Università degli Studi di Bergamo
— Corso di Geometria e Algebra Lineare —
22 aprile 2013 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri il sistema, dipendente da un parametro reale k

$$\begin{cases} 2x + 4y + 5z = -4 \\ x + ky + z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 19 \end{cases}$$

a) Indicare, al variare del parametro k, se il sistema ammette soluzioni e, in caso affermativo, dire da quanti valori arbitrari dipendono le soluzioni.

La matrice dei coefficienti del sistema e il vettore dei termini noti sono rispettivamente

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & k & 1 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Per determinare l'esistenza delle soluzioni determiniamo la caratteristica della matrice A_k e della matrice completa $B_k = (A_k|\underline{b})$ e usiamo il teorema di Rouché–Capelli. Per determinare le caratteristiche usiamo il procedimento di Kronecker.

Il coefficiente in alto a sinistra di A_k è diverso da 0 per cui la matrice A_k ha caratteristica almeno 1.

La sottomatrice di A_k costituita dalla prima e terza riga e prima e terza colonna ha determinante $-25 \neq 0$ per cui la matrice A_k ha caratteristica almeno 2.

L'unica orlante della sottomatrice precedente è la matrice intera A_k. Il suo determinante è $-25k + 50$ per cui se $k = 2$ la matrice A_k ha caratteristica 2 altrimenti ha caratteristica 3.

Se $k \neq 2$ siamo nel caso di un sistema determinato, con un'unica soluzione.

Se $k = 2$, ci rimane da calcolare la caratteristica di B_k. Abbiamo già visto una sottomatrice di B_k quadrata di ordine 2 con determinante non nullo una cui orlanta è di determinante nullo. Calcoliamo il determinante della matrice costituita dalle prima, terza e quarta colonna di B_k. Esso vale 0, per cui, per il teorema di Kronecker, la matrice B_k ha caratteristica 2. Il sistema quindi ammette una retta di soluzioni.

b) Risolvere il sistema nel caso $k = 2$.

Il sistema che rimane da risolvere è

$$\begin{cases} 2x + 5z = -4 - 4y \\ 3x - 5z = \ \ 19 - 6y \end{cases}$$

(**Esercizio**: perché è stato scelto y come parametro e perché è stata eliminata la seconda equazione?)

La risoluzione non presenta nessuna difficoltà; si trova

$$\begin{cases} x = \ \ 3 - 2y \\ z = -2 \end{cases}$$

(o qualsiasi altra soluzione ad essa equivalente).

Come al solito <u>si deve</u> verificare in brutta copia che queste siano effettivamente soluzioni del sistema.

(**Esercizio**: perché il fatto di verificare che queste sono soluzioni del sistema permette di concludere che sono state trovate tutte le soluzioni e non soltanto alcune?)

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 27 & 56 & 7 \\ -16 & -33 & k \\ 12 & 24 & 2 \end{pmatrix} ,$$

dipendente da un parametro reale k.

a) Determinare il valore o i valori di k per cui il vettore

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

è un autovettore di A_k.

Abbiamo

$$A_k\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -18 - 4k \\ 4 \end{pmatrix}$$

che è, a meno del secondo coefficiente, $-\underline{v}$. L'unica scelta perché $\underline{v}$ sia un autovettore è che lo sia per l'autovalore $\lambda_1 = -1$ e dobbiamo allora avere $k = -4$.

b) Determinare gli autovalori e una base degli autospazi della matrice A_k con $k = -4$.

Non ci sono problemi particolari. Il polinomio caratteristico risulta essere

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 = -(\lambda + 2)(\lambda + 1)^2$$

Due osservazioni:

(a) tra gli autovalori ci **deve** essere -1;

(b) per calcolare il polinomio caratteristico è caldamente consigliato di aggiungere -2 volte la prima colonna alla seconda.

