Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
2 settembre 2013 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Consideriamo l'equazione

(E) $$(-1-i)z + (-1+i)\bar{z} - 4 = 0 \ .$$

a) Risolvere l'equazione (**??**).

Possiamo passare in coordinate cartesiane, ponendo $z = x + iy$ con x e $y \in \mathbb{R}$. L'equazione diventa (dopo divisione per 2)

$$-x + y - 2 = 0 \ .$$

Si riconosce l'equazione di una retta. Otteniamo

$$y = x + 2 \ ,$$

cioè

$$z = x + (x+2)i = x(1+i) + 2i$$

con $x \in \mathbb{R}$.

b) Dare due soluzioni esplicite e distinte dell'equazione (**??**).

Basta scegliere due valori diversi di x di cui sopra, per esempio $x = 0$ e $x = 1$. Troviamo

$$z_0 = (0,2) \ , \quad z_1 = (1,3) \ .$$

c) Disporre le soluzioni dell'equazione (**??**) nel piano di Gauss.

Come osservato prima si tratta della retta passante per z_0 e z_1.

Esercizio 2. Consideriamo, nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi di grado al massimo due, i quattro polinomi

$$P_1 = x^2 + 2x + 1 \qquad P_2 = 2x^2 - x + 3$$
$$P_3 = -4x^2 + 7x - 7 \qquad P_4 = 5x - 1$$

a) Dire se i quattro polinomi P_1, P_2, P_3 e P_4 sono linearmente indipendenti.

No, non sono linearmente indipendenti perché sono 4 vettori in uno spazio (lo spazio V) di dimensione 3. Era anche possibile usare la risposta della domanda successiva, ovvero che i tre primi non sono linearmente indipendenti, però è del tutto inutile.

b) Dire se i tre polinomi P_1, P_2 e P_3 sono linearmente indipendenti.

Si tratta di determinare se esistono tre reali a, b e c, non tutti nulli, tali che

$$aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0 \ ,$$

cioè di risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + 2b - 4c = 0 \\ 2a - b + 7c = 0 \\ a + 3b - 7c = 0 \end{cases}$$

È immediato verificare che il sistema ha più di una soluzione, sia risolvendolo per esteso, sia calcolando la caratteristica della matrice dei coefficienti (la quale è 2) per cui i tre vettori sono linearmente dipendenti.

c) Qual è la dimensione del sottospazio W generato dai polinomi P_1, P_2 e P_3?

La risposta a questa domanda è sostanzialmente una conseguenza della domanda precedente.

Infatti il vettori P_1 non è il vettore nullo per cui lo spazio W ha dimensione almeno 1.

Il vettore P_2 non è proporzionale al vettore P_1 per cui i vettori P_1 e P_2 sono linearmente indipendenti e quindi W ha dimensione almeno 2.

D'altra parte abbiamo visto che i tre vettori P_1, P_2 e P_3 sono linearmente dipendenti, per cui W ha dimensione minore di 3.

Quindi $\dim W = 2$. Inoltre $\{P_1, P_2\}$ è una base di W perché sono due vettori linearmente indipendenti in un sottospazio (W) di dimensione 2. (Nota: non formano invece una base di V perché una base di V ha per forza tre elementi).

d) Qual è la dimensione del sottospazio X generato dai polinomi P_1, P_2, P_3 e P_4? (Questa domanda non richiede praticamente nessun calcolo se è fatta bene).

Abbiamo $W \subseteq X \subseteq V$ per cui X può avere dimensione soltanto 2 e 3 e inoltre ha dimensione 2 se e solo se P_4 sta in V, ovvero se P_4 è combinazione lineare di P_1 e P_2.

A questa domanda è facile rispondere perché il coefficiente di x^2 di P_4 è zero, per cui se P_4 è combinazione lineare di P_1 e P_2 è un multiplo di $2P_1 - P_2$. Calcoliamo quindi

$$2P_1 - P_2 = 5x - 1$$

ed è ovvio che P_4 ne è multiplo (anzi, vi è uguale). Per cui X ha dimensione 2.

