Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
19 giugno 2013 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(3x + 3y + 3; x - 1; 2y + 4; -2y - 4) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

a) Esibire un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ avente dimensione 3 e contenente S.

Basta prendere $V = \{(x_1; x_2; x_3; x_4) \mid x_3 + x_4 = 0\}$. Ovviamente S è contenuto in V. Inoltre V è il sottospazio generato dai vettori $\underline{v}_1 = (1; 0; 0; 0)$, $\underline{v}_2 = (0; 1; 0; 0)$ e $\underline{v}_3 = (0; 0; 1; -1)$. Poiché questi tre vettori sono linearmente indipendenti, essi formano una base di V e la dimensione di V è 3.

b) Dimostrare che S è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

È ovviamente lecito (ma in questo caso richiede un po' di tempo) verificare che la definizione di sottospazio è soddisfatta. Alternativamente, si possono sfruttare i risultati della domanda successiva. Verrà infatti dimostrato che S è il sottospazio generato da due elementi di $\mathbb{R}^4$.

c) Dimostrare che $\underline{u}_1 = (3; 1; 0; 0)$ e $\underline{u}_2 = (3; 0; 2; -2)$ formano una base di S.

È anzitutto facile verificare che $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ sono linearmente indipendenti. Si ha poi che

$$\begin{aligned} S &= \{(x-1)(3; 1; 0; 0) + (y + 2)(3; 0; 2; -2) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1(3; 1; 0; 0) + \lambda_2(3; 0; 2; -2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1\underline{u}_1 + \lambda_2\underline{u}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle, \end{aligned}$$

cosicché $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ generano S. Quindi essi formano una base di S.

Esercizio 2. Si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + 4y - z - 1 = 0 \\ 6y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Si verifichi che r ed s sono parallele.

Il vettore direzionale di r è $\underline{v}_r = (2; -1; -2)$, mentre quello di s è $\underline{v}_s = (1; 4; -1) \wedge (0; 6; -3) = (-6; 3; 6)$. Poiché $\underline{v}_s = -3\underline{v}_r$, le due rette sono parallele.

b) Si scriva l'equazione del piano π contenente le due rette.

Tale piano coincide ovviamente con quello contenente s e passante per il punto di r di coordinate $(-2; 1; 3)$. La sua equazione si può trovare partendo dal fascio di piani contenenti s,

$$\alpha(x + 4y - z - 1) + \beta(6y - 3z + 1) = 0,$$

imponendo il passaggio per $(-2; 1; 3)$. Si trova $\alpha = -\beta$, cosicché l'equazione di π è $x - 2y + 2z - 2 = 0$.

c) Dopo aver verificato che il punto $A(2; 2; 2)$ appartiene a π, si determini la retta q passante per A, contenuta in π ed ortogonale a r.

Sostituendo le coordinate di A nell'equazione di π si ottiene un'identità, quindi il punto appartiene al piano. La retta q è poi l'intersezione tra π e π', dove π' è il piano passante per A ed ortogonale ad r. L'equazione di π' è $2(x-2)-(y-2)-2(z-2) = 0$; pertanto le equazioni cartesiane di q sono

$$\begin{cases} x - 2y + 2z - 2 = 0 \\ 2x - y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Determinare gli autovalori e una base degli autospazi della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 17 & -6 & 18 \\ 30 & -11 & 30 \\ -6 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Non c'è nessuna difficoltà. Il polinomio caratteristico è

$$P_M(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)\ .$$

Per calcolare il polinomio caratteristico è utile semplificare la matrice $M - \lambda I_3$

Una base per l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = 1$ è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base per l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_2 = -1$ è data da

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Essendo l'autospazio di dimensione 2, la scelta per la base è infinita e quindi qualsiasi coppia di combinazioni lineari di questi due vettori (che non risulti essere due vettori proporzionali) è corretta.

Non dimenticare di verificare in brutta che ciascuno dei tre vettori è <u>effettivamente</u> un autovettore.

L'autovalore $\lambda_2 = -1$ è quindi regolare e perciò la matrice è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Determinare le soluzioni dell'equazione

$$((z - 1 + 2i)^5 + 4 + 4i)(|z + 1| + z - \overline{z}) = 0$$

e rappresentarle con cura nel piano di Gauss.

