Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
2 settembre 2013 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^5$

$$S_k = \{(x; y; z; t; u) \in \mathbb{R}^5 \mid -2x - 2y + 3t + 2ku = k + 2\}.$$

a) Dimostrare che S_k è un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ se e solo se $k = -2$.

È immediato verificare che il vettore nullo appartiene a S_k se e solo se $k = -2$. Ciò dimostra che per $k \neq -2$ i sottoinsiemi S_k non sono sottospazi. Se invece $k = -2$, abbiamo che

$$\begin{aligned} S_{-2} &= \{(x; y; z; t; u) \in \mathbb{R}^5 \mid y = \tfrac{1}{2}(-2x + 3t - 4u)\} \\ &= \{(x; -x + \tfrac{3}{2}t - 2u; z; t; u) \mid x, z, t, u \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1; -1; 0; 0; 0) + z(0; 0; 1; 0; 0) + t(0; \tfrac{3}{2}; 0; 1; 0) + u(0; -2; 0; 0; 1) | x, z, t, u \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

cosicché S_{-2} risulta essere il sottospazio generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = (1; -1; 0; 0; 0), \quad \underline{v}_2 = (0; 0; 1; 0; 0), \quad \underline{v}_3 = (0; \tfrac{3}{2}; 0; 1; 0), \quad \underline{v}_4 = (0; -2; 0; 0; 1).$$

Ciò dimostra che S_{-2} è un sottospazio.

b) Trovare una base di S_{-2}.

Abbiamo appena visto che i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ e $\underline{v}_4$ generano S_{-2}. Essi sono inoltre linearmente indipendenti (è facile estrarre, dalla matrice da essi formata, una sottomatrice quadrata di ordine 4 con il determinante non nullo). Quindi i quattro vettori costituiscono una base di S_{-2}.

c) Esibire un sottospazio V di dimensione 2 contenuto in S_{-2}.

Basta prendere il sottospazio generato da due vettori della base. Per esempio,

$$\begin{aligned} V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle &= \{x(1; -1; 0; 0; 0) + z(0; 0; 1; 0; 0) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x; -x; z; 0; 0) \mid x, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3t = -3 \\ 21x + 11y + 23z - 5t = 22 \\ 6x + 12y - 10z - 23t = -28 \\ 13x - 5y + 33z + 24t = 56 \end{cases}$$

L'unica difficoltà del sistema risiede nel fatto che è grande. Denotiamo A la matrice dei coefficienti e $\underline{b}$ il vettore dei termini noti, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 21 & 11 & 23 & -5 \\ 6 & 12 & -10 & -23 \\ 13 & -5 & 33 & 24 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 22 \\ -28 \\ 56 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la caratteristica (cioè il rango) della matrice A usando il metodo di Kronecker.
La sottomatrice 1×1 in alto a sinistra ha determinante $1 \neq 0$.
La sottomatrice 2×2 costituita dalle prima e terza righe e prima e terza colonne ha determinante $-10 \neq 0$.
La sottomatrice 3×3 costituita dalle tre prime righe e tre prime colonne ha determinante $310 \neq 0$.
La matrice A ha determinante 0 per cui ha caratteristica (o rango) 3 (in questo caso non serve il teorema di Kronecker, capire perché).
La matrice completa $(A \mid \underline{b})$ ha caratteristica (o rango) anche lei uguale a 3 perché il determinante della sottomatrice costituita dalle tre prime e dall'ultima colonna è nullo.
Per il teorema di Rouché–Capelli il sistema ammette soluzioni e queste formano una retta.
L'insieme delle soluzioni è dato da

$$\mathcal{S} = \{(1, 1 - 3z, z, 2 - 2z) \mid z \in \mathbb{R}\} \ .$$

(Come al solito si consiglia l'uso del metodo di Gauss, usando la prima riga per cancellare la x dalle altre equazioni, e proseguendo analogamente per eliminare la y o la t da due ulteriori equazioni.) **Non dimenticare di inserire (in brutta) le soluzioni nelle equazioni di partenza per verificare che le soluzioni trovate sono corrette.**

Esercizio 3. Si consideri la conica

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 24x + 8y + 24 = 0 \ .$$

a) Si determini (se esiste) il centro della conica.