Esercizio 3. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3t = -3 \\ 21x + 11y + 23z - 5t = 22 \\ 6x + 12y - 10z - 23t = -28 \\ 13x - 5y + 33z + 24t = 56 \end{cases}$$

L'unica difficoltà del sistema risiede nel fatto che è grande. Denotiamo A la matrice dei coefficienti e $\underline{b}$ il vettore dei termini noti, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 21 & 11 & 23 & -5 \\ 6 & 12 & -10 & -23 \\ 13 & -5 & 33 & 24 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 22 \\ -28 \\ 56 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la caratteristica (cioè il rango) della matrice A usando il metodo di Kronecker.
La sottomatrice 1×1 in alto a sinistra ha determinante $1 \neq 0$.
La sottomatrice 2×2 costituita dalle prima e terza righe e prima e terza colonne ha determinante $-10 \neq 0$.
La sottomatrice 3×3 costituita dalle tre prime righe e tre prime colonne ha determinante $310 \neq 0$.
La matrice A ha determinante 0 per cui ha caratteristica (o rango) 3 (in questo caso non serve il teorema di Kronecker, capire perché).
La matrice completa $(A \mid \underline{b})$ ha caratteristica (o rango) anche lei uguale a 3 perché il determinante della sottomatrice costituita dalle tre prime e dall'ultima colonna è nullo.
Per il teorema di Rouché–Capelli il sistema ammette soluzioni e queste formano una retta.
L'insieme delle soluzioni è dato da

$$\mathcal{S} = \{(1, 1 - 3z, z, 2 - 2z) \mid z \in \mathbb{R}\} .$$

(Come al solito si consiglia l'uso del metodo di Gauss, usando la prima riga per cancellare la x dalle altre equazioni, e proseguendo analogamente per eliminare la y o la t da due ulteriori equazioni.) **Non dimenticare di inserire (in brutta) le soluzioni nelle equazioni di partenza per verificare che le soluzioni trovate sono corrette.**

Esercizio 4. Si consideri la conica

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 24x + 8y + 24 = 0 .$$

a) Si determini (se esiste) il centro della conica.

L'esistenza del centro e le sue coordinate si possono facilmente dedurre dalle risposte alle domande successive. In alternativa, possiamo considerare il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{c} = \underline{0} \ ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} , \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Si trova che le coordinate del centro sono $x_C = 3$ e $y_C = 1$.

b) Si trovi la forma canonica della conica e la si riconosca.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $-6xy$, ossia diagonalizzare la matrice B. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \qquad \underline{u}_2 = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$2(x')^2 + 8(y')^2 - 8\sqrt{2}\, x' + 16\sqrt{2}\, y' + 24 = 0 \ .$$

(Si ricorda che basta trasformare il binomio $-24x + 8y$, poiché sappiamo che i termini di secondo grado diventano $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$, mentre il termine noto rimane ovviamente invariato).

A questo punto, la traslazione

$$\begin{cases} x' = X + 2\sqrt{2} \\ y' = Y - \sqrt{2} \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1 \ .$$

Si tratta quindi di un'ellisse.

c) Disegnare la conica nel piano xy.

Basta mettere assieme le informazioni già raccolte:

- il centro ha coordinate $(3; 1)$;
- gli assi X e Y (ossia, gli assi della conica) si ottengono ruotando di $\frac{\pi}{4}$ in senso positivo (antiorario) gli assi x e y;
- le lunghezze dei semiassi sono 2 e 1.

Il disegno dell'ellisse si ottiene facilmente.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
2 settembre 2013 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Consideriamo l'equazione

(E) $$(-4-i)z + (-4+i)\bar{z} + 2 = 0 \ .$$

a) Risolvere l'equazione (**??**).

Possiamo passare in coordinate cartesiane, ponendo $z = x + iy$ con x e $y \in \mathbb{R}$. L'equazione diventa (dopo divisione per 2)

$$-4x + y + 1 = 0 \ .$$

Si riconosce l'equazione di una retta. Otteniamo

$$y = 4x - 1 \ ,$$

cioè

$$z = x + (4x-1)i = x(1+4i) - i$$

con $x \in \mathbb{R}$.

b) Dare due soluzioni esplicite e distinte dell'equazione (**??**).

Basta scegliere due valori diversi di x di cui sopra, per esempio $x = 0$ e $x = 1$. Troviamo

$$z_0 = (0, -1) \ , \quad z_1 = (1, 3) \ .$$

c) Disporre le soluzioni dell'equazione (**??**) nel piano di Gauss.