L'autovalore doppio $\lambda_1 = -1$ risulta regolare e una base (tra tutte quelle possibili) dell'autospazio è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Nota: $\underline{v}$ **deve** essere una combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ (abbiamo effettivamente $\underline{v} = 2\underline{v}_1 + \underline{v}_2$).

L'autovalore semplice $\lambda_2 = -2$ è ovviamente regolare e una base dell'autospazio è

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Come al solito <u>si deve</u> verificare in brutta copia che gli autovettori siano effettivamente autovettori di A_{-4}

c) Sempre nel caso $k = -4$, indicare se la matrice è diagonalizzabile.

Sì, la matrice è diagonalizzabile perché gli autovalori sono tutti reali e l'unico autovalore non-semplice ($\lambda_1 = -1$) è regolare.

Esercizio 3. Si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1; -2; 2; 0), \quad \underline{v}_2 = (-1; 5; 0; 4), \quad \underline{v}_3 = (-5; 16; -6; 8), \quad \underline{v}_4 = (1; k; 1; -2).$$

a) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti?

La matrice che ha per colonne i tre vettori,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -2 & 5 & 16 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

ha caratteristica 2. Infatti la sottomatrice quadrata di ordine 2 in basso a sinistra ha il determinante diverso da zero, mentre

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} -2 & 5 & 16 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

In conclusione, i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente dipendenti. Più precisamente, $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti e $\underline{v}_3$ è una loro combinazione lineare.

b) Per quali valori di k i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$, $\underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti?

Per nessun valore di k, poiché i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente dipendenti e quindi l'aggiunta di $\underline{v}_4$ non può cambiare la situazione.

c) Per quali valori di k il vettore $\underline{v}_4$ è una combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$?

Per quanto visto nella risposta alla prima domanda, chiedere che $\underline{v}_4$ sia una combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ equivale a chiedere che $\underline{v}_4$ sia una combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$, ossia che la matrice B che ha per colonne $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_4$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

abbia caratteristica 2. Ciò accade se e solo si annullano entrambi i determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -2 & 5 & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix},$$

ossia se e solo se $k = -\frac{7}{2}$.

d) Calcolare, al variare di k, la caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 1 \\ -2 & 5 & 16 & k \\ 2 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le colonne della matrice A sono i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$, $\underline{v}_4$ assegnati all'inizio dell'esercizio. Poiché $\underline{v}_3$ è una combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$, la caratteristica di A coincide con quella della matrice B introdotta nella domanda precedente. Ma abbiamo visto che $\operatorname{car} B = 2$ se e solo se $k = -\frac{7}{2}$. Per tutti gli altri valori di k la caratteristica è 3.

Esercizio 4. Si considerino i punti $A(2; 2; -1)$, $B(0; 4; 3)$ e $C(5; 5; 2)$.

a) Si mostri che il triangolo di vertici A, B, C è isoscele acutangolo e se ne calcoli l'area.

Abbiamo che

$$\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 4), \quad \overrightarrow{AC} = (3; 3; 3), \quad \overrightarrow{BC} = (5; 1; -1),$$

cosicché $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = 27$. Quindi il triangolo è isoscele di base AB. Per dimostrare che è acutangolo basta verificare che l'angolo γ in C è acuto. Ciò segue dal fatto che

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{AC}\| \, \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{5}{9} > 0.$$

L'area del triangolo si può calcolare come $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}\|$. Poiché $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC} = 3(-2; 6; -4)$, si trova che essa è $3\sqrt{14}$.

b) Si scrivano le equazioni parametriche e quelle cartesiane della retta passante per A e B.

Come vettore direzionale della retta si può scegliere il vettore $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 4)$, oppure il vettore $(-1; 1; 2)$. Le equazioni parametriche sono pertanto

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Per ottenere quelle cartesiane basta eliminare t (per esempio ricavandola dalla prima equazione). Si trova

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

c) Si scriva l'equazione del piano passante per A, B e C.

