Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
14 gennaio 2014 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino il punto $P(1;1;-1)$ e la retta r di equazioni

$$\begin{cases} 4x + 11y - z - 18 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

a) Si trovi il piano π passante per P ed ortogonale ad r.

Per trovare il vettore direzionale della retta r si può calcolare il prodotto vettoriale $(4;11;-1) \wedge (1;-1;-1) = (-12;3;-15) = -3(4;-1;5)$. Possiamo pertanto prendere $\underline{v}_r = (4;-1;5)$. **Si verifica in brutta che è ortogonale ai due piani che definiscono r.** Il vettore $\underline{v}_r$ coincide con il vettore normale del piano π. Esso ha quindi equazione $4(x-1) - 1(y-1) + 5(z+1) = 0$, ossia $4x - y + 5z + 2 = 0$. **Si verifica in brutta che contiene P.**

b) Si trovi il piano π' passante per P e contenente r.

Basta considerare il fascio di piani contenenti r, ossia $\alpha(4x+11y-z-18)+\beta(x-y-z) = 0$. Imponendo il passaggio per il punto P si ottiene $\beta = 2\alpha$, cosicché l'equazione del piano π' è $2x+3y-z-6 = 0$. **Si verifica in brutta che contiene P e che il suo vettore normale è ortogonale al vettore direzionale di r.**

c) Si scrivano le equazioni parametriche della retta s, intersezione tra i piani π e π'.

Osserviamo anzitutto che i due piani non sono paralleli (per costruzione sono ortogonali), quindi la retta s esiste. Le sue equazioni cartesiane sono, ovviamente,

$$\begin{cases} 4x - y + 5z + 2 = 0 \\ 2x + 3y - z - 6 = 0 \end{cases}$$

In particolare, il punto $P(1;1;-1)$ appartiene ad entrambi i piani e quindi alla retta s. Per trovare il vettore direzionale della retta si può calcolare il prodotto vettoriale $(4;-1;5)\wedge(2;3;-1) = (-14;14;14) = 14(-1;1;1)$. **Si verifica in brutta che è ortogonale ai due vettori $(4;-1;5)$ e $(2;3;-1)$.** Possiamo pertanto prendere $\underline{v}_s = (-1;1;1)$. In conclusione, le equazioni parametriche di s sono

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

d) Si determini (se esiste) l'intersezione tra le rette r ed s.

Le due rette sono incidenti, poiché appartengono entrambe al piano π' e sono tra loro ortogonali. Per trovarne l'intersezione possiamo sostituire le equazioni parametriche di s in quelle cartesiane di r. Si ottiene un sistema la cui soluzione è $t = \frac{1}{3}$, cosicché il punto d'intersezione ha coordinate $(\frac{2}{3};\frac{4}{3};-\frac{2}{3})$. **Si verifica in brutta che soddisfa le due equazioni di r.**

Esercizio 2. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$77x^2 + 98y^2 + 125z^2 + 72xy + 90xz + 120yz - 90x - 120y - 250z + 325 = 0\ .$$

a) Dimostrare che gli autovalori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 77 & 36 & 45 \\ 36 & 98 & 60 \\ 45 & 60 & 125 \end{pmatrix}$$

sono $\lambda_1 = 50$ (doppio) e $\lambda_2 = 200$ (semplice).

Nel prossimo punto calcoleremo gli autovettori di B e quindi mostreremo (in base alla definizione) che λ_1 e λ_2 sono effettivamente gli autovalori, con le molteplicità indicate.

b) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

Determiniamo una base ortonormale di autovettori della matrice B. Quelli relativi all'autovalore $\lambda_1 = 50$ si ottengono dalle soluzioni (non nulle) del sistema

$$\begin{cases} 27x + 36y + 45z = 0 \\ 36x + 48y + 60z = 0 \\ 45x + 60y + 75z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

che sono date da $x = -\frac{1}{3}(4y + 5z)$, con y e z arbitrari (non nulli). Ciò dimostra che $\lambda_1 = 50$ è effettivamente un autovalore (doppio) della matrice B. Per costruire una

coppia di autovettori ortogonali possiamo porre $y = -3$, $z = 0$ ed ottenere quindi $\underline{u}_1 = (4, -3, 0)_T$. Imponendo ora che il generico autovettore $(-\frac{1}{3}(4y + 5z), y, z)_T$ sia ortogonale a $\underline{u}_1$, abbiamo la relazione $5y + 4z = 0$. Possiamo quindi porre $y = 4$ e $z = -5$, cosicché $x = 3$ e l'autovettore è $\underline{u}_2 = (3, 4, -5)_T$. **Si verifica in brutta che $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ sono autovettori.** Normalizzando $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ arriviamo a $\underline{v}_1 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)_T$ e $\underline{v}_2 = (\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})_T$.