Il grafico dovrà essere di almeno 10cm $\times$ 10cm, contenere i punti 0, 1 e i e dovrà risultare chiaramente dove stanno i punti fra di loro e rispetto agli elementi geometrici tracciati (rette, triangoli, quadrati, circonferenze, ecc). Inoltre le dimensioni degli oggetti geometrici dovranno essere indicate.

L'equazione è della forma prodotto di termini uguale a zero quindi le sue soluzioni sono gli z che soddisfano una delle due equazioni

$$\begin{aligned} (z - 1 + 2i)^5 + 4 + 4i &= 0 \\ |z + 1| + z - \overline{z} &= 0 \end{aligned}$$

La seconda si può riscrivere

$$|z + 1| = -z + \overline{z}$$

ma il membro di sinistra è un numero reale (non negativo) e il membro di destra è un immaginario puro, quindi possono risultare uguali se e solo se sono entrambi uguali a 0. Questo obbliga $z = -1$ (nel membro di sinistra) che risulta essere una soluzione (perché il membro di destra è allora uguale a 0). Abbiamo quindi una prima soluzione $z_5 = -1$ (le soluzioni z_0 a z_4 saranno definite nel paragrafo successivo, per questo utilizziamo z_5).

La prima equazione si può riscrivere

$$(z - 1 + 2i)^5 = -4 - 4i$$

Il modulo e l'argomento del membro di destra sono $4\sqrt{2} = 2^{\frac{5}{2}}$ e $-\frac{3\pi}{4}$. Per cui le soluzioni sono

$$z_k = 1 - 2i + \sqrt{2}e^{-\frac{3i\pi}{20} + \frac{2ik\pi}{5}}, \qquad k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}.$$

Stanno quindi sulla circonferenza di centro $1 - 2i$ e raggio $\sqrt{2}$. I punti 0, 1, -1 e i stanno all'esterno di tale circonferenza mentre il punto $-i$ sta sulla circonferenza (ma non è una delle soluzioni). Si può notare che il vettore dal centro della circonferenza alla soluzione z_1 forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'orizzontale e quindi z_1 può essere posizionata precisamente, inoltre risulta $z_1 = 2 - i$ che dà un altro modo di posizionare z_1 precisamente.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
19 giugno 2013 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(x + 3y + 5; x - 1; 2y + 4; -2y - 4) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

a) Esibire un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ avente dimensione 3 e contenente S.

Basta prendere $V = \{(x_1; x_2; x_3; x_4) \mid x_3 + x_4 = 0\}$. Ovviamente S è contenuto in V. Inoltre V è il sottospazio generato dai vettori $\underline{v}_1 = (1; 0; 0; 0)$, $\underline{v}_2 = (0; 1; 0; 0)$ e $\underline{v}_3 = (0; 0; 1; -1)$. Poiché questi tre vettori sono linearmente indipendenti, essi formano una base di V e la dimensione di V è 3.

b) Dimostrare che S è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

È ovviamente lecito (ma in questo caso richiede un po' di tempo) verificare che la definizione di sottospazio è soddisfatta. Alternativamente, si possono sfruttare i risultati della domanda successiva. Verrà infatti dimostrato che S è il sottospazio generato da due elementi di $\mathbb{R}^4$.

c) Dimostrare che $\underline{u}_1 = (1; 1; 0; 0)$ e $\underline{u}_2 = (3; 0; 2; -2)$ formano una base di S.

È anzitutto facile verificare che $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ sono linearmente indipendenti. Si ha poi che

$$\begin{aligned} S &= \{(x - 1)(1; 1; 0; 0) + (y + 2)(3; 0; 2; -2) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1(1; 1; 0; 0) + \lambda_2(3; 0; 2; -2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1\underline{u}_1 + \lambda_2\underline{u}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle, \end{aligned}$$

cosicché $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ generano S. Quindi essi formano una base di S.

Esercizio 2. Si considerino le rette

$$r: \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \qquad\qquad s: \quad \begin{cases} x + 4y - z - 4 = 0 \\ 6y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Si verifichi che r ed s sono parallele.

Il vettore direzionale di r è $\underline{v}_r = (2; -1; -2)$, mentre quello di s è $\underline{v}_s = (1; 4; -1) \wedge (0; 6; -3) = (-6; 3; 6)$. Poiché $\underline{v}_s = -3\underline{v}_r$, le due rette sono parallele.

b) Si scriva l'equazione del piano π contenente le due rette.