L'equazione del piano cercato è

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia $x - 3y + 2z + 6 = 0$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso di Geometria e Algebra Lineare —
22 aprile 2013 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri il sistema, dipendente da un parametro reale k

$$\begin{cases} 3x + 6y + 5z = -1 \\ 5x + ky \ \ + z = \ 13 \\ \ \ x + 2y \ \ - z = \ \ 5 \end{cases}$$

a) Indicare, al variare del parametro k, se il sistema ammette soluzioni e, in caso affermativo, dire da quanti valori arbitrari dipendono le soluzioni.

La matrice dei coefficienti del sistema e il vettore dei termini noti sono rispettivamente

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 5 & k & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Per determinare l'esistenza delle soluzioni determiniamo la caratteristica della matrice A_k e della matrice completa $B_k = (A_k|\underline{b})$ e usiamo il teorema di Rouché–Capelli. Per determinare le caratteristiche usiamo il procedimento di Kronecker.

Il coefficiente in alto a sinistra di A_k è diverso da 0 per cui la matrice A_k ha caratteristica almeno 1.

La sottomatrice di A_k costituita dalla prima e terza riga e prima e terza colonna ha determinante $-8 \neq 0$ per cui la matrice A_k ha caratteristica almeno 2.

L'unica orlante della sottomatrice precedente è la matrice intera A_k. Il suo determinante è $-8k + 80$ per cui se $k = 10$ la matrice A_k ha caratteristica 2 altrimenti ha caratteristica 3.

Se $k \neq 10$ siamo nel caso di un sistema determinato, con un'unica soluzione.

Se $k = 10$, ci rimane da calcolare la caratteristica di B_k. Abbiamo già visto una sottomatrice di B_k quadrata di ordine 2 con determinante non nullo una cui orlanta è di determinante nullo. Calcoliamo il determinante della matrice costituita dalle prima, terza e quarta colonna di B_k. Esso vale 0, per cui, per il teorema di Kronecker, la matrice B_k ha caratteristica 2. Il sistema quindi ammette una retta di soluzioni.

b) Risolvere il sistema nel caso $k = 10$.

Il sistema che rimane da risolvere è

$$\begin{cases} 3x + 5z = -1 - 6y \\ x \quad - z = \quad 5 - 2y \end{cases}$$

(**Esercizio**: perché è stato scelto y come parametro e perché è stata eliminata la seconda equazione?)

La risoluzione non presenta nessuna difficoltà; si trova

$$\begin{cases} x = \quad 3 - 2y \\ z = -2 \end{cases}$$

(o qualsiasi altra soluzione ad essa equivalente).

Come al solito <u>si deve</u> verificare in brutta copia che queste siano effettivamente soluzioni del sistema.

(**Esercizio**: perché il fatto di verificare che queste sono soluzioni del sistema permette di concludere che sono state trovate tutte le soluzioni e non soltanto alcune?)

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 20 & 7 & -42 \\ -30 & -11 & k \\ 6 & 2 & -13 \end{pmatrix},$$

dipendente da un parametro reale k.

a) Determinare il valore o i valori di k per cui il vettore

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è un autovettore di A_k.

Abbiamo

$$A_k\underline{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -54 + k \\ -1 \end{pmatrix}$$

che è, a meno del secondo coefficiente, $-\underline{v}$. L'unica scelta perché $\underline{v}$ sia un autovettore è che lo sia per l'autovalore $\lambda_1 = -1$ e dobbiamo allora avere $k = 60$.

b) Determinare gli autovalori e una base degli autospazi della matrice A_k con $k = 60$.

Non ci sono problemi particolari. Il polinomio caratteristico risulta essere

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 = -(\lambda + 2)(\lambda + 1)^2$$

Due osservazioni:

(a) tra gli autovalori ci **deve** essere -1;

(b) per calcolare il polinomio caratteristico è caldamente consigliato di aggiungere -3 volte la seconda colonna alla prima.

