# Università degli Studi di Bergamo
# — Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
# 5 luglio 2013 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
**Non saranno accettate risposte non giustificate.**

---

## SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Si considerino i tre vettori dipendenti da un paramentro reale $k$:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2k \\ -2 \\ k+2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Determinare al variare di $k$ la dipendenza o l'indipendenza lineare di $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$.

Per calcolare l'indipendenza lineare dei tre vettori, visto che dipendono da un paramtro, il metodo più efficace è quello di determinare la caratteristica della matrice $M$ della seconda domanda.

b) Determinare al variare di $k$ la caratteristica della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2k & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 6 & k+2 & k \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Per semplificare il discorso il coefficiente alla $i$-esima riga e $j$-esima colonna sarà denotato $m_{i,j}$.

Usiamo il metodo di Kronecker. Vogliamo che il parametro $k$ compaia il più tardi possibile. Scegliamo quindi $m_{2,1} = -3 \neq 0$.

Per orlare questo coefficiente abbiamo tre scelte per la riga (prima, terza e quarta) e 2 per la colonna (seconda e terza). La quarta riga è proporzionale alla seconda quindi tutte le sottomatrici che coinvolgono queste due righe avranno determinante nullo. La sottomatrice $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,3} \end{pmatrix}$ ha determinante 0, quindi tutte le sottomatrici $2 \times 2$ che

orlano $m_{2,1}$ e non contengono $k$ hanno determinante 0. La matrice $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$ ha determinante $6k-6$ per cui per $k \neq 1$ essa ha determinante diverso da 0.

A questo punto è interessante capire che cosa succede nel caso $k=1$ e trattare poi il caso $k \neq 1$. Se $k=1$ allora

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Le tre colonne sono ovviamente non proporzionali e quindi la matrice ha caratteristica almeno 2. Per sapere se ha caratteristica 3 dovremmo a priori calcolare tutti i determinanti delle sottomatrici di ordine 3 ma abbiamo già osservato che possiamo eliminare la quarta riga. La sottomatrice $3 \times 3$ costituita dalle tre prima righe ha determinante 0 per cui $M$ non ha caratteristica 3 e quindi ha caratteristica 2.

Supponiamo ora che $k \neq 1$. Abbiamo due orlanti per la sottomatrice $2 \times 2$ considerata ma quella con la quarta riga ha determinante 0 quindi ci basta studiare quella costituita dalle 3 prime righe. Essa ha determinante

$$6k^2 - 18k + 12 = 6(k-1)(k-2)$$

Se $k \neq 1$ e $k \neq 2$ la matrice $M$ ha quindi caratteristica 3.

Abbiamo già studiato il caso $k=1$; ci rimane il caso $k=2$ in cui la matrice è

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

ed è ovviamente di caratteristica 2 (la prima colonna è proporzionale alla terza, la seconda no).

Quindi se $k=1$ o $k=2$ la matrice ha caratteristica 2 e i tre vettori sono linearmente dipendenti. Negli altri casi la matrice ha caratteristica 3 e i tre vettori sono linearmente indipendenti.

**Esercizio 2.** Si considerino i punti $A(1;-3;-1)$, $B(2;-6;-2)$, $C(5;-6;4)$ e $D(4;-3;5)$.

a) Si dimostri che i quattro punti sono complanari (ossia, appartengono ad uno stesso piano).

Basta considerare i vettori

$$\overrightarrow{AB} = (1;-3;-1), \quad \overrightarrow{AC} = (4;-3;5), \quad \overrightarrow{AD} = (3;0;6)$$

e verificare che il determinante della matrice da essi formato si annulla.

b) Si scriva l'equazione del piano $\pi$ contenente i quattro punti.

Tale piano coincide ovviamente con quello contenente $A$, $B$ e $C$, la cui equazione è data da

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z+1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia $2x + y - z = 0$.

c) Il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogrammo? È un rettangolo?

È un parallelogrammo, poiché $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Non è un rettangolo, poiché $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$.

d) Determinare l'intersezione $G$ delle diagonali del quadrilatero $ABCD$.

In un parallelogrammo le diagonali si intersecano nel loro punto medio. Quindi le coordinate del punto cercato sono

$$x_G = \tfrac{1}{2}(x_A + x_C) = 3, \quad y_G = \tfrac{1}{2}(y_A + y_C) = -\tfrac{9}{2}, \quad z_G = \tfrac{1}{2}(z_A + z_C) = \tfrac{3}{2},$$

cosicché $G(3; -\frac{9}{2}; \frac{3}{2})$.