L'esistenza del centro e le sue coordinate si possono facilmente dedurre dalle risposte alle domande successive. In alternativa, possiamo considerare il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{c} = \underline{0} \ ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Si trova che le coordinate del centro sono $x_C = 3$ e $y_C = 1$.

b) Si trovi la forma canonica della conica e la si riconosca.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $-6xy$, ossia diagonalizzare la matrice B. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$2(x')^2 + 8(y')^2 - 8\sqrt{2}\,x' + 16\sqrt{2}\,y' + 24 = 0 \; .$$

(Si ricorda che basta trasformare il binomio $-24x + 8y$, poiché sappiamo che i termini di secondo grado diventano $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$, mentre il termine noto rimane ovviamente invariato).

A questo punto, la traslazione

$$\begin{cases} x' = X + 2\sqrt{2} \\ y' = Y - \sqrt{2} \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1 \; .$$

Si tratta quindi di un'ellisse.

c) Disegnare la conica nel piano xy.

Basta mettere assieme le informazioni già raccolte:

- il centro ha coordinate $(3; 1)$;
- gli assi X e Y (ossia, gli assi della conica) si ottengono ruotando di $\frac{\pi}{4}$ in senso positivo (antiorario) gli assi x e y;
- le lunghezze dei semiassi sono 2 e 1.

Il disegno dell'ellisse si ottiene facilmente.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
2 settembre 2013 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^5$

$$S_k = \{(x; y; z; t; u) \in \mathbb{R}^5 \mid x - 2y + 3t + 2ku = k - 1\}.$$

a) Dimostrare che S_k è un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ se e solo se $k = 1$.

È immediato verificare che il vettore nullo appartiene a S_k se e solo se $k = 1$. Ciò dimostra che per $k \neq 1$ i sottoinsiemi S_k non sono sottospazi. Se invece $k = 1$, abbiamo che

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x; y; z; t; u) \in \mathbb{R}^5 \mid y = \tfrac{1}{2}(x + 3t + 2u)\} \\ &= \{(x; \tfrac{x}{2} + \tfrac{3}{2}t + u; z; t; u) \mid x, z, t, u \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1; \tfrac{1}{2}; 0; 0; 0) + z(0; 0; 1; 0; 0) + t(0; \tfrac{3}{2}; 0; 1; 0) + u(0; 1; 0; 0; 1) | x, z, t, u \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

cosicché S_1 risulta essere il sottospazio generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = (1; \tfrac{1}{2}; 0; 0; 0), \quad \underline{v}_2 = (0; 0; 1; 0; 0), \quad \underline{v}_3 = (0; \tfrac{3}{2}; 0; 1; 0), \quad \underline{v}_4 = (0; 1; 0; 0; 1).$$

Ciò dimostra che S_1 è un sottospazio.

b) Trovare una base di S_1.

Abbiamo appena visto che i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ e $\underline{v}_4$ generano S_1. Essi sono inoltre linearmente indipendenti (è facile estrarre, dalla matrice da essi formata, una sottomatrice quadrata di ordine 4 con il determinante non nullo). Quindi i quattro vettori costituiscono una base di S_1.

c) Esibire un sottospazio V di dimensione 2 contenuto in S_1.

Basta prendere il sottospazio generato da due vettori della base. Per esempio,

$$\begin{aligned} V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle &= \{x(1; \tfrac{1}{2}; 0; 0; 0) + z(0; 0; 1; 0; 0) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x; \tfrac{x}{2}; z; 0; 0) \mid x, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3t = -3 \\ 21x + 11y + 23z - 5t = 22 \\ 8x + 16y - 10z - 29t = -34 \\ 14x - 3y + 33z + 21t = 53 \end{cases}$$

L'unica difficoltà del sistema risiede nel fatto che è grande. Denotiamo A la matrice dei coefficienti e $\underline{b}$ il vettore dei termini noti, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 21 & 11 & 23 & -5 \\ 8 & 16 & -10 & -29 \\ 14 & -3 & 33 & 21 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 22 \\ -34 \\ 53 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la caratteristica (cioè il rango) della matrice A usando il metodo di Kronecker.
La sottomatrice 1×1 in alto a sinistra ha determinante $1 \neq 0$.
La sottomatrice 2×2 costituita dalle prima e terza righe e prima e terza colonne ha determinante $-10 \neq 0$.
La sottomatrice 3×3 costituita dalle tre prime righe e tre prime colonne ha determinante $310 \neq 0$.
La matrice A ha determinante 0 per cui ha caratteristica (o rango) 3 (in questo caso non serve il teorema di Kronecker, capire perché).
La matrice completa $(A \mid \underline{b})$ ha caratteristica (o rango) anche lei uguale a 3 perché il determinante della sottomatrice costituita dalle tre prime e dall'ultima colonna è nullo.
Per il teorema di Rouché–Capelli il sistema ammette soluzioni e queste formano una retta.
L'insieme delle soluzioni è dato da