L'autovalore doppio $\lambda_1 = -1$ risulta regolare e una base (tra tutte quelle possibili) dell'autospazio è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nota: $\underline{v}$ **deve** essere una combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ (abbiamo effettivamente $\underline{v} = 2\underline{v}_1 + \underline{v}_2$).

L'autovalore semplice $\lambda_2 = -2$ è ovviamente regolare e una base dell'autospazio è

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Come al solito <u>si deve</u> verificare in brutta copia che gli autovettori siano effettivamente autovettori di A_{60}

c) Sempre nel caso $k = 60$, indicare se la matrice è diagonalizzabile.

Sì, la matrice è diagonalizzabile perché gli autovalori sono tutti reali e l'unico autovalore non-semplice ($\lambda_1 = -1$) è regolare.

Esercizio 3. Si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1; 1; 2; 0), \quad \underline{v}_2 = (-1; 2; 0; 4), \quad \underline{v}_3 = (-5; 1; -6; 8), \quad \underline{v}_4 = (1; k; 1; -2).$$

a) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti?

La matrice che ha per colonne i tre vettori,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

ha caratteristica 2. Infatti la sottomatrice quadrata di ordine 2 in basso a sinistra ha il determinante diverso da zero, mentre

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

In conclusione, i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente dipendenti. Più precisamente, $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti e $\underline{v}_3$ è una loro combinazione lineare.

b) Per quali valori di k i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$, $\underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti?

Per nessun valore di k, poiché i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente dipendenti e quindi l'aggiunta di $\underline{v}_4$ non può cambiare la situazione.

c) Per quali valori di k il vettore $\underline{v}_4$ è una combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$?

Per quanto visto nella risposta alla prima domanda, chiedere che $\underline{v}_4$ sia una combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ equivale a chiedere che $\underline{v}_4$ sia una combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$, ossia che la matrice B che ha per colonne $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_4$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

abbia caratteristica 2. Ciò accade se e solo si annullano entrambi i determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix},$$

ossia se e solo se $k = -\frac{1}{2}$.

d) Calcolare, al variare di k, la caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & k \\ 2 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le colonne della matrice A sono i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$, $\underline{v}_4$ assegnati all'inizio dell'esercizio. Poiché $\underline{v}_3$ è una combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$, la caratteristica di A coincide con quella della matrice B introdotta nella domanda precedente. Ma abbiamo visto che $\operatorname{car} B = 2$ se e solo se $k = -\frac{1}{2}$. Per tutti gli altri valori di k la caratteristica è 3.

Esercizio 4. Si considerino i punti $A(2;4;-1)$, $B(0;6;3)$ e $C(5;7;2)$.

a) Si mostri che il triangolo di vertici A, B, C è isoscele acutangolo e se ne calcoli l'area.

Abbiamo che

$$\overrightarrow{AB} = (-2;2;4), \quad \overrightarrow{AC} = (3;3;3), \quad \overrightarrow{BC} = (5;1;-1),$$

cosicché $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = 27$. Quindi il triangolo è isoscele di base AB. Per dimostrare che è acutangolo basta verificare che l'angolo γ in C è acuto. Ciò segue dal fatto che

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{AC}\|\,\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{5}{9} > 0.$$

L'area del triangolo si può calcolare come $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}\|$. Poiché $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC} = 3(-2;6;-4)$, si trova che essa è $3\sqrt{14}$.

b) Si scrivano le equazioni parametriche e quelle cartesiane della retta passante per A e B.

Come vettore direzionale della retta si può scegliere il vettore $\overrightarrow{AB} = (-2;2;4)$, oppure il vettore $(-1;1;2)$. Le equazioni parametriche sono pertanto

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Per ottenere quelle cartesiane basta eliminare t (per esempio ricavandola dalla prima equazione). Si trova

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ 2x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

c) Si scriva l'equazione del piano passante per A, B e C.

