Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
5 luglio 2013 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i tre vettori dipendenti da un paramentro reale k:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2k \\ -2 \\ k+2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Determinare al variare di k la dipendenza o l'indipendenza lineare di $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$.

Per calcolare l'indipendenza lineare dei tre vettori, visto che dipendono da un paramtro, il metodo più efficace è quello di determinare la caratteristica della matrice M della seconda domanda.

b) Determinare al variare di k la caratteristica della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2k & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 6 & k+2 & k \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Per semplificare il discorso il coefficiente alla i-esima riga e j-esima colonna sarà denotato $m_{i,j}$.

Usiamo il metodo di Kronecker. Vogliamo che il parametro k compaia il più tardi possibile. Scegliamo quindi $m_{2,1} = -3 \neq 0$.

Per orlare questo coefficiente abbiamo tre scelte per la riga (prima, terza e quarta) e 2 per la colonna (seconda e terza). La quarta riga è proporzionale alla seconda quindi tutte le sottomatrici che coinvolgono queste due righe avranno determinante nullo. La sottomatrice $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,3} \end{pmatrix}$ ha determinante 0, quindi tutte le sottomatrici 2×2 che

orlano $m_{2,1}$ e non contengono k hanno determinante 0. La matrice $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$ ha determinante $6k - 6$ per cui per $k \neq 1$ essa ha determinante diverso da 0.

A questo punto è interessante capire che cosa succede nel caso $k = 1$ e trattare poi il caso $k \neq 1$. Se $k = 1$ allora

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Le tre colonne sono ovviamente non proporzionali e quindi la matrice ha caratteristica almeno 2. Per sapere se ha caratteristica 3 dovremmo a priori calcolare tutti i determinanti delle sottomatrici di ordine 3 ma abbiamo già osservato che possiamo eliminare la quarta riga. La sottomatrice 3×3 costituita dalle tre prima righe ha determinante 0 per cui M non ha caratteristica 3 e quindi ha caratteristica 2.

Supponiamo ora che $k \neq 1$. Abbiamo due orlanti per la sottomatrice 2×2 considerata ma quella con la quarta riga ha determinante 0 quindi ci basta studiare quella costituita dalle 3 prime righe. Essa ha determinante

$$6k^2 - 18k + 12 = 6(k-1)(k-2)$$

Se $k \neq 1$ e $k \neq 2$ la matrice M ha quindi caratteristica 3.

Abbiamo già studiato il caso $k = 1$; ci rimane il caso $k = 2$ in cui la matrice è

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

ed è ovviamente di caratteristica 2 (la prima colonna è proporzionale alla terza, la seconda no).

Quindi se $k = 1$ o $k = 2$ la matrice ha caratteristica 2 e i tre vettori sono linearmente dipendenti. Negli altri casi la matrice ha caratteristica 3 e i tre vettori sono linearmente indipendenti.

Esercizio 2. Si considerino i punti $A(1; -3; -1)$, $B(2; -6; -2)$, $C(5; -6; 4)$ e $D(4; -3; 5)$.

a) Si dimostri che i quattro punti sono complanari (ossia, appartengono ad uno stesso piano).

Basta considerare i vettori

$$\overrightarrow{AB} = (1; -3; -1), \quad \overrightarrow{AC} = (4; -3; 5), \quad \overrightarrow{AD} = (3; 0; 6)$$

e verificare che il determinante della matrice da essi formato si annulla.

b) Si scriva l'equazione del piano π contenente i quattro punti.

Tale piano coincide ovviamente con quello contenente A, B e C, la cui equazione è data da

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z+1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia $2x + y - z = 0$.

c) Il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogrammo? È un rettangolo?

È un parallelogrammo, poiché $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Non è un rettangolo, poiché $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$.

d) Determinare l'intersezione G delle diagonali del quadrilatero $ABCD$.

In un parallelogrammo le diagonali si intersecano nel loro punto medio. Quindi le coordinate del punto cercato sono

$$x_G = \tfrac{1}{2}(x_A + x_C) = 3, \quad y_G = \tfrac{1}{2}(y_A + y_C) = -\tfrac{9}{2}, \quad z_G = \tfrac{1}{2}(z_A + z_C) = \tfrac{3}{2},$$

cosicché $G(3; -\frac{9}{2}; \frac{3}{2})$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k+2 & k+2 & 3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Per quale valore di k la matrice ha un autovalore uguale ad 1?