Per quanto riguarda gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_2 = 200$, essi si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} -123x + 36y + 45z = 0 \\ 36x - 102y + 60z = 0 \\ 45x + 60y - 75z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -41x + 12y + 15z = 0 \\ 6x - 17y + 10z = 0 \\ 3x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$$

Si trova $y = \frac{4}{3}x$ e $z = \frac{5}{3}x$, con x arbitrario (non nullo). (Nota: si consiglia di usare la terza equazione per eliminare z dalle prime due). **Si verifica in brutta che $(3, 4, 5)$ è autovettore.** Ciò dimostra che $\lambda_2 = 200$ è effettivamente un autovalore (semplice) della matrice B. La normalizzazione porta poi al versore $\underline{v}_3 = (\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$.

Siccome si tratta di una matrice simmetrica dobbiamo trovare una base di autovettori fra di loro ortogonali. Il testo precisa la molteplicità degli autovalori per cui è sostanzialemente impossibile non accorgersi degli errori.

Abbiamo così ottenuto la matrice (ortogonale)

$$M = (\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

che dà il cambiamento di coordinate (rotazione)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5\sqrt{2}}y' + \frac{3}{5\sqrt{2}}z' \\ y = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5\sqrt{2}}y' + \frac{4}{5\sqrt{2}}z' \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \end{cases}$$

Nelle nuove coordinate l'equazione della quadrica diventa

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_1(y')^2 + \lambda_2(z')^2 + 50\sqrt{2}y' - 200\sqrt{2}z' + 325 = 0,$$

ossia

$$2(x')^2+2(y')^2+8(z')^2+2\sqrt{2}y'-8\sqrt{2}z'+13=0.$$

Basta a questo punto effettuare la traslazione

$$\begin{cases} X=x' \\ Y=y'+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ Z=z'-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica della quadrica:

$$\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{4}+Z^2=-1.$$

Essa è pertanto un ellissoide immaginario.

c) Scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta σ in forma canonica.

Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova che

$$\begin{cases} x=\frac{4}{5}X+\frac{3}{5\sqrt{2}}Y+\frac{3}{5\sqrt{2}}Z \\ y=-\frac{3}{5}X+\frac{4}{5\sqrt{2}}Y+\frac{4}{5\sqrt{2}}Z \\ z=-\frac{1}{\sqrt{2}}Y+\frac{1}{\sqrt{2}}Z+1 \end{cases}$$

Esercizio 3. Determinare al variare del parametro a l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+3y+6z=5 \\ x+4y+9z=12 \\ (6a+4)x+(21a+14)y+(44a+29)z=47a+30 \end{cases}$$

È consigliabile, ma non obbligatorio, usare la prima equazione per eliminare la variabile x dalla seconda e terza equazione. Risulta allora

$$\begin{cases} x+3y+6z=5 \\ y+3z=7 \\ (3a+2)y+(8a+5)z=17a+10 \end{cases}$$

È tuttora consigliabile, ma ancora non obbligatorio, usare la seconda equazione per eliminare la variabile y dalla prima e terza equazione. Risulta allora

$$\begin{cases} x-3z=-16 \\ y+3z=7 \\ (-a-1)z=-4a-4 \end{cases}$$

A questo punto la risposta è evidente: se $a \neq -1$ allora $z = 4$ e il sistema ammette un'unica soluzione

$$\mathcal{S} = \{(-4, -5, 4)\}.$$

Se invece $a = -1$ allora z è libera e il sistema ammette una retta di soluzioni

$$\mathcal{S} = \{(3z - 16, -3z + 7, z) \colon z \in \mathbb{R}\}.$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
14 gennaio 2014 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino il punto $P(1; 1; 2)$ e la retta r di equazioni

$$\begin{cases} 4x + 11y - z - 15 = 0 \\ x - y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

a) Si trovi il piano π passante per P ed ortogonale ad r.