$$\mathcal{S} = \{(1, 1-3z, z, 2-2z) \mid z \in \mathbb{R}\} .$$

(Come al solito si consiglia l'uso del metodo di Gauss, usando la prima riga per cancellare la x dalle altre equazioni, e proseguendo analogamente per eliminare la y o la t da due ulteriori equazioni.) **Non dimenticare di inserire (in brutta) le soluzioni nelle equazioni di partenza per verificare che le soluzioni trovate sono corrette.**

Esercizio 3. Si consideri la conica

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 14x + 2y + 5 = 0 .$$

a) Si determini (se esiste) il centro della conica.

   L'esistenza del centro e le sue coordinate si possono facilmente dedurre dalle risposte alle domande successive. In alternativa, possiamo considerare il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{c} = \underline{0} ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si trova che le coordinate del centro sono $x_C = 2$ e $y_C = 1$.

b) Si trovi la forma canonica della conica e la si riconosca.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $-6xy$, ossia diagonalizzare la matrice B. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$2(x')^2 + 8(y')^2 - 6\sqrt{2}\,x' + 8\sqrt{2}\,y' + 5 = 0 .$$

(Si ricorda che basta trasformare il binomio $-14x + 2y$, poiché sappiamo che i termini di secondo grado diventano $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$, mentre il termine noto rimane ovviamente invariato).

A questo punto, la traslazione

$$\begin{cases} x' = X + \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y' = Y - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1 .$$

Si tratta quindi di un'ellisse.

c) Disegnare la conica nel piano xy.

Basta mettere assieme le informazioni già raccolte:

- il centro ha coordinate $(2; 1)$;
- gli assi X e Y (ossia, gli assi della conica) si ottengono ruotando di $\frac{\pi}{4}$ in senso positivo (antiorario) gli assi x e y;
- le lunghezze dei semiassi sono 2 e 1.

Il disegno dell'ellisse si ottiene facilmente.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
2 settembre 2013 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^5$

$$S_k = \{(x; y; z; t; u) \in \mathbb{R}^5 \mid -x - 2y + 3t + 2ku = k + 1\}.$$

a) Dimostrare che S_k è un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ se e solo se $k = -1$.

È immediato verificare che il vettore nullo appartiene a S_k se e solo se $k = -1$. Ciò dimostra che per $k \neq -1$ i sottoinsiemi S_k non sono sottospazi. Se invece $k = -1$, abbiamo che

$$\begin{aligned} S_{-1} &= \{(x; y; z; t; u) \in \mathbb{R}^5 \mid y = \tfrac{1}{2}(-x + 3t - 2u)\} \\ &= \{(x; -\tfrac{x}{2} + \tfrac{3}{2}t - u; z; t; u) \mid x, z, t, u \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1; -\tfrac{1}{2}; 0; 0; 0) + z(0; 0; 1; 0; 0) + t(0; \tfrac{3}{2}; 0; 1; 0) + u(0; -1; 0; 0; 1) \mid x, z, t, u \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

cosicché S_{-1} risulta essere il sottospazio generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = (1; -\tfrac{1}{2}; 0; 0; 0), \quad \underline{v}_2 = (0; 0; 1; 0; 0), \quad \underline{v}_3 = (0; \tfrac{3}{2}; 0; 1; 0), \quad \underline{v}_4 = (0; -1; 0; 0; 1).$$

Ciò dimostra che S_{-1} è un sottospazio.

b) Trovare una base di S_{-1}.

Abbiamo appena visto che i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ e $\underline{v}_4$ generano S_{-1}. Essi sono inoltre linearmente indipendenti (è facile estrarre, dalla matrice da essi formata, una sottomatrice quadrata di ordine 4 con il determinante non nullo). Quindi i quattro vettori costituiscono una base di S_{-1}.

c) Esibire un sottospazio V di dimensione 2 contenuto in S_{-1}.