Basta imporre che il polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I)$ si annulli per $\lambda = 1$. Si trova che $k = -1$.

b) Determinare gli autovalori e gli autovettori della matrice A per $k = -1$.

In tal caso abbiamo che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e che il polinomio caratteristico è $(1 - \lambda)(4 - \lambda)^2$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ (come già sapevamo dalla prima domanda), semplice, e $\lambda_2 = 4$, doppio.

Gli autovettori relativi a λ_1 sono le soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{cases} y + 3z = 0 \\ 4x + 3y - 4z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$$

ossia i multipli non nulli del vettore $(13; -12; 4)_T$.

Gli autovettori relativi a λ_2 sono le soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{cases} -3x + y + 3z = 0 \\ 4x - 4z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ossia i multipli non nulli del vettore $(1; 0; 1)_T$.

c) Per $k = -1$ la matrice A è diagonalizzabile?

Dalla risposta precedente è ovvio che non esista una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di A; perciò la matrice non è diagonalizzabile. Detto in altre parole, l'autovalore λ_2 non è regolare.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
5 luglio 2013 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i tre vettori dipendenti da un paramentro reale k:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2k \\ 2 \\ k-3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Determinare al variare di k la dipendenza o l'indipendenza lineare di $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$.

Per calcolare l'indipendenza lineare dei tre vettori, visto che dipendono da un paramtro, il metodo più efficace è quello di determinare la caratteristica della matrice M della seconda domanda.

b) Determinare al variare di k la caratteristica della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2k & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -9 & k-3 & k \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Per semplificare il discorso il coefficiente alla i-esima riga e j-esima colonna sarà denotato $m_{i,j}$.

Usiamo il metodo di Kronecker. Vogliamo che il parametro k compaia il più tardi possibile. Scegliamo quindi $m_{2,1} = 3 \neq 0$.

Per orlare questo coefficiente abbiamo tre scelte per la riga (prima, terza e quarta) e 2 per la colonna (seconda e terza). La quarta riga è proporzionale alla seconda quindi tutte le sottomatrici che coinvolgono queste due righe avranno determinante nullo. La sottomatrice $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,3} \end{pmatrix}$ ha determinante 0, quindi tutte le sottomatrici 2×2 che

orlano $m_{2,1}$ e non contengono k hanno determinante 0. La matrice $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$ ha determinante $-6k+6$ per cui per $k \neq 1$ essa ha determinante diverso da 0.

A questo punto è interessante capire che cosa succede nel caso $k = 1$ e trattare poi il caso $k \neq 1$. Se $k = 1$ allora

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -9 & -2 & 1 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Le tre colonne sono ovviamente non proporzionali e quindi la matrice ha caratteristica almeno 2. Per sapere se ha caratteristica 3 dovremmo a priori calcolare tutti i determinanti delle sottomatrici di ordine 3 ma abbiamo già osservato che possiamo eliminare la quarta riga. La sottomatrice 3×3 costituita dalle tre prima righe ha determinante 0 per cui M non ha caratteristica 3 e quindi ha caratteristica 2.

Supponiamo ora che $k \neq 1$. Abbiamo due orlanti per la sottomatrice 2×2 considerata ma quella con la quarta riga ha determinante 0 quindi ci basta studiare quella costituita dalle 3 prime righe. Essa ha determinante

$$-6k^2 - 12k + 18 = -6(k-1)(k+3)$$

Se $k \neq 1$ e $k \neq -3$ la matrice M ha quindi caratteristica 3.

Abbiamo già studiato il caso $k = 1$; ci rimane il caso $k = -3$ in cui la matrice è

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -9 & -6 & -3 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

ed è ovviamente di caratteristica 2 (la prima colonna è proporzionale alla terza, la seconda no).

Quindi se $k = 1$ o $k = -3$ la matrice ha caratteristica 2 e i tre vettori sono linearmente dipendenti. Negli altri casi la matrice ha caratteristica 3 e i tre vettori sono linearmente indipendenti.

Esercizio 2. Si considerino i punti $A(1;-3;-1)$, $B(2;-6;-2)$, $C(3;-6;0)$ e $D(2;-3;1)$.

a) Si dimostri che i quattro punti sono complanari (ossia, appartengono ad uno stesso piano).

Basta considerare i vettori

$$\overrightarrow{AB} = (1;-3;-1), \quad \overrightarrow{AC} = (2;-3;1), \quad \overrightarrow{AD} = (1;0;2)$$

e verificare che il determinante della matrice da essi formato si annulla.

b) Si scriva l'equazione del piano π contenente i quattro punti.