Per trovare il vettore direzionale della retta r si può calcolare il prodotto vettoriale $(4; 11; -1) \wedge (1; -1; -1) = (-12; 3; -15) = -3(4; -1; 5)$. Possiamo pertanto prendere $\underline{v}_r = (4; -1; 5)$. **Si verifica in brutta che è ortogonale ai due piani che definiscono r.** Il vettore $\underline{v}_r$ coincide con il vettore normale del piano π. Esso ha quindi equazione $4(x-1)-1(y-1)+5(z-2) = 0$, ossia $4x-y+5z-13 = 0$. **Si verifica in brutta che contiene P.**

b) Si trovi il piano π' passante per P e contenente r.

Basta considerare il fascio di piani contenenti r, ossia $\alpha(4x + 11y - z - 15) + \beta(x - y - z + 3) = 0$. Imponendo il passaggio per il punto P si ottiene $\beta = 2\alpha$, cosicché l'equazione del piano π' è $2x + 3y - z - 3 = 0$. **Si verifica in brutta che contiene P e che il suo vettore normale è ortogonale al vettore direzionale di r.**

c) Si scrivano le equazioni parametriche della retta s, intersezione tra i piani π e π'.

Osserviamo anzitutto che i due piani non sono paralleli (per costruzione sono ortogonali), quindi la retta s esiste. Le sue equazioni cartesiane sono, ovviamente,

$$\begin{cases} 4x - y + 5z - 13 = 0 \\ 2x + 3y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

In particolare, il punto $P(1;1;2)$ appartiene ad entrambi i piani e quindi alla retta s. Per trovare il vettore direzionale della retta si può calcolare il prodotto vettoriale $(4;-1;5) \wedge (2;3;-1) = (-14;14;14) = 14(-1;1;1)$. **Si verifica in brutta che è ortogonale ai due vettori $(4;-1;5)$ e $(2;3;-1)$.** Possiamo pertanto prendere $\underline{v}_s = (-1;1;1)$. In conclusione, le equazioni parametriche di s sono

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

d) Si determini (se esiste) l'intersezione tra le rette r ed s.

Le due rette sono incidenti, poiché appartengono entrambe al piano π' e sono tra loro ortogonali. Per trovarne l'intersezione possiamo sostituire le equazioni parametriche di s in quelle cartesiane di r. Si ottiene un sistema la cui soluzione è $t = \frac{1}{3}$, cosicché il punto d'intersezione ha coordinate $(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3})$. **Si verifica in brutta che soddisfa le due equazioni di r.**

Esercizio 2. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$77x^2 + 98y^2 + 125z^2 + 72xy + 90xz + 120yz - 180x - 240y - 500z + 700 = 0 \ .$$

a) Dimostrare che gli autovalori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 77 & 36 & 45 \\ 36 & 98 & 60 \\ 45 & 60 & 125 \end{pmatrix}$$

sono $\lambda_1 = 50$ (doppio) e $\lambda_2 = 200$ (semplice).

Nel prossimo punto calcoleremo gli autovettori di B e quindi mostreremo (in base alla definizione) che λ_1 e λ_2 sono effettivamente gli autovalori, con le molteplicità indicate.

b) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

Determiniamo una base ortonormale di autovettori della matrice B. Quelli relativi all'autovalore $\lambda_1 = 50$ si ottengono dalle soluzioni (non nulle) del sistema

$$\begin{cases} 27x + 36y + 45z = 0 \\ 36x + 48y + 60z = 0 \\ 45x + 60y + 75z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

che sono date da $x = -\frac{1}{3}(4y + 5z)$, con y e z arbitrari (non nulli). Ciò dimostra che $\lambda_1 = 50$ è effettivamente un autovalore (doppio) della matrice B. Per costruire una

coppia di autovettori ortogonali possiamo porre $y = -3$, $z = 0$ ed ottenere quindi $\underline{u}_1 = (4, -3, 0)_T$. Imponendo ora che il generico autovettore $(-\frac{1}{3}(4y + 5z), y, z)_T$ sia ortogonale a $\underline{u}_1$, abbiamo la relazione $5y + 4z = 0$. Possiamo quindi porre $y = 4$ e $z = -5$, cosicché $x = 3$ e l'autovettore è $\underline{u}_2 = (3, 4, -5)_T$. **Si verifica in brutta che $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ sono autovettori.** Normalizzando $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ arriviamo a $\underline{v}_1 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)_T$ e $\underline{v}_2 = (\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})_T$.