Basta prendere il sottospazio generato da due vettori della base. Per esempio,

$$\begin{aligned} V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle &= \{x(1; -\tfrac{1}{2}; 0; 0; 0) + z(0; 0; 1; 0; 0) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x; -\tfrac{x}{2}; z; 0; 0) \mid x, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3t = -3 \\ 22x + 13y + 23z - 8t = 19 \\ 6x + 12y - 10z - 23t = -28 \\ 15x - y + 33z + 18t = 50 \end{cases}$$

L'unica difficoltà del sistema risiede nel fatto che è grande. Denotiamo A la matrice dei coefficienti e $\underline{b}$ il vettore dei termini noti, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 22 & 13 & 23 & -8 \\ 6 & 12 & -10 & -23 \\ 15 & -1 & 33 & 18 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 19 \\ -28 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la caratteristica (cioè il rango) della matrice A usando il metodo di Kronecker.
La sottomatrice 1×1 in alto a sinistra ha determinante $1 \neq 0$.
La sottomatrice 2×2 costituita dalle prima e terza righe e prima e terza colonne ha determinante $-10 \neq 0$.
La sottomatrice 3×3 costituita dalle tre prime righe e tre prime colonne ha determinante $310 \neq 0$.
La matrice A ha determinante 0 per cui ha caratteristica (o rango) 3 (in questo caso non serve il teorema di Kronecker, capire perché).
La matrice completa $(A \mid \underline{b})$ ha caratteristica (o rango) anche lei uguale a 3 perché il determinante della sottomatrice costituita dalle tre prime e dall'ultima colonna è nullo.
Per il teorema di Rouché–Capelli il sistema ammette soluzioni e queste formano una retta.
L'insieme delle soluzioni è dato da

$$\mathcal{S} = \{(1, 1 - 3z, z, 2 - 2z) \mid z \in \mathbb{R}\} .$$

(Come al solito si consiglia l'uso del metodo di Gauss, usando la prima riga per cancellare la x dalle altre equazioni, e proseguendo analogamente per eliminare la y o la t da due ulteriori equazioni.) **Non dimenticare di inserire (in brutta) le soluzioni nelle equazioni di partenza per verificare che le soluzioni trovate sono corrette.**

Esercizio 3. Si consideri la conica

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 44x + 20y + 92 = 0 .$$

a) Si determini (se esiste) il centro della conica.

   L'esistenza del centro e le sue coordinate si possono facilmente dedurre dalle risposte alle domande successive. In alternativa, possiamo considerare il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{c} = \underline{0} ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -22 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Si trova che le coordinate del centro sono $x_C = 5$ e $y_C = 1$.

b) Si trovi la forma canonica della conica e la si riconosca.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $-6xy$, ossia diagonalizzare la matrice B. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$2(x')^2 + 8(y')^2 - 12\sqrt{2}\,x' + 32\sqrt{2}\,y' + 92 = 0 .$$

(Si ricorda che basta trasformare il binomio $-44x + 20y$, poiché sappiamo che i termini di secondo grado diventano $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$, mentre il termine noto rimane ovviamente invariato).

A questo punto, la traslazione

$$\begin{cases} x' = X + 3\sqrt{2} \\ y' = Y - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1 .$$

Si tratta quindi di un'ellisse.

c) Disegnare la conica nel piano xy.

Basta mettere assieme le informazioni già raccolte:

- il centro ha coordinate $(5; 1)$;
- gli assi X e Y (ossia, gli assi della conica) si ottengono ruotando di $\frac{\pi}{4}$ in senso positivo (antiorario) gli assi x e y;
- le lunghezze dei semiassi sono 2 e 1.

Il disegno dell'ellisse si ottiene facilmente.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
2 settembre 2013 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^5$

$$S_k = \{(x; y; z; t; u) \in \mathbb{R}^5 \mid 2x - 2y + 3t + 2ku = k - 2\}.$$

a) Dimostrare che S_k è un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ se e solo se $k = 2$.

È immediato verificare che il vettore nullo appartiene a S_k se e solo se $k = 2$. Ciò dimostra che per $k \neq 2$ i sottoinsiemi S_k non sono sottospazi. Se invece $k = 2$, abbiamo che

$$\begin{aligned} S_2 &= \{(x; y; z; t; u) \in \mathbb{R}^5 \mid y = \tfrac{1}{2}(2x + 3t + 4u)\} \\ &= \{(x; x + \tfrac{3}{2}t + 2u; z; t; u) \mid x, z, t, u \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1; 1; 0; 0; 0) + z(0; 0; 1; 0; 0) + t(0; \tfrac{3}{2}; 0; 1; 0) + u(0; 2; 0; 0; 1) | x, z, t, u \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

cosicché S_2 risulta essere il sottospazio generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = (1; 1; 0; 0; 0), \quad \underline{v}_2 = (0; 0; 1; 0; 0), \quad \underline{v}_3 = (0; \tfrac{3}{2}; 0; 1; 0), \quad \underline{v}_4 = (0; 2; 0; 0; 1).$$

Ciò dimostra che S_2 è un sottospazio.

b) Trovare una base di S_2.