Tale piano coincide ovviamente con quello contenente A, B e C, la cui equazione è data da

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z+1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia $2x + y - z = 0$.

c) Il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogrammo? È un rettangolo?

È un parallelogrammo, poiché $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Non è un rettangolo, poiché $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$.

d) Determinare l'intersezione G delle diagonali del quadrilatero $ABCD$.

In un parallelogrammo le diagonali si intersecano nel loro punto medio. Quindi le coordinate del punto cercato sono

$$x_G = \tfrac{1}{2}(x_A + x_C) = 2, \quad y_G = \tfrac{1}{2}(y_A + y_C) = -\tfrac{9}{2}, \quad z_G = \tfrac{1}{2}(z_A + z_C) = \tfrac{-1}{2},$$

cosicché $G(2; -\frac{9}{2}; \frac{-1}{2})$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & k-1 & 3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Per quale valore di k la matrice ha un autovalore uguale ad 1?

Basta imporre che il polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I)$ si annulli per $\lambda = 1$. Si trova che $k = 2$.

b) Determinare gli autovalori e gli autovettori della matrice A per $k = 2$.

In tal caso abbiamo che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e che il polinomio caratteristico è $(1-\lambda)(4-\lambda)^2$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ (come già sapevamo dalla prima domanda), semplice, e $\lambda_2 = 4$, doppio.

Gli autovettori relativi a λ_1 sono le soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{cases} y + 3z = 0 \\ 4x + 3y - 4z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$$

ossia i multipli non nulli del vettore $(13; -12; 4)_T$.

Gli autovettori relativi a λ_2 sono le soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{cases} -3x + y + 3z = 0 \\ 4x - 4z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ossia i multipli non nulli del vettore $(1; 0; 1)_T$.

c) Per $k = 2$ la matrice A è diagonalizzabile?

Dalla risposta precedente è ovvio che non esista una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di A; perciò la matrice non è diagonalizzabile. Detto in altre parole, l'autovalore λ_2 non è regolare.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
5 luglio 2013 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i tre vettori dipendenti da un paramentro reale k:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2k \\ 2 \\ k+2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determinare al variare di k la dipendenza o l'indipendenza lineare di $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$.

Per calcolare l'indipendenza lineare dei tre vettori, visto che dipendono da un paramtro, il metodo più efficace è quello di determinare la caratteristica della matrice M della seconda domanda.

b) Determinare al variare di k la caratteristica della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 2k & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & k+2 & k \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Per semplificare il discorso il coefficiente alla i-esima riga e j-esima colonna sarà denotato $m_{i,j}$.

Usiamo il metodo di Kronecker. Vogliamo che il parametro k compaia il più tardi possibile. Scegliamo quindi $m_{2,1} = 3 \neq 0$.

Per orlare questo coefficiente abbiamo tre scelte per la riga (prima, terza e quarta) e 2 per la colonna (seconda e terza). La quarta riga è proporzionale alla seconda quindi tutte le sottomatrici che coinvolgono queste due righe avranno determinante nullo. La sottomatrice $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,3} \end{pmatrix}$ ha determinante 0, quindi tutte le sottomatrici 2×2 che

orlano $m_{2,1}$ e non contengono k hanno determinante 0. La matrice $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$ ha determinante $-6k + 18$ per cui per $k \neq 3$ essa ha determinante diverso da 0.

A questo punto è interessante capire che cosa succede nel caso $k = 3$ e trattare poi il caso $k \neq 3$. Se $k = 3$ allora

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Le tre colonne sono ovviamente non proporzionali e quindi la matrice ha caratteristica almeno 2. Per sapere se ha caratteristica 3 dovremmo a priori calcolare tutti i determinanti delle sottomatrici di ordine 3 ma abbiamo già osservato che possiamo eliminare la quarta riga. La sottomatrice 3×3 costituita dalle tre prima righe ha determinante 0 per cui M non ha caratteristica 3 e quindi ha caratteristica 2.

Supponiamo ora che $k \neq 3$. Abbiamo due orlanti per la sottomatrice 2×2 considerata ma quella con la quarta riga ha determinante 0 quindi ci basta studiare quella costituita dalle 3 prime righe. Essa ha determinante

$$-6k^2 + 30k - 36 = -6(k-3)(k-2)$$

Se $k \neq 3$ e $k \neq 2$ la matrice M ha quindi caratteristica 3.