Per quanto riguarda gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_2 = 200$, essi si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} -123x + 36y + 45z = 0 \\ 36x - 102y + 60z = 0 \\ 45x + 60y - 75z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -41x + 12y + 15z = 0 \\ 6x - 17y + 10z = 0 \\ 3x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$$

Si trova $y = \frac{4}{3}x$ e $z = \frac{5}{3}x$, con x arbitrario (non nullo). (Nota: si consiglia di usare la terza equazione per eliminare z dalle prime due). **Si verifica in brutta che $(3, 4, 5)$ è autovettore.** Ciò dimostra che $\lambda_2 = 200$ è effettivamente un autovalore (semplice) della matrice B. La normalizzazione porta poi al versore $\underline{v}_3 = (\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$.

Siccome si tratta di una matrice simmetrica dobbiamo trovare una base di autovettori fra di loro ortogonali. Il testo precisa la molteplicità degli autovalori per cui è sostanzialemente impossibile non accorgersi degli errori.

Abbiamo così ottenuto la matrice (ortogonale)

$$M = (\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

che dà il cambiamento di coordinate (rotazione)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5\sqrt{2}}y' + \frac{3}{5\sqrt{2}}z' \\ y = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5\sqrt{2}}y' + \frac{4}{5\sqrt{2}}z' \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \end{cases}$$

Nelle nuove coordinate l'equazione della quadrica diventa

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_1(y')^2 + \lambda_2(z')^2 + 100\sqrt{2}y' - 400\sqrt{2}z' + 700 = 0,$$

ossia

$$2(x')^2 + 2(y')^2 + 8(z')^2 + 4\sqrt{2}y' - 16\sqrt{2}z' + 28 = 0.$$

Basta a questo punto effettuare la traslazione

$$\begin{cases} X = x' \\ Y = y' + \sqrt{2} \\ Z = z' - \sqrt{2} \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica della quadrica:

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{4} + Z^2 = -1.$$

Essa è pertanto un ellissoide immaginario.

c) Scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta σ in forma canonica.

Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova che

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}X + \frac{3}{5\sqrt{2}}Y + \frac{3}{5\sqrt{2}}Z \\ y = -\frac{3}{5}X + \frac{4}{5\sqrt{2}}Y + \frac{4}{5\sqrt{2}}Z \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{1}{\sqrt{2}}Z + 2 \end{cases}$$

Esercizio 3. Determinare al variare del parametro a l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 3y + 6z = 5 \\ 3x + 10y + 21z = 22 \\ (12a+4)x + (41a+14)y + (85a+29)z = 87a+30 \end{cases}$$

È consigliabile, ma non obbligatorio, usare la prima equazione per eliminare la variabile x dalla seconda e terza equazione. Risulta allora

$$\begin{cases} x + 3y + 6z = 5 \\ y + 3z = 7 \\ (5a+2)y + (13a+5)z = 27a+10 \end{cases}$$

È tuttora consigliabile, ma ancora non obbligatorio, usare la seconda equazione per eliminare la variabile y dalla prima e terza equazione. Risulta allora

$$\begin{cases} x - 3z = -16 \\ y + 3z = 7 \\ (-2a-1)z = -8a-4 \end{cases}$$

A questo punto la risposta è evidente: se $a \neq -\frac{1}{2}$ allora $z = 4$ e il sistema ammette un'unica soluzione

$$\mathcal{S} = \{(-4, -5, 4)\}.$$

Se invece $a = -\frac{1}{2}$ allora z è libera e il sistema ammette una retta di soluzioni

$$\mathcal{S} = \{(3z - 16, -3z + 7, z) \colon z \in \mathbb{R}\}.$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
14 gennaio 2014 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino il punto $P(1;1;0)$ e la retta r di equazioni

$$\begin{cases} 4x + 11y - z - 17 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Si trovi il piano π passante per P ed ortogonale ad r.