Tale piano coincide ovviamente con quello contenente s e passante per il punto di r di coordinate $(1; 1; 3)$. La sua equazione si può trovare partendo dal fascio di piani contenenti s,

$$\alpha(x + 4y - z - 4) + \beta(6y - 3z + 1) = 0,$$

imponendo il passaggio per $(1; 1; 3)$. Si trova $\alpha = -\beta$, cosicché l'equazione di π è $x - 2y + 2z - 5 = 0$.

c) Dopo aver verificato che il punto $A(-1; -1; 2)$ appartiene a π, si determini la retta q passante per A, contenuta in π ed ortogonale a r.

Sostituendo le coordinate di A nell'equazione di π si ottiene un'identità, quindi il punto appartiene al piano. La retta q è poi l'intersezione tra π e π', dove π' è il piano passante per A ed ortogonale ad r. L'equazione di π' è $2(x+1) - (y+1) - 2(z-2) = 0$; pertanto le equazioni cartesiane di q sono

$$\begin{cases} x - 2y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Determinare gli autovalori e una base degli autospazi della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -10 & 8 \\ 4 & -19 & 16 \\ 4 & -20 & 17 \end{pmatrix}.$$

Non c'è nessuna difficoltà. Il polinomio caratteristico è

$$P_M(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)\ .$$

Per calcolare il polinomio caratteristico è utile semplificare la matrice $M - \lambda I_3$

Una base per l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = -1$ è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Una base per l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_2 = 1$ è data da

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Essendo l'autospazio di dimensione 2, la scelta per la base è infinita e quindi qualsiasi coppia di combinazioni lineari di questi due vettori (che non risulti essere due vettori proporzionali) è corretta.

Non dimenticare di verificare in brutta che ciascuno dei tre vettori è effettivamente un autovettore.

L'autovalore $\lambda_2 = 1$ è quindi regolare e perciò la matrice è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Determinare le soluzioni dell'equazione

$$((z-1-2i)^5 + 4 + 4i)(|z+1| - 2z + 2\overline{z}) = 0$$

e rappresentarle con cura nel piano di Gauss.
Il grafico dovrà essere di almeno 10cm $\times$ 10cm, contenere i punti 0, 1 e i e dovrà risultare chiaramente dove stanno i punti fra di loro e rispetto agli elementi geometrici tracciati (rette, triangoli, quadrati, circonferenze, ecc). Inoltre le dimensioni degli oggetti geometrici dovranno essere indicate.

L'equazione è della forma prodotto di termini uguale a zero quindi le sue soluzioni sono gli z che soddisfano una delle due equazioni

$$(z-1-2i)^5 + 4 + 4i = 0$$
$$|z+1| - 2z + 2\overline{z} = 0$$

La seconda si può riscrivere

$$|z+1| = 2z - 2\overline{z}$$

ma il membro di sinistra è un numero reale (non negativo) e il membro di destra è un immaginario puro, quindi possono risultare uguali se e solo se sono entrambi uguali a 0. Questo obbliga $z = -1$ (nel membro di sinistra) che risulta essere una soluzione (perché il membro di destra è allora uguale a 0). Abbiamo quindi una prima soluzione $z_5 = -1$ (le soluzioni z_0 a z_4 saranno definite nel paragrafo successivo, per questo utilizziamo z_5).
La prima equazione si può riscrivere

$$(z-1-2i)^5 = -4 - 4i$$

Il modulo e l'argomento del membro di destra sono $4\sqrt{2} = 2^{\frac{5}{2}}$ e $-\frac{3\pi}{4}$. Per cui le soluzioni sono

$$z_k = 1 + 2i + \sqrt{2}e^{-\frac{3i\pi}{20} + \frac{2ik\pi}{5}}, \qquad k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}.$$

Stanno quindi sulla circonferenza di centro $1+2i$ e raggio $\sqrt{2}$. I punti 0, 1, -1 e $-i$ stanno all'esterno di tale circonferenza mentre il punto i sta sulla circonferenza (ma non è una delle soluzioni). Si può notare che il vettore dal centro della circonferenza alla soluzione z_1 forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'orizzontale e quindi z_1 può essere posizionata precisamente, inoltre risulta $z_1 = 2 + 3i$ che dà un altro modo di posizionare z_1 precisamente.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
19 giugno 2013 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(-x + 3y + 7; x - 1; 2y + 4; -2y - 4) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

a) Esibire un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ avente dimensione 3 e contenente S.