Abbiamo già studiato il caso $k = 3$; ci rimane il caso $k = 2$ in cui la matrice è

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ed è ovviamente di caratteristica 2 (la prima colonna è proporzionale alla terza, la seconda no).

Quindi se $k = 3$ o $k = 2$ la matrice ha caratteristica 2 e i tre vettori sono linearmente dipendenti. Negli altri casi la matrice ha caratteristica 3 e i tre vettori sono linearmente indipendenti.

Esercizio 2. Si considerino i punti $A(1; -3; -1)$, $B(2; -6; -2)$, $C(6; -6; 6)$ e $D(5; -3; 7)$.

a) Si dimostri che i quattro punti sono complanari (ossia, appartengono ad uno stesso piano).

Basta considerare i vettori

$$\overrightarrow{AB} = (1; -3; -1), \quad \overrightarrow{AC} = (5; -3; 7), \quad \overrightarrow{AD} = (4; 0; 8)$$

e verificare che il determinante della matrice da essi formato si annulla.

b) Si scriva l'equazione del piano π contenente i quattro punti.

Tale piano coincide ovviamente con quello contenente A, B e C, la cui equazione è data da

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z+1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia $2x + y - z = 0$.

c) Il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogrammo? È un rettangolo?

È un parallelogrammo, poiché $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Non è un rettangolo, poiché $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$.

d) Determinare l'intersezione G delle diagonali del quadrilatero $ABCD$.

In un parallelogrammo le diagonali si intersecano nel loro punto medio. Quindi le coordinate del punto cercato sono

$$x_G = \tfrac{1}{2}(x_A + x_C) = \tfrac{7}{2}, \quad y_G = \tfrac{1}{2}(y_A + y_C) = -\tfrac{9}{2}, \quad z_G = \tfrac{1}{2}(z_A + z_C) = \tfrac{5}{2},$$

cosicché $G(\frac{7}{2}; -\frac{9}{2}; \frac{5}{2})$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & k-2 & 3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Per quale valore di k la matrice ha un autovalore uguale ad 1?

Basta imporre che il polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I)$ si annulli per $\lambda = 1$. Si trova che $k = 3$.

b) Determinare gli autovalori e gli autovettori della matrice A per $k = 3$.

In tal caso abbiamo che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e che il polinomio caratteristico è $(1-\lambda)(4-\lambda)^2$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ (come già sapevamo dalla prima domanda), semplice, e $\lambda_2 = 4$, doppio.

Gli autovettori relativi a λ_1 sono le soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{cases} y + 3z = 0 \\ 4x + 3y - 4z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$$

ossia i multipli non nulli del vettore $(13; -12; 4)_T$.

Gli autovettori relativi a λ_2 sono le soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{cases} -3x + y + 3z = 0 \\ 4x - 4z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ossia i multipli non nulli del vettore $(1; 0; 1)_T$.

c) Per $k = 3$ la matrice A è diagonalizzabile?

Dalla risposta precedente è ovvio che non esista una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di A; perciò la matrice non è diagonalizzabile. Detto in altre parole, l'autovalore λ_2 non è regolare.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
5 luglio 2013 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i tre vettori dipendenti da un paramentro reale k:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2k \\ 6 \\ k+1 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ k \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Determinare al variare di k la dipendenza o l'indipendenza lineare di $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$.

Per calcolare l'indipendenza lineare dei tre vettori, visto che dipendono da un paramtro, il metodo più efficace è quello di determinare la caratteristica della matrice M della seconda domanda.

b) Determinare al variare di k la caratteristica della matrice

$$M = \begin{pmatrix} -6 & 2k & -2 \\ 9 & 6 & 3 \\ 3 & k+1 & k \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Per semplificare il discorso il coefficiente alla i-esima riga e j-esima colonna sarà denotato $m_{i,j}$.

Usiamo il metodo di Kronecker. Vogliamo che il parametro k compaia il più tardi possibile. Scegliamo quindi $m_{2,1} = 9 \neq 0$.

Per orlare questo coefficiente abbiamo tre scelte per la riga (prima, terza e quarta) e 2 per la colonna (seconda e terza). La quarta riga è proporzionale alla seconda quindi tutte le sottomatrici che coinvolgono queste due righe avranno determinante nullo. La sottomatrice $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,3} \end{pmatrix}$ ha determinante 0, quindi tutte le sottomatrici 2×2 che

orlano $m_{2,1}$ e non contengono k hanno determinante 0. La matrice $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$ ha determinante $-18k - 36$ per cui per $k \neq -2$ essa ha determinante diverso da 0.