**Esercizio 3.** Si ricorda che $V = \mathbb{R}_3[x]$ è lo spazio dei polinomi di grado al massimo 3. Si consideri l'applicazione da $V$ in $V$ definita da

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow \quad V \\ P &\longmapsto \quad f(P) = (2x+3)P'(x) + P(x) \end{aligned}$$

a) Dimostrare che $f$ è lineare.

b) Date le basi $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$, calcolare la matrice di $f$ usando $\mathcal{B}_1$ nello spazio di partenza e $\mathcal{B}_2$ nello spazio di arrivo.

**Esercizio 4.** Rappresentare nel piano di Gauss i seguenti due insiemi di numeri complessi, precisando quali punti del bordo appartengono all'insieme. Fare il grafico con cura e di dimensioni almeno 10cm $\times$ 10cm.

a) $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z + 1 - 2i| < 3, \frac{\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant \frac{3\pi}{4}\}$.

b) $A_2 = \{1 + e^{-\frac{i\pi}{2}} z : z \in A_1\}$

**Università degli Studi di Bergamo**
**— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —**
**5 luglio 2013 — Tema B**

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
**Non saranno accettate risposte non giustificate.**

---

## SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Si considerino i tre vettori dipendenti da un paramentro reale $k$:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2k \\ 2 \\ k-3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Determinare al variare di $k$ la dipendenza o l'indipendenza lineare di $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$.

Per calcolare l'indipendenza lineare dei tre vettori, visto che dipendono da un paramtro, il metodo più efficace è quello di determinare la caratteristica della matrice $M$ della seconda domanda.

b) Determinare al variare di $k$ la caratteristica della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2k & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -9 & k-3 & k \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Per semplificare il discorso il coefficiente alla $i$-esima riga e $j$-esima colonna sarà denotato $m_{i,j}$.

Usiamo il metodo di Kronecker. Vogliamo che il parametro $k$ compaia il più tardi possibile. Scegliamo quindi $m_{2,1} = 3 \neq 0$.

Per orlare questo coefficiente abbiamo tre scelte per la riga (prima, terza e quarta) e 2 per la colonna (seconda e terza). La quarta riga è proporzionale alla seconda quindi tutte le sottomatrici che coinvolgono queste due righe avranno determinante nullo. La sottomatrice $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,3} \end{pmatrix}$ ha determinante 0, quindi tutte le sottomatrici $2 \times 2$ che

orlano $m_{2,1}$ e non contengono $k$ hanno determinante 0. La matrice $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$ ha determinante $-6k+6$ per cui per $k \neq 1$ essa ha determinante diverso da 0.

A questo punto è interessante capire che cosa succede nel caso $k=1$ e trattare poi il caso $k \neq 1$. Se $k=1$ allora

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -9 & -2 & 1 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Le tre colonne sono ovviamente non proporzionali e quindi la matrice ha caratteristica almeno 2. Per sapere se ha caratteristica 3 dovremmo a priori calcolare tutti i determinanti delle sottomatrici di ordine 3 ma abbiamo già osservato che possiamo eliminare la quarta riga. La sottomatrice $3 \times 3$ costituita dalle tre prima righe ha determinante 0 per cui $M$ non ha caratteristica 3 e quindi ha caratteristica 2.

Supponiamo ora che $k \neq 1$. Abbiamo due orlanti per la sottomatrice $2 \times 2$ considerata ma quella con la quarta riga ha determinante 0 quindi ci basta studiare quella costituita dalle 3 prime righe. Essa ha determinante

$$-6k^2 - 12k + 18 = -6(k-1)(k+3)$$

Se $k \neq 1$ e $k \neq -3$ la matrice $M$ ha quindi caratteristica 3.

Abbiamo già studiato il caso $k=1$; ci rimane il caso $k=-3$ in cui la matrice è

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -9 & -6 & -3 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

ed è ovviamente di caratteristica 2 (la prima colonna è proporzionale alla terza, la seconda no).

Quindi se $k=1$ o $k=-3$ la matrice ha caratteristica 2 e i tre vettori sono linearmente dipendenti. Negli altri casi la matrice ha caratteristica 3 e i tre vettori sono linearmente indipendenti.

**Esercizio 2.** Si considerino i punti $A(1;-3;-1)$, $B(2;-6;-2)$, $C(3;-6;0)$ e $D(2;-3;1)$.

a) Si dimostri che i quattro punti sono complanari (ossia, appartengono ad uno stesso piano).