Per trovare il vettore direzionale della retta r si può calcolare il prodotto vettoriale $(4;11;-1) \wedge (1;-1;-1) = (-12;3;-15) = -3(4;-1;5)$. Possiamo pertanto prendere $\underline{v}_r = (4;-1;5)$. **Si verifica in brutta che è ortogonale ai due piani che definiscono r.** Il vettore $\underline{v}_r$ coincide con il vettore normale del piano π. Esso ha quindi equazione $4(x-1) - 1(y-1) + 5z = 0$, ossia $4x - y + 5z - 3 = 0$. **Si verifica in brutta che contiene P.**

b) Si trovi il piano π' passante per P e contenente r.

Basta considerare il fascio di piani contenenti r, ossia $\alpha(4x + 11y - z - 17) + \beta(x - y - z + 1) = 0$. Imponendo il passaggio per il punto P si ottiene $\beta = 2\alpha$, cosicché l'equazione del piano π' è $2x + 3y - z - 5 = 0$. **Si verifica in brutta che contiene P e che il suo vettore normale è ortogonale al vettore direzionale di r.**

c) Si scrivano le equazioni parametriche della retta s, intersezione tra i piani π e π'.

Osserviamo anzitutto che i due piani non sono paralleli (per costruzione sono ortogonali), quindi la retta s esiste. Le sue equazioni cartesiane sono, ovviamente,

$$\begin{cases} 4x - y + 5z - 3 = 0 \\ 2x + 3y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

In particolare, il punto $P(1;1;0)$ appartiene ad entrambi i piani e quindi alla retta s. Per trovare il vettore direzionale della retta si può calcolare il prodotto vettoriale $(4;-1;5) \wedge (2;3;-1) = (-14;14;14) = 14(-1;1;1)$. **Si verifica in brutta che è ortogonale ai due vettori** $(4;-1;5)$ **e** $(2;3;-1)$. Possiamo pertanto prendere $\underline{v}_s = (-1;1;1)$. In conclusione, le equazioni parametriche di s sono

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$$

d) Si determini (se esiste) l'intersezione tra le rette r ed s.

Le due rette sono incidenti, poiché appartengono entrambe al piano π' e sono tra loro ortogonali. Per trovarne l'intersezione possiamo sostituire le equazioni parametriche di s in quelle cartesiane di r. Si ottiene un sistema la cui soluzione è $t = \frac{1}{3}$, cosicché il punto d'intersezione ha coordinate $(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3})$. **Si verifica in brutta che soddisfa le due equazioni di** r.

Esercizio 2. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$77x^2 + 98y^2 + 125z^2 + 72xy + 90xz + 120yz + 90x + 120y + 250z + 325 = 0 \ .$$

a) Dimostrare che gli autovalori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 77 & 36 & 45 \\ 36 & 98 & 60 \\ 45 & 60 & 125 \end{pmatrix}$$

sono $\lambda_1 = 50$ (doppio) e $\lambda_2 = 200$ (semplice).

Nel prossimo punto calcoleremo gli autovettori di B e quindi mostreremo (in base alla definizione) che λ_1 e λ_2 sono effettivamente gli autovalori, con le molteplicità indicate.

b) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

Determiniamo una base ortonormale di autovettori della matrice B. Quelli relativi all'autovalore $\lambda_1 = 50$ si ottengono dalle soluzioni (non nulle) del sistema

$$\begin{cases} 27x + 36y + 45z = 0 \\ 36x + 48y + 60z = 0 \\ 45x + 60y + 75z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

che sono date da $x = -\frac{1}{3}(4y + 5z)$, con y e z arbitrari (non nulli). Ciò dimostra che $\lambda_1 = 50$ è effettivamente un autovalore (doppio) della matrice B. Per costruire una

coppia di autovettori ortogonali possiamo porre $y = -3$, $z = 0$ ed ottenere quindi $\underline{u}_1 = (4, -3, 0)_T$. Imponendo ora che il generico autovettore $(-\frac{1}{3}(4y + 5z), y, z)_T$ sia ortogonale a $\underline{u}_1$, abbiamo la relazione $5y + 4z = 0$. Possiamo quindi porre $y = 4$ e $z = -5$, cosicché $x = 3$ e l'autovettore è $\underline{u}_2 = (3, 4, -5)_T$. **Si verifica in brutta che $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ sono autovettori.** Normalizzando $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ arriviamo a $\underline{v}_1 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)_T$ e $\underline{v}_2 = (\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})_T$.