Abbiamo appena visto che i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ e $\underline{v}_4$ generano S_2. Essi sono inoltre linearmente indipendenti (è facile estrarre, dalla matrice da essi formata, una sottomatrice quadrata di ordine 4 con il determinante non nullo). Quindi i quattro vettori costituiscono una base di S_2.

c) Esibire un sottospazio V di dimensione 2 contenuto in S_2.

Basta prendere il sottospazio generato da due vettori della base. Per esempio,

$$\begin{aligned} V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle &= \{x(1; 1; 0; 0; 0) + z(0; 0; 1; 0; 0) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x; x; z; 0; 0) \mid x, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y \qquad\qquad - 3t = -3 \\ 20x + 9y + 23z - 2t = 25 \\ 4x + 8y - 10z - 17t = -22 \\ 11x - 9y + 33z + 30t = 62 \end{cases}$$

L'unica difficoltà del sistema risiede nel fatto che è grande. Denotiamo A la matrice dei coefficienti e $\underline{b}$ il vettore dei termini noti, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 20 & 9 & 23 & -2 \\ 4 & 8 & -10 & -17 \\ 11 & -9 & 33 & 30 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 25 \\ -22 \\ 62 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la caratteristica (cioè il rango) della matrice A usando il metodo di Kronecker.
La sottomatrice 1×1 in alto a sinistra ha determinante $1 \neq 0$.
La sottomatrice 2×2 costituita dalle prima e terza righe e prima e terza colonne ha determinante $-10 \neq 0$.
La sottomatrice 3×3 costituita dalle tre prime righe e tre prime colonne ha determinante $310 \neq 0$.
La matrice A ha determinante 0 per cui ha caratteristica (o rango) 3 (in questo caso non serve il teorema di Kronecker, capire perché).
La matrice completa $(A \mid \underline{b})$ ha caratteristica (o rango) anche lei uguale a 3 perché il determinante della sottomatrice costituita dalle tre prime e dall'ultima colonna è nullo.
Per il teorema di Rouché–Capelli il sistema ammette soluzioni e queste formano una retta.
L'insieme delle soluzioni è dato da

$$\mathcal{S} = \{(1, 1 - 3z, z, 2 - 2z) \mid z \in \mathbb{R}\} \ .$$

(Come al solito si consiglia l'uso del metodo di Gauss, usando la prima riga per cancellare la x dalle altre equazioni, e proseguendo analogamente per eliminare la y o la t da due ulteriori equazioni.) **Non dimenticare di inserire (in brutta) le soluzioni nelle equazioni di partenza per verificare che le soluzioni trovate sono corrette.**

Esercizio 3. Si consideri la conica

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 34x + 14y + 53 = 0 \ .$$

a) Si determini (se esiste) il centro della conica.

   L'esistenza del centro e le sue coordinate si possono facilmente dedurre dalle risposte alle domande successive. In alternativa, possiamo considerare il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{c} = \underline{0} \ ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -17 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Si trova che le coordinate del centro sono $x_C = 4$ e $y_C = 1$.

b) Si trovi la forma canonica della conica e la si riconosca.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $-6xy$, ossia diagonalizzare la matrice B. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad \underline{u}_2 = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$2(x')^2 + 8(y')^2 - 10\sqrt{2}\,x' + 24\sqrt{2}\,y' + 53 = 0 .$$

(Si ricorda che basta trasformare il binomio $-34x + 14y$, poiché sappiamo che i termini di secondo grado diventano $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$, mentre il termine noto rimane ovviamente invariato).

A questo punto, la traslazione

$$\begin{cases} x' = X + \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ y' = Y - \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1 .$$

Si tratta quindi di un'ellisse.

c) Disegnare la conica nel piano xy.

Basta mettere assieme le informazioni già raccolte:

- il centro ha coordinate $(4; 1)$;
- gli assi X e Y (ossia, gli assi della conica) si ottengono ruotando di $\frac{\pi}{4}$ in senso positivo (antiorario) gli assi x e y;
- le lunghezze dei semiassi sono 2 e 1.

Il disegno dell'ellisse si ottiene facilmente.