Come osservato prima si tratta della retta passante per z_0 e z_1.

Esercizio 2. Consideriamo, nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi di grado al massimo due, i quattro polinomi

$$P_1 = x^2 + 2x - 1 \qquad P_2 = x^2 - 2x + 3$$
$$P_3 = -x^2 + 10x - 11 \qquad P_4 = 4x - 4$$

a) Dire se i quattro polinomi P_1, P_2, P_3 e P_4 sono linearmente indipendenti.

No, non sono linearmente indipendenti perché sono 4 vettori in uno spazio (lo spazio V) di dimensione 3. Era anche possibile usare la risposta della domanda successiva, ovvero che i tre primi non sono linearmente indipendenti, però è del tutto inutile.

b) Dire se i tre polinomi P_1, P_2 e P_3 sono linearmente indipendenti.

Si tratta di determinare se esistono tre reali a, b e c, non tutti nulli, tali che

$$aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0 \ ,$$

cioè di risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2a - 2b + 10c = 0 \\ -a + 3b - 11c = 0 \end{cases}$$

È immediato verificare che il sistema ha più di una soluzione, sia risolvendolo per esteso, sia calcolando la caratteristica della matrice dei coefficienti (la quale è 2) per cui i tre vettori sono linearmente dipendenti.

c) Qual è la dimensione del sottospazio W generato dai polinomi P_1, P_2 e P_3?

La risposta a questa domanda è sostanzialmente una conseguenza della domanda precedente.

Infatti il vettori P_1 non è il vettore nullo per cui lo spazio W ha dimensione almeno 1.

Il vettore P_2 non è proporzionale al vettore P_1 per cui i vettori P_1 e P_2 sono linearmente indipendenti e quindi W ha dimensione almeno 2.

D'altra parte abbiamo visto che i tre vettori P_1, P_2 e P_3 sono linearmente dipendenti, per cui W ha dimensione minore di 3.

Quindi $\dim W = 2$. Inoltre $\{P_1, P_2\}$ è una base di W perché sono due vettori linearmente indipendenti in un sottospazio (W) di dimensione 2. (Nota: non formano invece una base di V perché una base di V ha per forza tre elementi).

d) Qual è la dimensione del sottospazio X generato dai polinomi P_1, P_2, P_3 e P_4? (Questa domanda non richiede praticamente nessun calcolo se è fatta bene).

Abbiamo $W \subseteq X \subseteq V$ per cui X può avere dimensione soltanto 2 e 3 e inoltre ha dimensione 2 se e solo se P_4 sta in V, ovvero se P_4 è combinazione lineare di P_1 e P_2.

A questa domanda è facile rispondere perché il coefficiente di x^2 di P_4 è zero, per cui se P_4 è combinazione lineare di P_1 e P_2 è un multiplo di $P_1 - P_2$. Calcoliamo quindi

$$P_1 - P_2 = 4x - 4$$

ed è ovvio che P_4 ne è multiplo (anzi, vi è uguale). Per cui X ha dimensione 2.

Esercizio 3. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3t = -3 \\ 21x + 11y + 23z - 5t = 22 \\ 8x + 16y - 10z - 29t = -34 \\ 14x - 3y + 33z + 21t = 53 \end{cases}$$

L'unica difficoltà del sistema risiede nel fatto che è grande. Denotiamo A la matrice dei coefficienti e $\underline{b}$ il vettore dei termini noti, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 21 & 11 & 23 & -5 \\ 8 & 16 & -10 & -29 \\ 14 & -3 & 33 & 21 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 22 \\ -34 \\ 53 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la caratteristica (cioè il rango) della matrice A usando il metodo di Kronecker.
La sottomatrice 1×1 in alto a sinistra ha determinante $1 \neq 0$.
La sottomatrice 2×2 costituita dalle prima e terza righe e prima e terza colonne ha determinante $-10 \neq 0$.
La sottomatrice 3×3 costituita dalle tre prime righe e tre prime colonne ha determinante $310 \neq 0$.
La matrice A ha determinante 0 per cui ha caratteristica (o rango) 3 (in questo caso non serve il teorema di Kronecker, capire perché).
La matrice completa $(A \mid \underline{b})$ ha caratteristica (o rango) anche lei uguale a 3 perché il determinante della sottomatrice costituita dalle tre prime e dall'ultima colonna è nullo.
Per il teorema di Rouché–Capelli il sistema ammette soluzioni e queste formano una retta.
L'insieme delle soluzioni è dato da

$$\mathcal{S} = \{(1, 1 - 3z, z, 2 - 2z) \mid z \in \mathbb{R}\} .$$

(Come al solito si consiglia l'uso del metodo di Gauss, usando la prima riga per cancellare la x dalle altre equazioni, e proseguendo analogamente per eliminare la y o la t da due ulteriori equazioni.) **Non dimenticare di inserire (in brutta) le soluzioni nelle equazioni di partenza per verificare che le soluzioni trovate sono corrette.**