Basta prendere $V = \{(x_1; x_2; x_3; x_4) \mid x_3 + x_4 = 0\}$. Ovviamente S è contenuto in V. Inoltre V è il sottospazio generato dai vettori $\underline{v}_1 = (1; 0; 0; 0)$, $\underline{v}_2 = (0; 1; 0; 0)$ e $\underline{v}_3 = (0; 0; 1; -1)$. Poiché questi tre vettori sono linearmente indipendenti, essi formano una base di V e la dimensione di V è 3.

b) Dimostrare che S è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

È ovviamente lecito (ma in questo caso richiede un po' di tempo) verificare che la definizione di sottospazio è soddisfatta. Alternativamente, si possono sfruttare i risultati della domanda successiva. Verrà infatti dimostrato che S è il sottospazio generato da due elementi di $\mathbb{R}^4$.

c) Dimostrare che $\underline{u}_1 = (-1; 1; 0; 0)$ e $\underline{u}_2 = (3; 0; 2; -2)$ formano una base di S.

È anzitutto facile verificare che $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ sono linearmente indipendenti. Si ha poi che

$$\begin{aligned} S &= \{(x-1)(-1; 1; 0; 0) + (y+2)(3; 0; 2; -2) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1(-1; 1; 0; 0) + \lambda_2(3; 0; 2; -2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1\underline{u}_1 + \lambda_2\underline{u}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle, \end{aligned}$$

cosicché $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ generano S. Quindi essi formano una base di S.

Esercizio 2. Si considerino le rette

$$r: \quad \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \qquad\qquad s: \quad \begin{cases} x + 4y - z - 5 = 0 \\ 6y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Si verifichi che r ed s sono parallele.

Il vettore direzionale di r è $\underline{v}_r = (2; -1; -2)$, mentre quello di s è $\underline{v}_s = (1; 4; -1) \wedge (0; 6; -3) = (-6; 3; 6)$. Poiché $\underline{v}_s = -3\underline{v}_r$, le due rette sono parallele.

b) Si scriva l'equazione del piano π contenente le due rette.

Tale piano coincide ovviamente con quello contenente s e passante per il punto di r di coordinate $(2; 1; 3)$. La sua equazione si può trovare partendo dal fascio di piani contenenti s,

$$\alpha(x + 4y - z - 5) + \beta(6y - 3z + 1) = 0,$$

imponendo il passaggio per $(2; 1; 3)$. Si trova $\alpha = -\beta$, cosicché l'equazione di π è $x - 2y + 2z - 6 = 0$.

c) Dopo aver verificato che il punto $A(-2; -2; 2)$ appartiene a π, si determini la retta q passante per A, contenuta in π ed ortogonale a r.

Sostituendo le coordinate di A nell'equazione di π si ottiene un'identità, quindi il punto appartiene al piano. La retta q è poi l'intersezione tra π e π', dove π' è il piano passante per A ed ortogonale ad r. L'equazione di π' è $2(x+2)-(y+2)-2(z-2) = 0$; pertanto le equazioni cartesiane di q sono

$$\begin{cases} x - 2y + 2z - 6 = 0 \\ 2x - y - 2z + 6 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Determinare gli autovalori e una base degli autospazi della matrice

$$M = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -30 & 5 & 6 \\ -30 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Non c'è nessuna difficoltà. Il polinomio caratteristico è

$$P_M(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 1) \; .$$

Per calcolare il polinomio caratteristico è utile semplificare la matrice $M - \lambda I_3$

Una base per l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = 1$ è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Una base per l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_2 = -1$ è data da

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Essendo l'autospazio di dimensione 2, la scelta per la base è infinita e quindi qualsiasi coppia di combinazioni lineari di questi due vettori (che non risulti essere due vettori proporzionali) è corretta.

Non dimenticare di verificare in brutta che ciascuno dei tre vettori è effettivamente un autovettore.