Basta considerare i vettori

$$\overrightarrow{AB} = (1;-3;-1), \quad \overrightarrow{AC} = (2;-3;1), \quad \overrightarrow{AD} = (1;0;2)$$

e verificare che il determinante della matrice da essi formato si annulla.

b) Si scriva l'equazione del piano $\pi$ contenente i quattro punti.

Tale piano coincide ovviamente con quello contenente $A$, $B$ e $C$, la cui equazione è data da

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z+1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia $2x + y - z = 0$.

c) Il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogrammo? È un rettangolo?

È un parallelogrammo, poiché $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Non è un rettangolo, poiché $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$.

d) Determinare l'intersezione $G$ delle diagonali del quadrilatero $ABCD$.

In un parallelogrammo le diagonali si intersecano nel loro punto medio. Quindi le coordinate del punto cercato sono

$$x_G = \tfrac{1}{2}(x_A + x_C) = 2, \quad y_G = \tfrac{1}{2}(y_A + y_C) = -\tfrac{9}{2}, \quad z_G = \tfrac{1}{2}(z_A + z_C) = \tfrac{-1}{2},$$

cosicché $G(2; -\frac{9}{2}; \frac{-1}{2})$.

**Esercizio 3.** Si ricorda che $V = \mathbb{R}_3[x]$ è lo spazio dei polinomi di grado al massimo 3. Si consideri l'applicazione da $V$ in $V$ definita da

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow \quad V \\ P &\longmapsto \quad f(P) = (4x+3)P'(x) + P(x) \end{aligned}$$

a) Dimostrare che $f$ è lineare.

b) Date le basi $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$, calcolare la matrice di $f$ usando $\mathcal{B}_1$ nello spazio di partenza e $\mathcal{B}_2$ nello spazio di arrivo.

**Esercizio 4.** Rappresentare nel piano di Gauss i seguenti due insiemi di numeri complessi, precisando quali punti del bordo appartengono all'insieme. Fare il grafico con cura e di dimensioni almeno 10cm $\times$ 10cm.

a) $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z - 2 + i| < 3, \frac{\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant \frac{3\pi}{4}\}$.

b) $A_2 = \{1 + e^{-\frac{i\pi}{2}} z : z \in A_1\}$

# Università degli Studi di Bergamo
# — Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
# 5 luglio 2013 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
**Non saranno accettate risposte non giustificate.**

---

## SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Si considerino i tre vettori dipendenti da un paramentro reale $k$:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2k \\ 2 \\ k+2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determinare al variare di $k$ la dipendenza o l'indipendenza lineare di $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$.

Per calcolare l'indipendenza lineare dei tre vettori, visto che dipendono da un paramtro, il metodo più efficace è quello di determinare la caratteristica della matrice $M$ della seconda domanda.

b) Determinare al variare di $k$ la caratteristica della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 2k & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & k+2 & k \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Per semplificare il discorso il coefficiente alla $i$-esima riga e $j$-esima colonna sarà denotato $m_{i,j}$.

Usiamo il metodo di Kronecker. Vogliamo che il parametro $k$ compaia il più tardi possibile. Scegliamo quindi $m_{2,1} = 3 \neq 0$.

Per orlare questo coefficiente abbiamo tre scelte per la riga (prima, terza e quarta) e 2 per la colonna (seconda e terza). La quarta riga è proporzionale alla seconda quindi tutte le sottomatrici che coinvolgono queste due righe avranno determinante nullo. La sottomatrice $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,3} \end{pmatrix}$ ha determinante 0, quindi tutte le sottomatrici $2 \times 2$ che

orlano $m_{2,1}$ e non contengono $k$ hanno determinante 0. La matrice $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$ ha determinante $-6k+18$ per cui per $k \neq 3$ essa ha determinante diverso da 0.

A questo punto è interessante capire che cosa succede nel caso $k=3$ e trattare poi il caso $k \neq 3$. Se $k=3$ allora

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Le tre colonne sono ovviamente non proporzionali e quindi la matrice ha caratteristica almeno 2. Per sapere se ha caratteristica 3 dovremmo a priori calcolare tutti i determinanti delle sottomatrici di ordine 3 ma abbiamo già osservato che possiamo eliminare la quarta riga. La sottomatrice $3 \times 3$ costituita dalle tre prima righe ha determinante 0 per cui $M$ non ha caratteristica 3 e quindi ha caratteristica 2.