Esercizio 4. Si consideri la conica

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 14x + 2y + 5 = 0 .$$

a) Si determini (se esiste) il centro della conica.

L'esistenza del centro e le sue coordinate si possono facilmente dedurre dalle risposte alle domande successive. In alternativa, possiamo considerare il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{c} = \underline{0} \ ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si trova che le coordinate del centro sono $x_C = 2$ e $y_C = 1$.

b) Si trovi la forma canonica della conica e la si riconosca.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $-6xy$, ossia diagonalizzare la matrice B. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \qquad \underline{u}_2 = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$2(x')^2 + 8(y')^2 - 6\sqrt{2}\, x' + 8\sqrt{2}\, y' + 5 = 0 \ .$$

(Si ricorda che basta trasformare il binomio $-14x + 2y$, poiché sappiamo che i termini di secondo grado diventano $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$, mentre il termine noto rimane ovviamente invariato).

A questo punto, la traslazione

$$\begin{cases} x' = X + \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y' = Y - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1 \ .$$

Si tratta quindi di un'ellisse.

c) Disegnare la conica nel piano xy.

Basta mettere assieme le informazioni già raccolte:

- il centro ha coordinate $(2; 1)$;
- gli assi X e Y (ossia, gli assi della conica) si ottengono ruotando di $\frac{\pi}{4}$ in senso positivo (antiorario) gli assi x e y;
- le lunghezze dei semiassi sono 2 e 1.

Il disegno dell'ellisse si ottiene facilmente.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
2 settembre 2013 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Consideriamo l'equazione

(E) $$(-2-i)z + (-2+i)\bar{z} - 2 = 0 \ .$$

a) Risolvere l'equazione (**??**).

Possiamo passare in coordinate cartesiane, ponendo $z = x + iy$ con x e $y \in \mathbb{R}$. L'equazione diventa (dopo divisione per 2)

$$-2x + y - 1 = 0 \ .$$

Si riconosce l'equazione di una retta. Otteniamo

$$y = 2x + 1 \ ,$$

cioè

$$z = x + (2x+1)i = x(1+2i) + i$$

con $x \in \mathbb{R}$.

b) Dare due soluzioni esplicite e distinte dell'equazione (**??**).

Basta scegliere due valori diversi di x di cui sopra, per esempio $x = 0$ e $x = 1$. Troviamo

$$z_0 = (0,1) \ , \quad z_1 = (1,3) \ .$$

c) Disporre le soluzioni dell'equazione (**??**) nel piano di Gauss.

Come osservato prima si tratta della retta passante per z_0 e z_1.

Esercizio 2. Consideriamo, nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi di grado al massimo due, i quattro polinomi

$$P_1 = -x^2 + x - 2 \qquad\qquad P_2 = -2x^2 + x + 3$$
$$P_3 = 4x^2 - x - 13 \qquad\qquad P_4 = -x + 7$$

a) Dire se i quattro polinomi P_1, P_2, P_3 e P_4 sono linearmente indipendenti.

No, non sono linearmente indipendenti perché sono 4 vettori in uno spazio (lo spazio V) di dimensione 3. Era anche possibile usare la risposta della domanda successiva, ovvero che i tre primi non sono linearmente indipendenti, però è del tutto inutile.

b) Dire se i tre polinomi P_1, P_2 e P_3 sono linearmente indipendenti.

Si tratta di determinare se esistono tre reali a, b e c, non tutti nulli, tali che

$$aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0 \ ,$$

cioè di risolvere il sistema

$$\begin{cases} -a - 2b + 4c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ -2a + 3b - 13c = 0 \end{cases}$$

È immediato verificare che il sistema ha più di una soluzione, sia risolvendolo per esteso, sia calcolando la caratteristica della matrice dei coefficienti (la quale è 2) per cui i tre vettori sono linearmente dipendenti.

c) Qual è la dimensione del sottospazio W generato dai polinomi P_1, P_2 e P_3?