L'autovalore $\lambda_2 = -1$ è quindi regolare e perciò la matrice è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Determinare le soluzioni dell'equazione

$$((z - 1 + 2i)^5 + 4 - 4i)(|z + 1| + 3z - 3\overline{z}) = 0$$

e rappresentarle con cura nel piano di Gauss.
Il grafico dovrà essere di almeno 10cm $\times$ 10cm, contenere i punti 0, 1 e i e dovrà risultare chiaramente dove stanno i punti fra di loro e rispetto agli elementi geometrici tracciati (rette, triangoli, quadrati, circonferenze, ecc). Inoltre le dimensioni degli oggetti geometrici dovranno essere indicate.

L'equazione è della forma prodotto di termini uguale a zero quindi le sue soluzioni sono gli z che soddisfano una delle due equazioni

$$(z - 1 + 2i)^5 + 4 - 4i = 0$$
$$|z + 1| + 3z - 3\overline{z} = 0$$

La seconda si può riscrivere

$$|z + 1| = -3z + 3\overline{z}$$

ma il membro di sinistra è un numero reale (non negativo) e il membro di destra è un immaginario puro, quindi possono risultare uguali se e solo se sono entrambi uguali a 0. Questo obbliga $z = -1$ (nel membro di sinistra) che risulta essere una soluzione (perché il membro di destra è allora uguale a 0). Abbiamo quindi una prima soluzione $z_5 = -1$ (le soluzioni z_0 a z_4 saranno definite nel paragrafo successivo, per questo utilizziamo z_5).
La prima equazione si può riscrivere

$$(z - 1 + 2i)^5 = -4 + 4i$$

Il modulo e l'argomento del membro di destra sono $4\sqrt{2} = 2^{\frac{5}{2}}$ e $\frac{3\pi}{4}$. Per cui le soluzioni sono

$$z_k = 1 - 2i + \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{20} + \frac{2ik\pi}{5}}, \qquad k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}.$$

Stanno quindi sulla circonferenza di centro $1 - 2i$ e raggio $\sqrt{2}$. I punti 0, 1, -1 e i stanno all'esterno di tale circonferenza mentre il punto $-i$ sta sulla circonferenza (ma non è una delle soluzioni). Si può notare che il vettore dal centro della circonferenza alla soluzione z_4 forma un angolo di $-\frac{\pi}{4}$ con l'orizzontale e quindi z_4 può essere posizionata precisamente, inoltre risulta $z_4 = 2 - 3i$ che dà un altro modo di posizionare z_4 precisamente.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
19 giugno 2013 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(2x + 3y + 4; x - 1; 2y + 4; -2y - 4) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

a) Esibire un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ avente dimensione 3 e contenente S.

Basta prendere $V = \{(x_1; x_2; x_3; x_4) \mid x_3 + x_4 = 0\}$. Ovviamente S è contenuto in V. Inoltre V è il sottospazio generato dai vettori $\underline{v}_1 = (1; 0; 0; 0)$, $\underline{v}_2 = (0; 1; 0; 0)$ e $\underline{v}_3 = (0; 0; 1; -1)$. Poiché questi tre vettori sono linearmente indipendenti, essi formano una base di V e la dimensione di V è 3.

b) Dimostrare che S è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

È ovviamente lecito (ma in questo caso richiede un po' di tempo) verificare che la definizione di sottospazio è soddisfatta. Alternativamente, si possono sfruttare i risultati della domanda successiva. Verrà infatti dimostrato che S è il sottospazio generato da due elementi di $\mathbb{R}^4$.

c) Dimostrare che $\underline{u}_1 = (2; 1; 0; 0)$ e $\underline{u}_2 = (3; 0; 2; -2)$ formano una base di S.

È anzitutto facile verificare che $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ sono linearmente indipendenti. Si ha poi che

$$\begin{aligned} S &= \{(x-1)(2; 1; 0; 0) + (y+2)(3; 0; 2; -2) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1(2; 1; 0; 0) + \lambda_2(3; 0; 2; -2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1\underline{u}_1 + \lambda_2\underline{u}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle, \end{aligned}$$

cosicché $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ generano S. Quindi essi formano una base di S.

Esercizio 2. Si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + 4y - z - 2 = 0 \\ 6y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Si verifichi che r ed s sono parallele.

Il vettore direzionale di r è $\underline{v}_r = (2; -1; -2)$, mentre quello di s è $\underline{v}_s = (1; 4; -1) \wedge (0; 6; -3) = (-6; 3; 6)$. Poiché $\underline{v}_s = -3\underline{v}_r$, le due rette sono parallele.

b) Si scriva l'equazione del piano π contenente le due rette.