L'equazione del piano cercato è

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia $x - 3y + 2z + 12 = 0$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso di Geometria e Algebra Lineare —
22 aprile 2013 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri il sistema, dipendente da un parametro reale k

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 0 \\ x + ky + 2z = -1 \\ 3x + 6y - z = 11 \end{cases}$$

a) Indicare, al variare del parametro k, se il sistema ammette soluzioni e, in caso affermativo, dire da quanti valori arbitrari dipendono le soluzioni.

La matrice dei coefficienti del sistema e il vettore dei termini noti sono rispettivamente

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & k & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Per determinare l'esistenza delle soluzioni determiniamo la caratteristica della matrice A_k e della matrice completa $B_k = (A_k|\underline{b})$ e usiamo il teorema di Rouché–Capelli. Per determinare le caratteristiche usiamo il procedimento di Kronecker.

Il coefficiente in alto a sinistra di A_k è diverso da 0 per cui la matrice A_k ha caratteristica almeno 1.

La sottomatrice di A_k costituita dalla prima e terza riga e prima e terza colonna ha determinante $-11 \neq 0$ per cui la matrice A_k ha caratteristica almeno 2.

L'unica orlante della sottomatrice precedente è la matrice intera A_k. Il suo determinante è $-11k + 22$ per cui se $k = 2$ la matrice A_k ha caratteristica 2 altrimenti ha caratteristica 3.

Se $k \neq 2$ siamo nel caso di un sistema determinato, con un'unica soluzione.

Se $k = 2$, ci rimane da calcolare la caratteristica di B_k. Abbiamo già visto una sottomatrice di B_k quadrata di ordine 2 con determinante non nullo una cui orlanta è di determinante nullo. Calcoliamo il determinante della matrice costituita dalle prima, terza e quarta colonna di B_k. Esso vale 0, per cui, per il teorema di Kronecker, la matrice B_k ha caratteristica 2. Il sistema quindi ammette una retta di soluzioni.

b) Risolvere il sistema nel caso $k = 2$.

Il sistema che rimane da risolvere è

$$\begin{cases} 2x + 3z = \ \ 0 - 4y \\ 3x \ \ - z = 11 - 6y \end{cases}$$

(**Esercizio**: perché è stato scelto y come parametro e perché è stata eliminata la seconda equazione?)

La risoluzione non presenta nessuna difficoltà; si trova

$$\begin{cases} x = \ \ 3 - 2y \\ z = -2 \end{cases}$$

(o qualsiasi altra soluzione ad essa equivalente).

Come al solito <u>si deve</u> verificare in brutta copia che queste siano effettivamente soluzioni del sistema.

(**Esercizio**: perché il fatto di verificare che queste sono soluzioni del sistema permette di concludere che sono state trovate tutte le soluzioni e non soltanto alcune?)

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 19 & 18 & 6 \\ -12 & -11 & k \\ -24 & -24 & -7 \end{pmatrix},$$

dipendente da un parametro reale k.

a) Determinare il valore o i valori di k per cui il vettore

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

è un autovettore di A_k.

Abbiamo

$$A_k\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -14 - 3k \\ -3 \end{pmatrix}$$

che è, a meno del secondo coefficiente, $\underline{v}$. L'unica scelta perché $\underline{v}$ sia un autovettore è che lo sia per l'autovalore $\lambda_1 = 1$ e dobbiamo allora avere $k = -4$.

b) Determinare gli autovalori e una base degli autospazi della matrice A_k con $k = -4$.

Non ci sono problemi particolari. Il polinomio caratteristico risulta essere

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$$

Due osservazioni:

(a) tra gli autovalori ci **deve** essere 1;

(b) per calcolare il polinomio caratteristico è caldamente consigliato di aggiungere -1 volte la seconda colonna alla prima.