Per quanto riguarda gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_2 = 200$, essi si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} -123x + 36y + 45z = 0 \\ 36x - 102y + 60z = 0 \\ 45x + 60y - 75z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -41x + 12y + 15z = 0 \\ 6x - 17y + 10z = 0 \\ 3x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$$

Si trova $y = \frac{4}{3}x$ e $z = \frac{5}{3}x$, con x arbitrario (non nullo). (Nota: si consiglia di usare la terza equazione per eliminare z dalle prime due). **Si verifica in brutta che $(3, 4, 5)$ è autovettore.** Ciò dimostra che $\lambda_2 = 200$ è effettivamente un autovalore (semplice) della matrice B. La normalizzazione porta poi al versore $\underline{v}_3 = (\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$.

Siccome si tratta di una matrice simmetrica dobbiamo trovare una base di autovettori fra di loro ortogonali. Il testo precisa la molteplicità degli autovalori per cui è sostanzialemente impossibile non accorgersi degli errori.

Abbiamo così ottenuto la matrice (ortogonale)

$$M = (\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

che dà il cambiamento di coordinate (rotazione)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5\sqrt{2}}y' + \frac{3}{5\sqrt{2}}z' \\ y = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5\sqrt{2}}y' + \frac{4}{5\sqrt{2}}z' \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \end{cases}$$

Nelle nuove coordinate l'equazione della quadrica diventa

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_1(y')^2 + \lambda_2(z')^2 - 50\sqrt{2}y' + 200\sqrt{2}z' + 325 = 0,$$

ossia

$$2(x')^2 + 2(y')^2 + 8(z')^2 - 2\sqrt{2}y' + 8\sqrt{2}z' + 13 = 0.$$

Basta a questo punto effettuare la traslazione

$$\begin{cases} X = x' \\ Y = y' - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Z = z' + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica della quadrica:

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{4} + Z^2 = -1.$$

Essa è pertanto un ellissoide immaginario.

c) Scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta σ in forma canonica.

Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova che

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}X + \frac{3}{5\sqrt{2}}Y + \frac{3}{5\sqrt{2}}Z \\ y = -\frac{3}{5}X + \frac{4}{5\sqrt{2}}Y + \frac{4}{5\sqrt{2}}Z \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{1}{\sqrt{2}}Z - 1 \end{cases}$$

Esercizio 3. Determinare al variare del parametro a l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 3y + 6z = 5 \\ 5x + 16y + 33z = 32 \\ (2a+4)x + (5a+14)y + (10a+29)z = 7a+30 \end{cases}$$

È consigliabile, ma non obbligatorio, usare la prima equazione per eliminare la variabile x dalla seconda e terza equazione. Risulta allora

$$\begin{cases} x + 3y + 6z = 5 \\ y + 3z = 7 \\ (-a+2)y + (-2a+5)z = -3a+10 \end{cases}$$

È tuttora consigliabile, ma ancora non obbligatorio, usare la seconda equazione per eliminare la variabile y dalla prima e terza equazione. Risulta allora

$$\begin{cases} x - 3z = -16 \\ y + 3z = 7 \\ (a-1)z = 4a-4 \end{cases}$$

A questo punto la risposta è evidente: se $a \neq 1$ allora $z = 4$ e il sistema ammette un'unica soluzione
$$\mathcal{S} = \{(-4, -5, 4)\}.$$
Se invece $a = 1$ allora z è libera e il sistema ammette una retta di soluzioni
$$\mathcal{S} = \{(3z - 16, -3z + 7, z) \colon z \in \mathbb{R}\}.$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
14 gennaio 2014 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino il punto $P(1;1;3)$ e la retta r di equazioni

$$\begin{cases} 4x + 11y - z - 14 = 0 \\ x - y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

a) Si trovi il piano π passante per P ed ortogonale ad r.

