Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
19 giugno 2013 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza per l'appello, 1 ora e mezza per per il compitino.
Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(3x + 3y + 3; x - 1; 2y + 4; -2y - 4) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

a) Esibire un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ avente dimensione 3 e contenente S.

Basta prendere $V = \{(x_1; x_2; x_3; x_4) \mid x_3 + x_4 = 0\}$. Ovviamente S è contenuto in V. Inoltre V è il sottospazio generato dai vettori $\underline{v}_1 = (1; 0; 0; 0)$, $\underline{v}_2 = (0; 1; 0; 0)$ e $\underline{v}_3 = (0; 0; 1; -1)$. Poiché questi tre vettori sono linearmente indipendenti, essi formano una base di V e la dimensione di V è 3.

b) Dimostrare che S è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

È ovviamente lecito (ma in questo caso richiede un po' di tempo) verificare che la definizione di sottospazio è soddisfatta. Alternativamente, si possono sfruttare i risultati della domanda successiva. Verrà infatti dimostrato che S è il sottospazio generato da due elementi di $\mathbb{R}^4$.

c) Dimostrare che $\underline{u}_1 = (3; 1; 0; 0)$ e $\underline{u}_2 = (3; 0; 2; -2)$ formano una base di S.

È anzitutto facile verificare che $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ sono linearmente indipendenti. Si ha poi che

$$\begin{aligned} S &= \{(x - 1)(3; 1; 0; 0) + (y + 2)(3; 0; 2; -2) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1(3; 1; 0; 0) + \lambda_2(3; 0; 2; -2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1\underline{u}_1 + \lambda_2\underline{u}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle, \end{aligned}$$

cosicché $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ generano S. Quindi essi formano una base di S.

Esercizio 2. Si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + 4y - z - 1 = 0 \\ 6y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Si verifichi che r ed s sono parallele.

Il vettore direzionale di r è $\underline{v}_r = (2; -1; -2)$, mentre quello di s è $\underline{v}_s = (1; 4; -1) \wedge (0; 6; -3) = (-6; 3; 6)$. Poiché $\underline{v}_s = -3\underline{v}_r$, le due rette sono parallele.

b) Si scriva l'equazione del piano π contenente le due rette.

Tale piano coincide ovviamente con quello contenente s e passante per il punto di r di coordinate $(-2; 1; 3)$. La sua equazione si può trovare partendo dal fascio di piani contenenti s,

$$\alpha(x + 4y - z - 1) + \beta(6y - 3z + 1) = 0,$$

imponendo il passaggio per $(-2; 1; 3)$. Si trova $\alpha = -\beta$, cosicché l'equazione di π è $x - 2y + 2z - 2 = 0$.

c) Dopo aver verificato che il punto $A(2; 2; 2)$ appartiene a π, si determini la retta q passante per A, contenuta in π ed ortogonale a r.

Sostituendo le coordinate di A nell'equazione di π si ottiene un'identità, quindi il punto appartiene al piano. La retta q è poi l'intersezione tra π e π', dove π' è il piano passante per A ed ortogonale ad r. L'equazione di π' è $2(x-2)-(y-2)-2(z-2) = 0$; pertanto le equazioni cartesiane di q sono

$$\begin{cases} x - 2y + 2z - 2 = 0 \\ 2x - y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Parte comune

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$-3x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 10xz + 20x - 4y - 12z - 12 = 0 .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

Basta controllare se il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

ha soluzioni. Tale sistema è dato da

$$\begin{cases} -3x + 5z + 10 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \\ 5x - 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

ed è facile vedere che l'unica soluzione è $(0; 1; -2)$. Queste sono quindi le coordinate del centro di σ.

b) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

Dobbiamo anzitutto determinare una base ortonormale di autovettori della matrice B. È facile vedere che i suoi autovalori sono $\lambda_1 = -8$ (semplice) e $\lambda_2 = 2$ (doppio). Gli autovettori corrispondenti a λ_1 sono i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix},$$

con $x \neq 0$. Quelli corrispondenti a λ_2 sono i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix},$$

con $x, y \neq 0$. Pertanto una base ortonormale di autovettori di B è data da

$$\underline{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Introdotta la matrice (ortogonale)

$$M = \left(\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

abbiamo il cambiamento di coordinate (rotazione)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + z') \\ y = y' \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + z') \end{cases}$$

che porta l'equazione di σ nella forma

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_2(z')^2 + 16\sqrt{2}\,x' - 4y' + 4\sqrt{2}\,z' - 12 = 0,$$

ossia

$$-4(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 + 8\sqrt{2}\,x' - 2y' + 2\sqrt{2}\,z' - 6 = 0.$$