La risposta a questa domanda è sostanzialmente una conseguenza della domanda precedente.

Infatti il vettori P_1 non è il vettore nullo per cui lo spazio W ha dimensione almeno 1.

Il vettore P_2 non è proporzionale al vettore P_1 per cui i vettori P_1 e P_2 sono linearmente indipendenti e quindi W ha dimensione almeno 2.

D'altra parte abbiamo visto che i tre vettori P_1, P_2 e P_3 sono linearmente dipendenti, per cui W ha dimensione minore di 3.

Quindi $\dim W = 2$. Inoltre $\{P_1, P_2\}$ è una base di W perché sono due vettori linearmente indipendenti in un sottospazio (W) di dimensione 2. (Nota: non formano invece una base di V perché una base di V ha per forza tre elementi).

d) Qual è la dimensione del sottospazio X generato dai polinomi P_1, P_2, P_3 e P_4? (Questa domanda non richiede praticamente nessun calcolo se è fatta bene).

Abbiamo $W \subseteq X \subseteq V$ per cui X può avere dimensione soltanto 2 e 3 e inoltre ha dimensione 2 se e solo se P_4 sta in V, ovvero se P_4 è combinazione lineare di P_1 e P_2. A questa domanda è facile rispondere perché il coefficiente di x^2 di P_4 è zero, per cui se P_4 è combinazione lineare di P_1 e P_2 è un multiplo di $-2P_1 + P_2$. Calcoliamo quindi

$$-2P_1 + P_2 = -x + 7$$

ed è ovvio che P_4 ne è multiplo (anzi, vi è uguale). Per cui X ha dimensione 2.

Esercizio 3. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3t = -3 \\ 22x + 13y + 23z - 8t = 19 \\ 6x + 12y - 10z - 23t = -28 \\ 15x - y + 33z + 18t = 50 \end{cases}$$

L'unica difficoltà del sistema risiede nel fatto che è grande. Denotiamo A la matrice dei coefficienti e $\underline{b}$ il vettore dei termini noti, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 22 & 13 & 23 & -8 \\ 6 & 12 & -10 & -23 \\ 15 & -1 & 33 & 18 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 19 \\ -28 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la caratteristica (cioè il rango) della matrice A usando il metodo di Kronecker.
La sottomatrice 1×1 in alto a sinistra ha determinante $1 \neq 0$.
La sottomatrice 2×2 costituita dalle prima e terza righe e prima e terza colonne ha determinante $-10 \neq 0$.
La sottomatrice 3×3 costituita dalle tre prime righe e tre prime colonne ha determinante $310 \neq 0$.
La matrice A ha determinante 0 per cui ha caratteristica (o rango) 3 (in questo caso non serve il teorema di Kronecker, capire perché).
La matrice completa $(A \mid \underline{b})$ ha caratteristica (o rango) anche lei uguale a 3 perché il determinante della sottomatrice costituita dalle tre prime e dall'ultima colonna è nullo.
Per il teorema di Rouché–Capelli il sistema ammette soluzioni e queste formano una retta.
L'insieme delle soluzioni è dato da

$$\mathcal{S} = \{(1, 1 - 3z, z, 2 - 2z) \mid z \in \mathbb{R}\} .$$

(Come al solito si consiglia l'uso del metodo di Gauss, usando la prima riga per cancellare la x dalle altre equazioni, e proseguendo analogamente per eliminare la y o la t da due ulteriori equazioni.) **Non dimenticare di inserire (in brutta) le soluzioni nelle equazioni di partenza per verificare che le soluzioni trovate sono corrette.**

Esercizio 4. Si consideri la conica

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 44x + 20y + 92 = 0 \ .$$

a) Si determini (se esiste) il centro della conica.