L'autovalore doppio $\lambda_1 = 1$ risulta regolare e una base (tra tutte quelle possibili) dell'autospazio è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Nota: $\underline{v}$ **deve** essere una combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ (abbiamo effettivamente $\underline{v} = 2\underline{v}_1 + \underline{v}_2$).

L'autovalore semplice $\lambda_2 = -1$ è ovviamente regolare e una base dell'autospazio è

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Come al solito <u>si deve</u> verificare in brutta copia che gli autovettori siano effettivamente autovettori di A_{-4}

c) Sempre nel caso $k = -4$, indicare se la matrice è diagonalizzabile.

Sì, la matrice è diagonalizzabile perché gli autovalori sono tutti reali e l'unico autovalore non-semplice ($\lambda_1 = 1$) è regolare.

Esercizio 3. Si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1; -1; 2; 0), \quad \underline{v}_2 = (-1; 4; 0; 4), \quad \underline{v}_3 = (-5; 11; -6; 8), \quad \underline{v}_4 = (1; k; 1; -2).$$

a) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti?

La matrice che ha per colonne i tre vettori,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -1 & 4 & 11 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

ha caratteristica 2. Infatti la sottomatrice quadrata di ordine 2 in basso a sinistra ha il determinante diverso da zero, mentre

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 4 & 11 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

In conclusione, i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente dipendenti. Più precisamente, $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti e $\underline{v}_3$ è una loro combinazione lineare.

b) Per quali valori di k i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$, $\underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti?

Per nessun valore di k, poiché i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente dipendenti e quindi l'aggiunta di $\underline{v}_4$ non può cambiare la situazione.

c) Per quali valori di k il vettore $\underline{v}_4$ è una combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$?

Per quanto visto nella risposta alla prima domanda, chiedere che $\underline{v}_4$ sia una combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ equivale a chiedere che $\underline{v}_4$ sia una combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$, ossia che la matrice B che ha per colonne $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_4$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

abbia caratteristica 2. Ciò accade se e solo si annullano entrambi i determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 4 & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix},$$

ossia se e solo se $k = -\frac{5}{2}$.

d) Calcolare, al variare di k, la caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 1 \\ -1 & 4 & 11 & k \\ 2 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le colonne della matrice A sono i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$, $\underline{v}_4$ assegnati all'inizio dell'esercizio. Poiché $\underline{v}_3$ è una combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$, la caratteristica di A coincide con quella della matrice B introdotta nella domanda precedente. Ma abbiamo visto che $\operatorname{car} B = 2$ se e solo se $k = -\frac{5}{2}$. Per tutti gli altri valori di k la caratteristica è 3.

Esercizio 4. Si considerino i punti $A(2;1;-1)$, $B(0;3;3)$ e $C(5;4;2)$.

a) Si mostri che il triangolo di vertici A, B, C è isoscele acutangolo e se ne calcoli l'area.

Abbiamo che

$$\overrightarrow{AB} = (-2;2;4), \quad \overrightarrow{AC} = (3;3;3), \quad \overrightarrow{BC} = (5;1;-1),$$

cosicché $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = 27$. Quindi il triangolo è isoscele di base AB. Per dimostrare che è acutangolo basta verificare che l'angolo γ in C è acuto. Ciò segue dal fatto che

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{AC}\|\,\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{5}{9} > 0.$$

L'area del triangolo si può calcolare come $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}\|$. Poiché $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC} = 3(-2;6;-4)$, si trova che essa è $3\sqrt{14}$.

b) Si scrivano le equazioni parametriche e quelle cartesiane della retta passante per A e B.

Come vettore direzionale della retta si può scegliere il vettore $\overrightarrow{AB} = (-2;2;4)$, oppure il vettore $(-1;1;2)$. Le equazioni parametriche sono pertanto

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Per ottenere quelle cartesiane basta eliminare t (per esempio ricavandola dalla prima equazione). Si trova

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

c) Si scriva l'equazione del piano passante per A, B e C.