Basta a questo punto effettuare la traslazione

$$\begin{cases} X = x' - \sqrt{2} \\ Y = y' - 1 \\ Z = z' + \sqrt{2} \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica (a meno di uno scambio tra X e Z) della quadrica:

$$-\frac{X^2}{\frac{1}{4}} + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Essa è pertanto un iperboloide iperbolico (ossia, ad una falda).

c) Scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta σ in forma canonica.

Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova che

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Z) \\ y = Y + 1 \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X + Z) - 2 \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
19 giugno 2013 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza per l'appello, 1 ora e mezza per per il compitino.
Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(x + 3y + 5; x - 1; 2y + 4; -2y - 4) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

a) Esibire un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ avente dimensione 3 e contenente S.

Basta prendere $V = \{(x_1; x_2; x_3; x_4) \mid x_3 + x_4 = 0\}$. Ovviamente S è contenuto in V. Inoltre V è il sottospazio generato dai vettori $\underline{v}_1 = (1; 0; 0; 0)$, $\underline{v}_2 = (0; 1; 0; 0)$ e $\underline{v}_3 = (0; 0; 1; -1)$. Poiché questi tre vettori sono linearmente indipendenti, essi formano una base di V e la dimensione di V è 3.

b) Dimostrare che S è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

È ovviamente lecito (ma in questo caso richiede un po' di tempo) verificare che la definizione di sottospazio è soddisfatta. Alternativamente, si possono sfruttare i risultati della domanda successiva. Verrà infatti dimostrato che S è il sottospazio generato da due elementi di $\mathbb{R}^4$.

c) Dimostrare che $\underline{u}_1 = (1; 1; 0; 0)$ e $\underline{u}_2 = (3; 0; 2; -2)$ formano una base di S.

È anzitutto facile verificare che $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ sono linearmente indipendenti. Si ha poi che

$$\begin{aligned} S &= \{(x-1)(1; 1; 0; 0) + (y + 2)(3; 0; 2; -2) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1(1; 1; 0; 0) + \lambda_2(3; 0; 2; -2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1\underline{u}_1 + \lambda_2\underline{u}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle, \end{aligned}$$

cosicché $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ generano S. Quindi essi formano una base di S.

Esercizio 2. Si considerino le rette

$$r: \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \qquad\qquad s: \quad \begin{cases} x + 4y - z - 4 = 0 \\ 6y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Si verifichi che r ed s sono parallele.

Il vettore direzionale di r è $\underline{v}_r = (2; -1; -2)$, mentre quello di s è $\underline{v}_s = (1; 4; -1) \wedge (0; 6; -3) = (-6; 3; 6)$. Poiché $\underline{v}_s = -3\underline{v}_r$, le due rette sono parallele.

b) Si scriva l'equazione del piano π contenente le due rette.

Tale piano coincide ovviamente con quello contenente s e passante per il punto di r di coordinate $(1; 1; 3)$. La sua equazione si può trovare partendo dal fascio di piani contenenti s,

$$\alpha(x + 4y - z - 4) + \beta(6y - 3z + 1) = 0,$$

imponendo il passaggio per $(1; 1; 3)$. Si trova $\alpha = -\beta$, cosicché l'equazione di π è $x - 2y + 2z - 5 = 0$.

c) Dopo aver verificato che il punto $A(-1; -1; 2)$ appartiene a π, si determini la retta q passante per A, contenuta in π ed ortogonale a r.