L'esistenza del centro e le sue coordinate si possono facilmente dedurre dalle risposte alle domande successive. In alternativa, possiamo considerare il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{c} = \underline{0} \ ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} , \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -22 \\ 10 \end{pmatrix} .$$

Si trova che le coordinate del centro sono $x_C = 5$ e $y_C = 1$.

b) Si trovi la forma canonica della conica e la si riconosca.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $-6xy$, ossia diagonalizzare la matrice B. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \qquad \underline{u}_2 = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$2(x')^2 + 8(y')^2 - 12\sqrt{2}\, x' + 32\sqrt{2}\, y' + 92 = 0 \ .$$

(Si ricorda che basta trasformare il binomio $-44x + 20y$, poiché sappiamo che i termini di secondo grado diventano $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$, mentre il termine noto rimane ovviamente invariato).

A questo punto, la traslazione

$$\begin{cases} x' = X + 3\sqrt{2} \\ y' = Y - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1 \ .$$

Si tratta quindi di un'ellisse.

c) Disegnare la conica nel piano xy.

Basta mettere assieme le informazioni già raccolte:

- il centro ha coordinate $(5; 1)$;
- gli assi X e Y (ossia, gli assi della conica) si ottengono ruotando di $\frac{\pi}{4}$ in senso positivo (antiorario) gli assi x e y;
- le lunghezze dei semiassi sono 2 e 1.

Il disegno dell'ellisse si ottiene facilmente.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
2 settembre 2013 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Consideriamo l'equazione

(E) $$(-5-i)z+(-5+i)\bar{z}+4=0\ .$$

a) Risolvere l'equazione (**??**).

Possiamo passare in coordinate cartesiane, ponendo $z = x + iy$ con x e $y \in \mathbb{R}$. L'equazione diventa (dopo divisione per 2)

$$-5x+y+2=0\ .$$

Si riconosce l'equazione di una retta. Otteniamo

$$y=5x-2\ ,$$

cioè

$$z=x+(5x-2)i=x(1+5i)-2i$$

con $x \in \mathbb{R}$.

b) Dare due soluzioni esplicite e distinte dell'equazione (**??**).

Basta scegliere due valori diversi di x di cui sopra, per esempio $x = 0$ e $x = 1$. Troviamo

$$z_0=(0,-2)\ ,\quad z_1=(1,3)\ .$$

c) Disporre le soluzioni dell'equazione (**??**) nel piano di Gauss.

Come osservato prima si tratta della retta passante per z_0 e z_1.

Esercizio 2. Consideriamo, nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi di grado al massimo due, i quattro polinomi

$$P_1 = x^2 + x + 1 \qquad P_2 = 2x^2 + x + 1$$
$$P_3 = -4x^2 - x - 1 \qquad P_4 = x + 1$$

a) Dire se i quattro polinomi P_1, P_2, P_3 e P_4 sono linearmente indipendenti.

No, non sono linearmente indipendenti perché sono 4 vettori in uno spazio (lo spazio V) di dimensione 3. Era anche possibile usare la risposta della domanda successiva, ovvero che i tre primi non sono linearmente indipendenti, però è del tutto inutile.

b) Dire se i tre polinomi P_1, P_2 e P_3 sono linearmente indipendenti.

Si tratta di determinare se esistono tre reali a, b e c, non tutti nulli, tali che

$$aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0 \ ,$$

cioè di risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + 2b - 4c = 0 \\ a \ \ + b \ \ - c = 0 \\ a \ \ + b \ \ - c = 0 \end{cases}$$

È immediato verificare che il sistema ha più di una soluzione, sia risolvendolo per esteso, sia calcolando la caratteristica della matrice dei coefficienti (la quale è 2) per cui i tre vettori sono linearmente dipendenti.

c) Qual è la dimensione del sottospazio W generato dai polinomi P_1, P_2 e P_3?

La risposta a questa domanda è sostanzialmente una conseguenza della domanda precedente.

Infatti il vettori P_1 non è il vettore nullo per cui lo spazio W ha dimensione almeno 1.

Il vettore P_2 non è proporzionale al vettore P_1 per cui i vettori P_1 e P_2 sono linearmente indipendenti e quindi W ha dimensione almeno 2.

D'altra parte abbiamo visto che i tre vettori P_1, P_2 e P_3 sono linearmente dipendenti, per cui W ha dimensione minore di 3.

Quindi $\dim W = 2$. Inoltre $\{P_1, P_2\}$ è una base di W perché sono due vettori linearmente indipendenti in un sottospazio (W) di dimensione 2. (Nota: non formano invece una base di V perché una base di V ha per forza tre elementi).

d) Qual è la dimensione del sottospazio X generato dai polinomi P_1, P_2, P_3 e P_4? (Questa domanda non richiede praticamente nessun calcolo se è fatta bene).