Per trovare il vettore direzionale della retta r si può calcolare il prodotto vettoriale $(4;11;-1) \wedge (1;-1;-1) = (-12;3;-15) = -3(4;-1;5)$. Possiamo pertanto prendere $\underline{v}_r = (4;-1;5)$. **Si verifica in brutta che è ortogonale ai due piani che definiscono r.** Il vettore $\underline{v}_r$ coincide con il vettore normale del piano π. Esso ha quindi equazione $4(x-1)-1(y-1)+5(z-3) = 0$, ossia $4x-y+5z-18 = 0$. **Si verifica in brutta che contiene P.**

b) Si trovi il piano π' passante per P e contenente r.

Basta considerare il fascio di piani contenenti r, ossia $\alpha(4x + 11y - z - 14) + \beta(x - y - z + 4) = 0$. Imponendo il passaggio per il punto P si ottiene $\beta = 2\alpha$, cosicché l'equazione del piano π' è $2x + 3y - z - 2 = 0$. **Si verifica in brutta che contiene P e che il suo vettore normale è ortogonale al vettore direzionale di r.**

c) Si scrivano le equazioni parametriche della retta s, intersezione tra i piani π e π'.

Osserviamo anzitutto che i due piani non sono paralleli (per costruzione sono ortogonali), quindi la retta s esiste. Le sue equazioni cartesiane sono, ovviamente,

$$\begin{cases} 4x - y + 5z - 18 = 0 \\ 2x + 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

In particolare, il punto $P(1;1;3)$ appartiene ad entrambi i piani e quindi alla retta s. Per trovare il vettore direzionale della retta si può calcolare il prodotto vettoriale $(4;-1;5)\wedge(2;3;-1) = (-14;14;14) = 14(-1;1;1)$. **Si verifica in brutta che è ortogonale ai due vettori $(4;-1;5)$ e $(2;3;-1)$.** Possiamo pertanto prendere $\underline{v}_s = (-1;1;1)$. In conclusione, le equazioni parametriche di s sono

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

d) Si determini (se esiste) l'intersezione tra le rette r ed s.

Le due rette sono incidenti, poiché appartengono entrambe al piano π' e sono tra loro ortogonali. Per trovarne l'intersezione possiamo sostituire le equazioni parametriche di s in quelle cartesiane di r. Si ottiene un sistema la cui soluzione è $t = \frac{1}{3}$, cosicché il punto d'intersezione ha coordinate $(\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{10}{3})$. **Si verifica in brutta che soddisfa le due equazioni di r.**

Esercizio 2. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$77x^2 + 98y^2 + 125z^2 + 72xy + 90xz + 120yz + 180x + 240y + 500z + 700 = 0\ .$$

a) Dimostrare che gli autovalori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 77 & 36 & 45 \\ 36 & 98 & 60 \\ 45 & 60 & 125 \end{pmatrix}$$

sono $\lambda_1 = 50$ (doppio) e $\lambda_2 = 200$ (semplice).

Nel prossimo punto calcoleremo gli autovettori di B e quindi mostreremo (in base alla definizione) che λ_1 e λ_2 sono effettivamente gli autovalori, con le molteplicità indicate.

b) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

Determiniamo una base ortonormale di autovettori della matrice B. Quelli relativi all'autovalore $\lambda_1 = 50$ si ottengono dalle soluzioni (non nulle) del sistema

$$\begin{cases} 27x + 36y + 45z = 0 \\ 36x + 48y + 60z = 0 \\ 45x + 60y + 75z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

che sono date da $x = -\frac{1}{3}(4y + 5z)$, con y e z arbitrari (non nulli). Ciò dimostra che $\lambda_1 = 50$ è effettivamente un autovalore (doppio) della matrice B. Per costruire una

coppia di autovettori ortogonali possiamo porre $y = -3$, $z = 0$ ed ottenere quindi $\underline{u}_1 = (4, -3, 0)_T$. Imponendo ora che il generico autovettore $(-\frac{1}{3}(4y + 5z), y, z)_T$ sia ortogonale a $\underline{u}_1$, abbiamo la relazione $5y + 4z = 0$. Possiamo quindi porre $y = 4$ e $z = -5$, cosicché $x = 3$ e l'autovettore è $\underline{u}_2 = (3, 4, -5)_T$. **Si verifica in brutta che $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ sono autovettori.** Normalizzando $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ arriviamo a $\underline{v}_1 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)_T$ e $\underline{v}_2 = (\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})_T$.