Sostituendo le coordinate di A nell'equazione di π si ottiene un'identità, quindi il punto appartiene al piano. La retta q è poi l'intersezione tra π e π', dove π' è il piano passante per A ed ortogonale ad r. L'equazione di π' è $2(x+1)-(y+1)-2(z-2) = 0$; pertanto le equazioni cartesiane di q sono

$$\begin{cases} x - 2y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

Parte comune

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$-x^2 + 2y^2 - z^2 + 6xz + 12x - 4y - 4z - 4 = 0 \ .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

Basta controllare se il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

ha soluzioni. Tale sistema è dato da

$$\begin{cases} -x + 3z + 6 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \\ 3x - z - 2 = 0 \end{cases}$$

ed è facile vedere che l'unica soluzione è $(0; 1; -2)$. Queste sono quindi le coordinate del centro di σ.

b) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

Dobbiamo anzitutto determinare una base ortonormale di autovettori della matrice B. È facile vedere che i suoi autovalori sono $\lambda_1 = -4$ (semplice) e $\lambda_2 = 2$ (doppio). Gli autovettori corrispondenti a λ_1 sono i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix},$$

con $x \neq 0$. Quelli corrispondenti a λ_2 sono i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix},$$

con $x, y \neq 0$. Pertanto una base ortonormale di autovettori di B è data da

$$\underline{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Introdotta la matrice (ortogonale)

$$M = \left(\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

abbiamo il cambiamento di coordinate (rotazione)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + z') \\ y = y' \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + z') \end{cases}$$

che porta l'equazione di σ nella forma

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_2(z')^2 + 8\sqrt{2}\,x' - 4y' + 4\sqrt{2}\,z' - 4 = 0,$$

ossia

$$-2(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 + 4\sqrt{2}\,x' - 2y' + 2\sqrt{2}\,z' - 2 = 0.$$

Basta a questo punto effettuare la traslazione

$$\begin{cases} X = x' - \sqrt{2} \\ Y = y' - 1 \\ Z = z' + \sqrt{2} \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica (a meno di uno scambio tra X e Z) della quadrica:

$$-\frac{X^2}{\frac{1}{2}} + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Essa è pertanto un iperboloide iperbolico (ossia, ad una falda).

c) Scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta σ in forma canonica.

Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova che

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Z) \\ y = Y + 1 \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X + Z) - 2 \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
19 giugno 2013 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza per l'appello, 1 ora e mezza per per il compitino.
Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(-x+3y+7; x-1; 2y+4; -2y-4) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

a) Esibire un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ avente dimensione 3 e contenente S.

Basta prendere $V = \{(x_1; x_2; x_3; x_4) \mid x_3 + x_4 = 0\}$. Ovviamente S è contenuto in V. Inoltre V è il sottospazio generato dai vettori $\underline{v}_1 = (1; 0; 0; 0)$, $\underline{v}_2 = (0; 1; 0; 0)$ e $\underline{v}_3 = (0; 0; 1; -1)$. Poiché questi tre vettori sono linearmente indipendenti, essi formano una base di V e la dimensione di V è 3.

b) Dimostrare che S è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

È ovviamente lecito (ma in questo caso richiede un po' di tempo) verificare che la definizione di sottospazio è soddisfatta. Alternativamente, si possono sfruttare i risultati della domanda successiva. Verrà infatti dimostrato che S è il sottospazio generato da due elementi di $\mathbb{R}^4$.

c) Dimostrare che $\underline{u}_1 = (-1; 1; 0; 0)$ e $\underline{u}_2 = (3; 0; 2; -2)$ formano una base di S.

È anzitutto facile verificare che $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ sono linearmente indipendenti. Si ha poi che

$$\begin{aligned} S &= \{(x-1)(-1; 1; 0; 0) + (y+2)(3; 0; 2; -2) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1(-1; 1; 0; 0) + \lambda_2(3; 0; 2; -2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1\underline{u}_1 + \lambda_2\underline{u}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle, \end{aligned}$$

cosicché $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ generano S. Quindi essi formano una base di S.

Esercizio 2. Si considerino le rette

$$r: \quad \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \qquad\qquad s: \quad \begin{cases} x + 4y - z - 5 = 0 \\ 6y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Si verifichi che r ed s sono parallele.

Il vettore direzionale di r è $\underline{v}_r = (2; -1; -2)$, mentre quello di s è $\underline{v}_s = (1; 4; -1) \wedge (0; 6; -3) = (-6; 3; 6)$. Poiché $\underline{v}_s = -3\underline{v}_r$, le due rette sono parallele.

b) Si scriva l'equazione del piano π contenente le due rette.