A questo punto è interessante capire che cosa succede nel caso $k = -2$ e trattare poi il caso $k \neq -2$. Se $k = -2$ allora

$$M = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Le tre colonne sono ovviamente non proporzionali e quindi la matrice ha caratteristica almeno 2. Per sapere se ha caratteristica 3 dovremmo a priori calcolare tutti i determinanti delle sottomatrici di ordine 3 ma abbiamo già osservato che possiamo eliminare la quarta riga. La sottomatrice 3×3 costituita dalle tre prima righe ha determinante 0 per cui M non ha caratteristica 3 e quindi ha caratteristica 2.

Supponiamo ora che $k \neq -2$. Abbiamo due orlanti per la sottomatrice 2×2 considerata ma quella con la quarta riga ha determinante 0 quindi ci basta studiare quella costituita dalle 3 prime righe. Essa ha determinante

$$-18k^2 - 18k + 36 = -18(k + 2)(k - 1)$$

Se $k \neq -2$ e $k \neq 1$ la matrice M ha quindi caratteristica 3.

Abbiamo già studiato il caso $k = -2$; ci rimane il caso $k = 1$ in cui la matrice è

$$M = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

ed è ovviamente di caratteristica 2 (la prima colonna è proporzionale alla terza, la seconda no).

Quindi se $k = -2$ o $k = 1$ la matrice ha caratteristica 2 e i tre vettori sono linearmente dipendenti. Negli altri casi la matrice ha caratteristica 3 e i tre vettori sono linearmente indipendenti.

Esercizio 2. Si considerino i punti $A(1; -3; -1)$, $B(2; -6; -2)$, $C(4; -6; 2)$ e $D(3; -3; 3)$.

a) Si dimostri che i quattro punti sono complanari (ossia, appartengono ad uno stesso piano).

Basta considerare i vettori

$$\overrightarrow{AB} = (1; -3; -1), \quad \overrightarrow{AC} = (3; -3; 3), \quad \overrightarrow{AD} = (2; 0; 4)$$

e verificare che il determinante della matrice da essi formato si annulla.

b) Si scriva l'equazione del piano π contenente i quattro punti.

Tale piano coincide ovviamente con quello contenente A, B e C, la cui equazione è data da

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z+1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia $2x + y - z = 0$.

c) Il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogrammo? È un rettangolo?

È un parallelogrammo, poiché $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Non è un rettangolo, poiché $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$.

d) Determinare l'intersezione G delle diagonali del quadrilatero $ABCD$.

In un parallelogrammo le diagonali si intersecano nel loro punto medio. Quindi le coordinate del punto cercato sono

$$x_G = \tfrac{1}{2}(x_A + x_C) = \tfrac{5}{2}, \quad y_G = \tfrac{1}{2}(y_A + y_C) = -\tfrac{9}{2}, \quad z_G = \tfrac{1}{2}(z_A + z_C) = \tfrac{1}{2},$$

cosicché $G(\frac{5}{2}; -\frac{9}{2}; \frac{1}{2})$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & k+1 & 3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Per quale valore di k la matrice ha un autovalore uguale ad 1?

Basta imporre che il polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I)$ si annulli per $\lambda = 1$. Si trova che $k = 0$.

b) Determinare gli autovalori e gli autovettori della matrice A per $k = 0$.

In tal caso abbiamo che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e che il polinomio caratteristico è $(1-\lambda)(4-\lambda)^2$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ (come già sapevamo dalla prima domanda), semplice, e $\lambda_2 = 4$, doppio.

Gli autovettori relativi a λ_1 sono le soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{cases} y + 3z = 0 \\ 4x + 3y - 4z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$$

ossia i multipli non nulli del vettore $(13; -12; 4)_T$.

Gli autovettori relativi a λ_2 sono le soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{cases} -3x + y + 3z = 0 \\ 4x - 4z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ossia i multipli non nulli del vettore $(1; 0; 1)_T$.

c) Per $k = 0$ la matrice A è diagonalizzabile?

Dalla risposta precedente è ovvio che non esista una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di A; perciò la matrice non è diagonalizzabile. Detto in altre parole, l'autovalore λ_2 non è regolare.