Supponiamo ora che $k \neq 3$. Abbiamo due orlanti per la sottomatrice $2 \times 2$ considerata ma quella con la quarta riga ha determinante 0 quindi ci basta studiare quella costituita dalle 3 prime righe. Essa ha determinante

$$-6k^2 + 30k - 36 = -6(k-3)(k-2)$$

Se $k \neq 3$ e $k \neq 2$ la matrice $M$ ha quindi caratteristica 3.

Abbiamo già studiato il caso $k=3$; ci rimane il caso $k=2$ in cui la matrice è

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ed è ovviamente di caratteristica 2 (la prima colonna è proporzionale alla terza, la seconda no).

Quindi se $k=3$ o $k=2$ la matrice ha caratteristica 2 e i tre vettori sono linearmente dipendenti. Negli altri casi la matrice ha caratteristica 3 e i tre vettori sono linearmente indipendenti.

**Esercizio 2.** Si considerino i punti $A(1;-3;-1)$, $B(2;-6;-2)$, $C(6;-6;6)$ e $D(5;-3;7)$.

a) Si dimostri che i quattro punti sono complanari (ossia, appartengono ad uno stesso piano).

Basta considerare i vettori

$$\overrightarrow{AB} = (1;-3;-1), \quad \overrightarrow{AC} = (5;-3;7), \quad \overrightarrow{AD} = (4;0;8)$$

e verificare che il determinante della matrice da essi formato si annulla.

b) Si scriva l'equazione del piano $\pi$ contenente i quattro punti.

Tale piano coincide ovviamente con quello contenente $A$, $B$ e $C$, la cui equazione è data da

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z+1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia $2x + y - z = 0$.

c) Il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogrammo? È un rettangolo?

È un parallelogrammo, poiché $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Non è un rettangolo, poiché $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$.

d) Determinare l'intersezione $G$ delle diagonali del quadrilatero $ABCD$.

In un parallelogrammo le diagonali si intersecano nel loro punto medio. Quindi le coordinate del punto cercato sono

$$x_G = \tfrac{1}{2}(x_A + x_C) = \tfrac{7}{2}, \quad y_G = \tfrac{1}{2}(y_A + y_C) = -\tfrac{9}{2}, \quad z_G = \tfrac{1}{2}(z_A + z_C) = \tfrac{5}{2},$$

cosicché $G(\frac{7}{2}; -\frac{9}{2}; \frac{5}{2})$.

**Esercizio 3.** Si ricorda che $V = \mathbb{R}_3[x]$ è lo spazio dei polinomi di grado al massimo 3. Si consideri l'applicazione da $V$ in $V$ definita da

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow V \\ P &\longmapsto f(P) = (-2x+3)P'(x) + P(x) \end{aligned}$$

a) Dimostrare che $f$ è lineare.

b) Date le basi $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$, calcolare la matrice di $f$ usando $\mathcal{B}_1$ nello spazio di partenza e $\mathcal{B}_2$ nello spazio di arrivo.

**Esercizio 4.** Rappresentare nel piano di Gauss i seguenti due insiemi di numeri complessi, precisando quali punti del bordo appartengono all'insieme. Fare il grafico con cura e di dimensioni almeno 10cm $\times$ 10cm.

a) $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z - 1 + 2i| < 3, \frac{\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant \frac{3\pi}{4}\}$.

b) $A_2 = \{1 + e^{-\frac{i\pi}{2}} z : z \in A_1\}$

# Università degli Studi di Bergamo
# — Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
# 5 luglio 2013 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
**Non saranno accettate risposte non giustificate.**

---

## SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Si considerino i tre vettori dipendenti da un paramentro reale $k$:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2k \\ 6 \\ k+1 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ k \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Determinare al variare di $k$ la dipendenza o l'indipendenza lineare di $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$.

Per calcolare l'indipendenza lineare dei tre vettori, visto che dipendono da un paramtro, il metodo più efficace è quello di determinare la caratteristica della matrice $M$ della seconda domanda.

b) Determinare al variare di $k$ la caratteristica della matrice

$$M = \begin{pmatrix} -6 & 2k & -2 \\ 9 & 6 & 3 \\ 3 & k+1 & k \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Per semplificare il discorso il coefficiente alla $i$-esima riga e $j$-esima colonna sarà denotato $m_{i,j}$.

Usiamo il metodo di Kronecker. Vogliamo che il parametro $k$ compaia il più tardi possibile. Scegliamo quindi $m_{2,1} = 9 \neq 0$.