Abbiamo $W \subseteq X \subseteq V$ per cui X può avere dimensione soltanto 2 e 3 e inoltre ha dimensione 2 se e solo se P_4 sta in V, ovvero se P_4 è combinazione lineare di P_1 e P_2.

A questa domanda è facile rispondere perché il coefficiente di x^2 di P_4 è zero, per cui se P_4 è combinazione lineare di P_1 e P_2 è un multiplo di $2P_1 - P_2$. Calcoliamo quindi

$$2P_1 - P_2 = x + 1$$

ed è ovvio che P_4 ne è multiplo (anzi, vi è uguale). Per cui X ha dimensione 2.

Esercizio 3. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3t = -3 \\ 20x + 9y + 23z - 2t = 25 \\ 4x + 8y - 10z - 17t = -22 \\ 11x - 9y + 33z + 30t = 62 \end{cases}$$

L'unica difficoltà del sistema risiede nel fatto che è grande. Denotiamo A la matrice dei coefficienti e $\underline{b}$ il vettore dei termini noti, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 20 & 9 & 23 & -2 \\ 4 & 8 & -10 & -17 \\ 11 & -9 & 33 & 30 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 25 \\ -22 \\ 62 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la caratteristica (cioè il rango) della matrice A usando il metodo di Kronecker.
La sottomatrice 1×1 in alto a sinistra ha determinante $1 \neq 0$.
La sottomatrice 2×2 costituita dalle prima e terza righe e prima e terza colonne ha determinante $-10 \neq 0$.
La sottomatrice 3×3 costituita dalle tre prime righe e tre prime colonne ha determinante $310 \neq 0$.
La matrice A ha determinante 0 per cui ha caratteristica (o rango) 3 (in questo caso non serve il teorema di Kronecker, capire perché).
La matrice completa $(A \mid \underline{b})$ ha caratteristica (o rango) anche lei uguale a 3 perché il determinante della sottomatrice costituita dalle tre prime e dall'ultima colonna è nullo.
Per il teorema di Rouché–Capelli il sistema ammette soluzioni e queste formano una retta.
L'insieme delle soluzioni è dato da

$$\mathcal{S} = \{(1, 1 - 3z, z, 2 - 2z) \mid z \in \mathbb{R}\} .$$

(Come al solito si consiglia l'uso del metodo di Gauss, usando la prima riga per cancellare la x dalle altre equazioni, e proseguendo analogamente per eliminare la y o la t da due ulteriori equazioni.) **Non dimenticare di inserire (in brutta) le soluzioni nelle equazioni di partenza per verificare che le soluzioni trovate sono corrette.**

Esercizio 4. Si consideri la conica

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 34x + 14y + 53 = 0 .$$

a) Si determini (se esiste) il centro della conica.

L'esistenza del centro e le sue coordinate si possono facilmente dedurre dalle risposte alle domande successive. In alternativa, possiamo considerare il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{c} = \underline{0} \ ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -17 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Si trova che le coordinate del centro sono $x_C = 4$ e $y_C = 1$.

b) Si trovi la forma canonica della conica e la si riconosca.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $-6xy$, ossia diagonalizzare la matrice B. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \qquad \underline{u}_2 = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$2(x')^2 + 8(y')^2 - 10\sqrt{2}\, x' + 24\sqrt{2}\, y' + 53 = 0 \ .$$

(Si ricorda che basta trasformare il binomio $-34x + 14y$, poiché sappiamo che i termini di secondo grado diventano $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$, mentre il termine noto rimane ovviamente invariato).

A questo punto, la traslazione

$$\begin{cases} x' = X + \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ y' = Y - \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1 \ .$$

Si tratta quindi di un'ellisse.

c) Disegnare la conica nel piano xy.

Basta mettere assieme le informazioni già raccolte:

- il centro ha coordinate $(4; 1)$;
- gli assi X e Y (ossia, gli assi della conica) si ottengono ruotando di $\frac{\pi}{4}$ in senso positivo (antiorario) gli assi x e y;
- le lunghezze dei semiassi sono 2 e 1.

Il disegno dell'ellisse si ottiene facilmente.