Tale piano coincide ovviamente con quello contenente s e passante per il punto di r di coordinate $(2; 1; 3)$. La sua equazione si può trovare partendo dal fascio di piani contenenti s,

$$\alpha(x + 4y - z - 5) + \beta(6y - 3z + 1) = 0,$$

imponendo il passaggio per $(2; 1; 3)$. Si trova $\alpha = -\beta$, cosicché l'equazione di π è $x - 2y + 2z - 6 = 0$.

c) Dopo aver verificato che il punto $A(-2; -2; 2)$ appartiene a π, si determini la retta q passante per A, contenuta in π ed ortogonale a r.

Sostituendo le coordinate di A nell'equazione di π si ottiene un'identità, quindi il punto appartiene al piano. La retta q è poi l'intersezione tra π e π', dove π' è il piano passante per A ed ortogonale ad r. L'equazione di π' è $2(x+2)-(y+2)-2(z-2) = 0$; pertanto le equazioni cartesiane di q sono

$$\begin{cases} x - 2y + 2z - 6 = 0 \\ 2x - y - 2z + 6 = 0 \end{cases}$$

Parte comune

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$-4x^2 + 2y^2 - 4z^2 + 12xz + 24x - 4y - 16z - 16 = 0\ .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

Basta controllare se il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove
$$B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$
ha soluzioni. Tale sistema è dato da
$$\begin{cases} -4x + 6z + 12 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \\ 6x - 4z - 8 = 0 \end{cases}$$
ed è facile vedere che l'unica soluzione è $(0; 1; -2)$. Queste sono quindi le coordinate del centro di σ.

b) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

Dobbiamo anzitutto determinare una base ortonormale di autovettori della matrice B. È facile vedere che i suoi autovalori sono $\lambda_1 = -10$ (semplice) e $\lambda_2 = 2$ (doppio). Gli autovettori corrispondenti a λ_1 sono i vettori del tipo
$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix},$$
con $x \neq 0$. Quelli corrispondenti a λ_2 sono i vettori del tipo
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix},$$
con $x, y \neq 0$. Pertanto una base ortonormale di autovettori di B è data da
$$\underline{v}_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Introdotta la matrice (ortogonale)
$$M = \left(\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$
abbiamo il cambiamento di coordinate (rotazione)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + z') \\ y = y' \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + z') \end{cases}$$

che porta l'equazione di σ nella forma

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_2(z')^2 + 20\sqrt{2}\,x' - 4y' + 4\sqrt{2}\,z' - 16 = 0,$$

ossia

$$-5(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 + 10\sqrt{2}\,x' - 2y' + 2\sqrt{2}\,z' - 8 = 0.$$

Basta a questo punto effettuare la traslazione

$$\begin{cases} X = x' - \sqrt{2} \\ Y = y' - 1 \\ Z = z' + \sqrt{2} \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica (a meno di uno scambio tra X e Z) della quadrica:

$$-\frac{X^2}{\frac{1}{5}} + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Essa è pertanto un iperboloide iperbolico (ossia, ad una falda).

c) Scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta σ in forma canonica.

Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova che

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Z) \\ y = Y + 1 \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X + Z) - 2 \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
19 giugno 2013 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza per l'appello, 1 ora e mezza per per il compitino.
Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(2x + 3y + 4; x - 1; 2y + 4; -2y - 4) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

a) Esibire un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ avente dimensione 3 e contenente S.

Basta prendere $V = \{(x_1; x_2; x_3; x_4) \mid x_3 + x_4 = 0\}$. Ovviamente S è contenuto in V. Inoltre V è il sottospazio generato dai vettori $\underline{v}_1 = (1; 0; 0; 0)$, $\underline{v}_2 = (0; 1; 0; 0)$ e $\underline{v}_3 = (0; 0; 1; -1)$. Poiché questi tre vettori sono linearmente indipendenti, essi formano una base di V e la dimensione di V è 3.

b) Dimostrare che S è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

È ovviamente lecito (ma in questo caso richiede un po' di tempo) verificare che la definizione di sottospazio è soddisfatta. Alternativamente, si possono sfruttare i risultati della domanda successiva. Verrà infatti dimostrato che S è il sottospazio generato da due elementi di $\mathbb{R}^4$.

c) Dimostrare che $\underline{u}_1 = (2; 1; 0; 0)$ e $\underline{u}_2 = (3; 0; 2; -2)$ formano una base di S.