Per quanto riguarda gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_2 = 200$, essi si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} -123x + 36y + 45z = 0 \\ 36x - 102y + 60z = 0 \\ 45x + 60y - 75z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -41x + 12y + 15z = 0 \\ 6x - 17y + 10z = 0 \\ 3x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$$

Si trova $y = \frac{4}{3}x$ e $z = \frac{5}{3}x$, con x arbitrario (non nullo). (Nota: si consiglia di usare la terza equazione per eliminare z dalle prime due). **Si verifica in brutta che $(3, 4, 5)$ è autovettore.** Ciò dimostra che $\lambda_2 = 200$ è effettivamente un autovalore (semplice) della matrice B. La normalizzazione porta poi al versore $\underline{v}_3 = (\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$.

Siccome si tratta di una matrice simmetrica dobbiamo trovare una base di autovettori fra di loro ortogonali. Il testo precisa la molteplicità degli autovalori per cui è sostanzialemente impossibile non accorgersi degli errori.

Abbiamo così ottenuto la matrice (ortogonale)

$$M = (\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

che dà il cambiamento di coordinate (rotazione)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5\sqrt{2}}y' + \frac{3}{5\sqrt{2}}z' \\ y = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5\sqrt{2}}y' + \frac{4}{5\sqrt{2}}z' \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \end{cases}$$

Nelle nuove coordinate l'equazione della quadrica diventa

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_1(y')^2 + \lambda_2(z')^2 - 100\sqrt{2}y' + 400\sqrt{2}z' + 700 = 0,$$

ossia
$$2(x')^2 + 2(y')^2 + 8(z')^2 - 4\sqrt{2}y' + 16\sqrt{2}z' + 28 = 0.$$
Basta a questo punto effettuare la traslazione
$$\begin{cases} X = x' \\ Y = y' - \sqrt{2} \\ Z = z' + \sqrt{2} \end{cases}$$
per ottenere la forma canonica della quadrica:
$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{4} + Z^2 = -1.$$
Essa è pertanto un ellissoide immaginario.

c) Scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta σ in forma canonica.

Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova che
$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}X + \frac{3}{5\sqrt{2}}Y + \frac{3}{5\sqrt{2}}Z \\ y = -\frac{3}{5}X + \frac{4}{5\sqrt{2}}Y + \frac{4}{5\sqrt{2}}Z \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{1}{\sqrt{2}}Z - 2 \end{cases}$$

Esercizio 3. Determinare al variare del parametro a l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema
$$\begin{cases} x + 3y + 6z = 5 \\ 2x + 7y + 15z = 17 \\ (-5a+4)x + (-18a+14)y + (-37a+29)z = -38a+30 \end{cases}$$

È consigliabile, ma non obbligatorio, usare la prima equazione per eliminare la variabile x dalla seconda e terza equazione. Risulta allora
$$\begin{cases} x + 3y + 6z = 5 \\ y + 3z = 7 \\ (-3a+2)y + (-7a+5)z = -13a+10 \end{cases}$$

È tuttora consigliabile, ma ancora non obbligatorio, usare la seconda equazione per eliminare la variabile y dalla prima e terza equazione. Risulta allora
$$\begin{cases} x - 3z = -16 \\ y + 3z = 7 \\ (2a-1)z = 8a-4 \end{cases}$$

A questo punto la risposta è evidente: se $a \neq \frac{1}{2}$ allora $z = 4$ e il sistema ammette un'unica soluzione

$$\mathcal{S} = \{(-4, -5, 4)\}.$$

Se invece $a = \frac{1}{2}$ allora z è libera e il sistema ammette una retta di soluzioni

$$\mathcal{S} = \{(3z - 16, -3z + 7, z) \colon z \in \mathbb{R}\}.$$