2.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
29 gennaio 2014 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Definiamo, per un parametro reale k , il sottoinsieme W_k di \mathbb{R}^5 nel modo seguente:

$$W_k = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / 3x_1 - x_2 + (k - 2)x_3x_4 + 3x_5 = 0\} .$$

- a) Verificare che W_2 è un sottospazio vettoriale.

Abbiamo

$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / 3x_1 - x_2 + 3x_5 = 0\} .$$

cioè l'insieme dei vettori ortogonali al vettore $(3, -1, 0, 0, 3)_T$ e, secondo la lezione, questo è un sottospazio vettoriale.

- b) Verificare che se $k \neq 2$ allora W_k non è un sottospazio vettoriale.

Siano

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= (0, 0, 1, 0, 0) \\ \underline{v}_2 &= (0, 0, 0, 1, 0) . \end{aligned}$$

Allora \underline{v}_1 e \underline{v}_2 stanno entrambi in W_k (la parte "problematica" in x_3x_4 scompare perché uno dei due è nullo). Sia

$$\underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

e siano i reali x_1, \dots, x_5 tali che $\underline{v}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Allora

$$+3x_1 - x_2 + (k - 2)x_3x_4 + 3x_5 = k - 2$$

ma questo è diverso da 0 perché $k \neq 2$ e quindi $\underline{v}_3 \notin W_k$. Quindi W_k non è un sottospazio vettoriale.

c) Trovare una base di W_2 .

Abbiamo

$$\begin{aligned} W_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_T / + 3x_1 - x_2 + 3x_5 = 0\} \\ &= \{(x_1, +3x_1 + 3x_5, x_3, x_4, x_5)_T / x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1, 3, 0, 0, 0)_T + x_3(0, 0, 1, 0, 0)_T \\ &\quad + x_4(0, 0, 0, 1, 0)_T + x_5(0, 3, 0, 0, 1)_T / x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 3, 0, 0, 0)_T, (0, 0, 1, 0, 0)_T, (0, 0, 0, 1, 0)_T, (0, 3, 0, 0, 1)_T \rangle . \end{aligned}$$

Abbiamo quindi una famiglia generatrice di W_2 costituita da 4 vettori. La matrice costituita dai coefficienti di questi vettori, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 4 come si può vedere calcolando il minore costituito da tutte le colonne e tutte le righe tranne la seconda. Segue che i 4 vettori sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di W_2 .

Esercizio 2. Si consideri la conica γ di equazione

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + 4(1 - 2\sqrt{3})x - 4(\sqrt{3} + 2)y + 48 = 0 .$$

a) Si dimostri che γ è una parabola e se ne determini la forma canonica.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} .$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \underline{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $(x')^2 - 4x' - 2y' + 12 = 0$. La traslazione

$$\begin{cases} X = x' - 2 \\ Y = y' - 4 \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica $X^2 - 2Y = 0$, ossia $Y = \frac{1}{2}X^2$.

b) Si scriva l'equazione dell'asse della parabola nelle coordinate (x, y) .

Nelle coordinate (X, Y) l'equazione dell'asse è ovviamente $X = 0$. Quindi nelle coordinate (x', y') essa diventa $x' = 2$. Per ottenere l'equazione nelle coordinate (x, y) possiamo sostituire $x' = 2$ nelle equazioni della rotazione, ottenendo

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - y') \\ y = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3}y') \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche dell'asse, dove y' gioca il ruolo del parametro. Eliminandolo, si ottiene $\sqrt{3}x + y - 4 = 0$. Alternativamente, si può invertire la rotazione semplicemente passando alla matrice trasposta:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y) \\ y' = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y) \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione $x' = 2$ si arriva nuovamente a $\sqrt{3}x + y - 4 = 0$.

Esercizio 3. Risolvere al variare del parametro reale k il sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 2 \\ -x + (k-3)y + z = -1 \\ 4x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k-3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k-3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & k-3 & 1 \\ 0 & 2-k & 0 \end{vmatrix} \quad R_3 - R_1 - R_2 \\ &= (k-2) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(k-2) \end{aligned}$$

Quindi per $k \neq 2$ il sistema è determinato e ammette un'unica soluzione. Lo risolviamo in questo caso. Il sistema è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 2 \\ -x + (k-3)y + z = -1 \\ (2-k)y = 0 \end{cases} \quad R_3 - R_1 - R_2$$

Quindi $y = 0$ (perché $k \neq 2$), quindi $x = -\frac{1}{2}$ (prima più tre volte la seconda) e $z = -\frac{3}{2}$ (nella seconda).

Ora, se $k = 2$, il sistema di cui sopra rimane equivalente a quello iniziale. La terza equazione di questo sistema diventa $0 = 0$, quindi risulta soddisfatta per ogni x , y e z . Il sistema di partenza è quindi equivalente al sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 2 \\ -x - y + z = -1 \end{cases}$$

Troviamo $z = 3x$ (la prima più due volte la seconda) e quindi $y = 2x + 1$. Le soluzioni del sistema sono quindi della forma $\begin{pmatrix} x \\ 2x + 1 \\ 3x \end{pmatrix}$. A posteriori le condizioni del teorema di Rouché–Capelli sono quindi verificate e la caratteristica del sistema è 2.