L'equazione del piano cercato è

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia $x - 3y + 2z + 3 = 0$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso di Geometria e Algebra Lineare —
22 aprile 2013 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri il sistema, dipendente da un parametro reale k

$$\begin{cases} 4x + 8y - 2z = 16 \\ 5x + ky + 3z = 9 \\ 4x + 8y + 2z = 8 \end{cases}$$

a) Indicare, al variare del parametro k, se il sistema ammette soluzioni e, in caso affermativo, dire da quanti valori arbitrari dipendono le soluzioni.

La matrice dei coefficienti del sistema e il vettore dei termini noti sono rispettivamente

$$A_k = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 5 & k & 3 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Per determinare l'esistenza delle soluzioni determiniamo la caratteristica della matrice A_k e della matrice completa $B_k = (A_k|\underline{b})$ e usiamo il teorema di Rouché–Capelli. Per determinare le caratteristiche usiamo il procedimento di Kronecker.

Il coefficiente in alto a sinistra di A_k è diverso da 0 per cui la matrice A_k ha caratteristica almeno 1.

La sottomatrice di A_k costituita dalla prima e terza riga e prima e terza colonna ha determinante $16 \neq 0$ per cui la matrice A_k ha caratteristica almeno 2.

L'unica orlante della sottomatrice precedente è la matrice intera A_k. Il suo determinante è $16k - 160$ per cui se $k = 10$ la matrice A_k ha caratteristica 2 altrimenti ha caratteristica 3.

Se $k \neq 10$ siamo nel caso di un sistema determinato, con un'unica soluzione.

Se $k = 10$, ci rimane da calcolare la caratteristica di B_k. Abbiamo già visto una sottomatrice di B_k quadrata di ordine 2 con determinante non nullo una cui orlanta è di determinante nullo. Calcoliamo il determinante della matrice costituita dalle prima, terza e quarta colonna di B_k. Esso vale 0, per cui, per il teorema di Kronecker, la matrice B_k ha caratteristica 2. Il sistema quindi ammette una retta di soluzioni.

b) Risolvere il sistema nel caso $k = 10$.

Il sistema che rimane da risolvere è

$$\begin{cases} 4x - 2z = 16 - 8y \\ 4x + 2z = \ \ 8 - 8y \end{cases}$$

(**Esercizio**: perché è stato scelto y come parametro e perché è stata eliminata la seconda equazione?)

La risoluzione non presenta nessuna difficoltà; si trova

$$\begin{cases} x = \ \ 3 - 2y \\ z = -2 \end{cases}$$

(o qualsiasi altra soluzione ad essa equivalente).

Come al solito <u>si deve</u> verificare in brutta copia che queste siano effettivamente soluzioni del sistema.

(**Esercizio**: perché il fatto di verificare che queste sono soluzioni del sistema permette di concludere che sono state trovate tutte le soluzioni e non soltanto alcune?)

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -9 & -2 & k \\ 12 & 4 & -3 \end{pmatrix} ,$$

dipendente da un parametro reale k.

a) Determinare il valore o i valori di k per cui il vettore

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

è un autovettore di A_k.

Abbiamo

$$A_k\underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 + 3k \\ 3 \end{pmatrix}$$

che è, a meno del secondo coefficiente, $\underline{v}$. L'unica scelta perché $\underline{v}$ sia un autovettore è che lo sia per l'autovalore $\lambda_1 = 1$ e dobbiamo allora avere $k = 3$.

b) Determinare gli autovalori e una base degli autospazi della matrice A_k con $k = 3$.

Non ci sono problemi particolari. Il polinomio caratteristico risulta essere

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda - 1)^2$$

Due osservazioni:

(a) tra gli autovalori ci **deve** essere 1;

(b) per calcolare il polinomio caratteristico è caldamente consigliato di aggiungere -3 volte la seconda colonna alla prima.