Per orlare questo coefficiente abbiamo tre scelte per la riga (prima, terza e quarta) e 2 per la colonna (seconda e terza). La quarta riga è proporzionale alla seconda quindi tutte le sottomatrici che coinvolgono queste due righe avranno determinante nullo. La sottomatrice $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,3} \end{pmatrix}$ ha determinante 0, quindi tutte le sottomatrici $2 \times 2$ che

orlano $m_{2,1}$ e non contengono $k$ hanno determinante 0. La matrice $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$ ha determinante $-18k - 36$ per cui per $k \neq -2$ essa ha determinante diverso da 0.

A questo punto è interessante capire che cosa succede nel caso $k = -2$ e trattare poi il caso $k \neq -2$. Se $k = -2$ allora

$$M = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Le tre colonne sono ovviamente non proporzionali e quindi la matrice ha caratteristica almeno 2. Per sapere se ha caratteristica 3 dovremmo a priori calcolare tutti i determinanti delle sottomatrici di ordine 3 ma abbiamo già osservato che possiamo eliminare la quarta riga. La sottomatrice $3 \times 3$ costituita dalle tre prima righe ha determinante 0 per cui $M$ non ha caratteristica 3 e quindi ha caratteristica 2.

Supponiamo ora che $k \neq -2$. Abbiamo due orlanti per la sottomatrice $2 \times 2$ considerata ma quella con la quarta riga ha determinante 0 quindi ci basta studiare quella costituita dalle 3 prime righe. Essa ha determinante

$$-18k^2 - 18k + 36 = -18(k + 2)(k - 1)$$

Se $k \neq -2$ e $k \neq 1$ la matrice $M$ ha quindi caratteristica 3.

Abbiamo già studiato il caso $k = -2$; ci rimane il caso $k = 1$ in cui la matrice è

$$M = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

ed è ovviamente di caratteristica 2 (la prima colonna è proporzionale alla terza, la seconda no).

Quindi se $k = -2$ o $k = 1$ la matrice ha caratteristica 2 e i tre vettori sono linearmente dipendenti. Negli altri casi la matrice ha caratteristica 3 e i tre vettori sono linearmente indipendenti.

**Esercizio 2.** Si considerino i punti $A(1; -3; -1)$, $B(2; -6; -2)$, $C(4; -6; 2)$ e $D(3; -3; 3)$.

a) Si dimostri che i quattro punti sono complanari (ossia, appartengono ad uno stesso piano).

Basta considerare i vettori

$$\overrightarrow{AB} = (1; -3; -1), \quad \overrightarrow{AC} = (3; -3; 3), \quad \overrightarrow{AD} = (2; 0; 4)$$

e verificare che il determinante della matrice da essi formato si annulla.

b) Si scriva l'equazione del piano $\pi$ contenente i quattro punti.

Tale piano coincide ovviamente con quello contenente $A$, $B$ e $C$, la cui equazione è data da

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z+1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia $2x + y - z = 0$.

c) Il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogrammo? È un rettangolo?

È un parallelogrammo, poiché $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Non è un rettangolo, poiché $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$.

d) Determinare l'intersezione $G$ delle diagonali del quadrilatero $ABCD$.

In un parallelogrammo le diagonali si intersecano nel loro punto medio. Quindi le coordinate del punto cercato sono

$$x_G = \tfrac{1}{2}(x_A + x_C) = \tfrac{5}{2}, \quad y_G = \tfrac{1}{2}(y_A + y_C) = -\tfrac{9}{2}, \quad z_G = \tfrac{1}{2}(z_A + z_C) = \tfrac{1}{2},$$

cosicché $G(\frac{5}{2}; -\frac{9}{2}; \frac{1}{2})$.

**Esercizio 3.** Si ricorda che $V = \mathbb{R}_3[x]$ è lo spazio dei polinomi di grado al massimo 3. Si consideri l'applicazione da $V$ in $V$ definita da

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow \quad V \\ P &\longmapsto \quad f(P) = (3x+3)P'(x) + P(x) \end{aligned}$$

a) Dimostrare che $f$ è lineare.

b) Date le basi $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$, calcolare la matrice di $f$ usando $\mathcal{B}_1$ nello spazio di partenza e $\mathcal{B}_2$ nello spazio di arrivo.

**Esercizio 4.** Rappresentare nel piano di Gauss i seguenti due insiemi di numeri complessi, precisando quali punti del bordo appartengono all'insieme. Fare il grafico con cura e di dimensioni almeno 10cm × 10cm.

a) $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z + 2 - i| < 3, \frac{\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant \frac{3\pi}{4}\}$.

b) $A_2 = \{1 + e^{-\frac{i\pi}{2}} z : z \in A_1\}$