Tale piano coincide ovviamente con quello contenente s e passante per il punto di r di coordinate $(-1; 1; 3)$. La sua equazione si può trovare partendo dal fascio di piani contenenti s,

$$\alpha(x + 4y - z - 2) + \beta(6y - 3z + 1) = 0,$$

imponendo il passaggio per $(-1; 1; 3)$. Si trova $\alpha = -\beta$, cosicché l'equazione di π è $x - 2y + 2z - 3 = 0$.

c) Dopo aver verificato che il punto $A(1; 1; 2)$ appartiene a π, si determini la retta q passante per A, contenuta in π ed ortogonale a r.

Sostituendo le coordinate di A nell'equazione di π si ottiene un'identità, quindi il punto appartiene al piano. La retta q è poi l'intersezione tra π e π', dove π' è il piano passante per A ed ortogonale ad r. L'equazione di π' è $2(x-1)-(y-1)-2(z-2) = 0$; pertanto le equazioni cartesiane di q sono

$$\begin{cases} x - 2y + 2z - 3 = 0 \\ 2x - y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Determinare gli autovalori e una base degli autospazi della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 21 & 30 & -50 \\ -8 & -11 & 20 \\ 4 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Non c'è nessuna difficoltà. Il polinomio caratteristico è

$$P_M(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)\ .$$

Per calcolare il polinomio caratteristico è utile semplificare la matrice $M - \lambda I_3$

Una base per l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = -1$ è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base per l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_2 = 1$ è data da

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Essendo l'autospazio di dimensione 2, la scelta per la base è infinita e quindi qualsiasi coppia di combinazioni lineari di questi due vettori (che non risulti essere due vettori proporzionali) è corretta.

Non dimenticare di verificare in brutta che ciascuno dei tre vettori è effettivamente un autovettore.

L'autovalore $\lambda_2 = 1$ è quindi regolare e perciò la matrice è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Determinare le soluzioni dell'equazione

$$((z-1-2i)^5 + 4 - 4i)(|z+1| - 4z + 4\overline{z}) = 0$$

e rappresentarle con cura nel piano di Gauss.
Il grafico dovrà essere di almeno 10cm $\times$ 10cm, contenere i punti 0, 1 e i e dovrà risultare chiaramente dove stanno i punti fra di loro e rispetto agli elementi geometrici tracciati (rette, triangoli, quadrati, circonferenze, ecc). Inoltre le dimensioni degli oggetti geometrici dovranno essere indicate.

L'equazione è della forma prodotto di termini uguale a zero quindi le sue soluzioni sono gli z che soddisfano una delle due equazioni

$$(z-1-2i)^5 + 4 - 4i = 0$$
$$|z+1| - 4z + 4\overline{z} = 0$$

La seconda si può riscrivere

$$|z+1| = 4z - 4\overline{z}$$

ma il membro di sinistra è un numero reale (non negativo) e il membro di destra è un immaginario puro, quindi possono risultare uguali se e solo se sono entrambi uguali a 0. Questo obbliga $z = -1$ (nel membro di sinistra) che risulta essere una soluzione (perché il membro di destra è allora uguale a 0). Abbiamo quindi una prima soluzione $z_5 = -1$ (le soluzioni z_0 a z_4 saranno definite nel paragrafo successivo, per questo utilizziamo z_5).
La prima equazione si può riscrivere

$$(z-1-2i)^5 = -4 + 4i$$

Il modulo e l'argomento del membro di destra sono $4\sqrt{2} = 2^{\frac{5}{2}}$ e $\frac{3\pi}{4}$. Per cui le soluzioni sono

$$z_k = 1 + 2i + \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{20}+\frac{2ik\pi}{5}}, \qquad k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}.$$

Stanno quindi sulla circonferenza di centro $1+2i$ e raggio $\sqrt{2}$. I punti 0, 1, -1 e $-i$ stanno all'esterno di tale circonferenza mentre il punto i sta sulla circonferenza (ma non è una delle soluzioni). Si può notare che il vettore dal centro della circonferenza alla soluzione z_4 forma un angolo di $-\frac{\pi}{4}$ con l'orizzontale e quindi z_4 può essere posizionata precisamente, inoltre risulta $z_4 = 2 + i$ che dà un altro modo di posizionare z_4 precisamente.