È anzitutto facile verificare che $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ sono linearmente indipendenti. Si ha poi che

$$\begin{aligned} S &= \{(x-1)(2; 1; 0; 0) + (y+2)(3; 0; 2; -2) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1(2; 1; 0; 0) + \lambda_2(3; 0; 2; -2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1\underline{u}_1 + \lambda_2\underline{u}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle, \end{aligned}$$

cosicché $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ generano S. Quindi essi formano una base di S.

Esercizio 2. Si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + 4y - z - 2 = 0 \\ 6y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Si verifichi che r ed s sono parallele.

Il vettore direzionale di r è $\underline{v}_r = (2; -1; -2)$, mentre quello di s è $\underline{v}_s = (1; 4; -1) \wedge (0; 6; -3) = (-6; 3; 6)$. Poiché $\underline{v}_s = -3\underline{v}_r$, le due rette sono parallele.

b) Si scriva l'equazione del piano π contenente le due rette.

Tale piano coincide ovviamente con quello contenente s e passante per il punto di r di coordinate $(-1; 1; 3)$. La sua equazione si può trovare partendo dal fascio di piani contenenti s,

$$\alpha(x + 4y - z - 2) + \beta(6y - 3z + 1) = 0,$$

imponendo il passaggio per $(-1; 1; 3)$. Si trova $\alpha = -\beta$, cosicché l'equazione di π è $x - 2y + 2z - 3 = 0$.

c) Dopo aver verificato che il punto $A(1; 1; 2)$ appartiene a π, si determini la retta q passante per A, contenuta in π ed ortogonale a r.

Sostituendo le coordinate di A nell'equazione di π si ottiene un'identità, quindi il punto appartiene al piano. La retta q è poi l'intersezione tra π e π', dove π' è il piano passante per A ed ortogonale ad r. L'equazione di π' è $2(x-1)-(y-1)-2(z-2) = 0$; pertanto le equazioni cartesiane di q sono

$$\begin{cases} x - 2y + 2z - 3 = 0 \\ 2x - y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

Parte comune

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$-2x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 8xz + 16x - 4y - 8z - 8 = 0\ .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

Basta controllare se il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

ha soluzioni. Tale sistema è dato da

$$\begin{cases} -2x + 4z + 8 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \\ 4x - 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

ed è facile vedere che l'unica soluzione è $(0; 1; -2)$. Queste sono quindi le coordinate del centro di σ.

b) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

Dobbiamo anzitutto determinare una base ortonormale di autovettori della matrice B. È facile vedere che i suoi autovalori sono $\lambda_1 = -6$ (semplice) e $\lambda_2 = 2$ (doppio). Gli autovettori corrispondenti a λ_1 sono i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix},$$

con $x \neq 0$. Quelli corrispondenti a λ_2 sono i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix},$$

con $x, y \neq 0$. Pertanto una base ortonormale di autovettori di B è data da

$$\underline{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Introdotta la matrice (ortogonale)

$$M = \left(\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

abbiamo il cambiamento di coordinate (rotazione)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + z') \\ y = y' \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + z') \end{cases}$$

che porta l'equazione di σ nella forma

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_2(z')^2 + 12\sqrt{2}\,x' - 4y' + 4\sqrt{2}\,z' - 8 = 0,$$

ossia

$$-3(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 + 6\sqrt{2}\,x' - 2y' + 2\sqrt{2}\,z' - 4 = 0.$$

Basta a questo punto effettuare la traslazione

$$\begin{cases} X = x' - \sqrt{2} \\ Y = y' - 1 \\ Z = z' + \sqrt{2} \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica (a meno di uno scambio tra X e Z) della quadrica:

$$-\frac{X^2}{\frac{1}{3}} + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Essa è pertanto un iperboloide iperbolico (ossia, ad una falda).

c) Scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta σ in forma canonica.

Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova che

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Z) \\ y = Y + 1 \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X + Z) - 2 \end{cases}$$