L'autovalore doppio $\lambda_1 = 1$ risulta regolare e una base (tra tutte quelle possibili) dell'autospazio è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nota: $\underline{v}$ **deve** essere una combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ (abbiamo effettivamente $\underline{v} = 2\underline{v}_1 + \underline{v}_2$).

L'autovalore semplice $\lambda_2 = 0$ è ovviamente regolare e una base dell'autospazio è

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Come al solito <u>si deve</u> verificare in brutta copia che gli autovettori siano effettivamente autovettori di A_3

c) Sempre nel caso $k = 3$, indicare se la matrice è diagonalizzabile.

Sì, la matrice è diagonalizzabile perché gli autovalori sono tutti reali e l'unico autovalore non-semplice ($\lambda_1 = 1$) è regolare.

Esercizio 3. Si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1; 2; 2; 0), \quad \underline{v}_2 = (-1; 1; 0; 4), \quad \underline{v}_3 = (-5; -4; -6; 8), \quad \underline{v}_4 = (1; k; 1; -2).$$

a) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti?

La matrice che ha per colonne i tre vettori,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

ha caratteristica 2. Infatti la sottomatrice quadrata di ordine 2 in basso a sinistra ha il determinante diverso da zero, mentre

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

In conclusione, i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente dipendenti. Più precisamente, $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti e $\underline{v}_3$ è una loro combinazione lineare.

b) Per quali valori di k i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$, $\underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti?

Per nessun valore di k, poiché i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente dipendenti e quindi l'aggiunta di $\underline{v}_4$ non può cambiare la situazione.

c) Per quali valori di k il vettore $\underline{v}_4$ è una combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$?

Per quanto visto nella risposta alla prima domanda, chiedere che $\underline{v}_4$ sia una combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ equivale a chiedere che $\underline{v}_4$ sia una combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$, ossia che la matrice B che ha per colonne $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_4$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

abbia caratteristica 2. Ciò accade se e solo si annullano entrambi i determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix},$$

ossia se e solo se $k = \frac{1}{2}$.

d) Calcolare, al variare di k, la caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & k \\ 2 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le colonne della matrice A sono i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$, $\underline{v}_4$ assegnati all'inizio dell'esercizio. Poiché $\underline{v}_3$ è una combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$, la caratteristica di A coincide con quella della matrice B introdotta nella domanda precedente. Ma abbiamo visto che $\operatorname{car} B = 2$ se e solo se $k = \frac{1}{2}$. Per tutti gli altri valori di k la caratteristica è 3.

Esercizio 4. Si considerino i punti $A(2;3;-1)$, $B(0;5;3)$ e $C(5;6;2)$.

a) Si mostri che il triangolo di vertici A, B, C è isoscele acutangolo e se ne calcoli l'area.

Abbiamo che

$$\overrightarrow{AB} = (-2;2;4), \quad \overrightarrow{AC} = (3;3;3), \quad \overrightarrow{BC} = (5;1;-1),$$

cosicché $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = 27$. Quindi il triangolo è isoscele di base AB. Per dimostrare che è acutangolo basta verificare che l'angolo γ in C è acuto. Ciò segue dal fatto che

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{AC}\|\,\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{5}{9} > 0.$$

L'area del triangolo si può calcolare come $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}\|$. Poiché $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC} = 3(-2; 6; -4)$, si trova che essa è $3\sqrt{14}$.

b) Si scrivano le equazioni parametriche e quelle cartesiane della retta passante per A e B.

Come vettore direzionale della retta si può scegliere il vettore $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 4)$, oppure il vettore $(-1; 1; 2)$. Le equazioni parametriche sono pertanto

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Per ottenere quelle cartesiane basta eliminare t (per esempio ricavandola dalla prima equazione). Si trova

$$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 2x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

c) Si scriva l'equazione del piano passante per A, B e C.

L'equazione del piano cercato è

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia $x - 3y + 2z + 9 = 0$.