Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
11 febbraio 2013 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. La prima domanda è indipendente dalle altre.

a) Calcolare la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso

$$w = \frac{2+2i}{2+3i} - 1 - 4i \ .$$

b) Si considera, per ogni numero complesso z, il numero

$$f(z) = e^{\frac{i\pi}{3}} z + 2 - 2i \ .$$

1. Rappresentare nel piano di Gauss i quattro seguenti numeri complessi:

$$\begin{array}{ll} z_1 = 2 - i \ , & f(z_1) \ , \\ z_2 = 1 - 3i \quad \text{e} & f(z_2) \ . \end{array}$$

   Una volta rappresentati z_1 e z_2 basta fare la rotazione di centro l'origine e angolo $\frac{\pi}{3}$ e traslare il risultato del vettore $(2; -2)$.

2. Esistono complessi z tali che $z = f(z)$? Se esistono non è richiesto di calcolarli.

   Si tratta di risolvere l'equazione

$$z = e^{\frac{i\pi}{3}} z + 2 - 2i$$

   cioè

$$\left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}\right) z = 2 - 2i$$

   il coefficiente di z è diverso da 0 quindi si può dividere e si trova un unico valore di z.

Esercizio 2. a) Per quali valori del parametro a il sottoinsieme

$$W_a = \left\{ \begin{pmatrix} 2x - y + a^2 - 1 \\ -2x + (a+1)y^2 + 2y + 2z \\ x - y - z \\ -2y - 4z \\ -4x + 2y \end{pmatrix} \Bigg| (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^5$?

Non c'è nessuna difficoltà per dimostrare che l'unico valore è $a = -1$.

b) Determinare una base di W_{-1} .

Abbiamo

$$W_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 2x - y \\ -2x + 2y + 2z \\ x - y - z \\ -2y - 4z \\ -4x + 2y \end{pmatrix} \Bigg| (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg| (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Si tratta quindi di determinare quali dei tre vettori sono linearmente indipendenti. Non è difficile scoprire che i primi due sono linearmente indipendenti e il terzo invece è linearmente dipendente dai primi due. Quindi una base di W_{-1} è data dai primi due vettori.

Esercizio 3. Risolvere al variare del parametro k il sistema

$$\begin{cases} 3x + y + 4z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 0 \\ x + 2y + 3z = k \\ y + z = -1 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti ha caratteristica (cioè rango) 2. La matrice completa invece è di caratteristica 3 tranne se $k = -1$, caso in cui è di caratteristica 2. Quindi il sistema ha

soluzioni se e solo se $k = -1$ e in tal caso ammette una retta di soluzioni che passa per i punti di coordinate $(1; -1; 0)$ e $(2; 0; -1)$ (in altre parole: comunque sia scelto il sistema per rappresentare le soluzioni deve essere una retta che contiene queste due soluzioni).

Esercizio 4. Si consideri la conica

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + 15 = 0 \ .$$

a) Si determini (se esiste il centro) della conica.

L'esistenza del centro e le sue coordinate si possono facilmente dedurre dalle risposte alle domande successive. In alternativa, possiamo considerare il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{c} = 0,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Si trova che le coordinate del centro sono $x_C = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $y_C = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) Si trovi la forma canonica della conica e la si riconosca.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $-12xy$, ossia diagonalizzare la matrice B. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 20$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $5(x')^2 + 20(y')^2 + 10x' + 15 = 0$. (Si ricorda che basta trasformare il binomio $2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y$, poiché sappiamo che i termini di secondo grado diventano $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$, mentre il termine noto rimane ovviamente invariato). Abbiamo quindi l'equazione $(x')^2 + 4(y')^2 + 2x' + 3 = 0$, che può essere riscritta come $(x' + 1)^2 + 4(y')^2 + 2 = 0$. Pertanto la traslazione

$$\begin{cases} X = x' + 1 \\ Y = y' \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{\frac{1}{2}} = -1 \ .$$

Si tratta quindi di un'ellisse immaginaria.

c) Si determini la trasformazione di coordinate che porta la conica nella forma canonica.

Basta comporre la rotazione e la traslazione già trovate. Si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(X - 2Y) - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) - \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ponendo $X = 0$ e $Y = 0$ si può verificare che il centro C ha coordinate $x_C = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $y_C = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, come già visto.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
11 febbraio 2013 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. La prima domanda è indipendente dalle altre.

a) Calcolare la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso

$$w = \frac{-1+2i}{2+3i} - 1 - i \ .$$

b) Si considera, per ogni numero complesso z, il numero

$$f(z) = e^{\frac{i\pi}{3}} z + 2 + i \ .$$

1. Rappresentare nel piano di Gauss i quattro seguenti numeri complessi:

$$\begin{array}{ll} z_1 = 2 - i \ , & f(z_1) \ , \\ z_2 = 1 - 3i \quad \text{e} & f(z_2) \ . \end{array}$$

   Una volta rappresentati z_1 e z_2 basta fare la rotazione di centro l'origine e angolo $\frac{\pi}{3}$ e traslare il risultato del vettore $(2; 1)$.

2. Esistono complessi z tali che $z = f(z)$? Se esistono non è richiesto di calcolarli.

   Si tratta di risolvere l'equazione

$$z = e^{\frac{i\pi}{3}} z + 2 + i$$

   cioè

$$\left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}\right) z = 2 + i$$

   il coefficiente di z è diverso da 0 quindi si può dividere e si trova un unico valore di z.

Esercizio 2. a) Per quali valori del parametro a il sottoinsieme

$$W_a = \left\{ \begin{pmatrix} 3x - y + z + a^2 - 4 \\ -x + (a+2)y^2 + 2y + 3z \\ 2x - y \\ x - 2y - 3z \\ -3x + 2y + z \end{pmatrix} \middle| (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^5$?

Non c'è nessuna difficoltà per dimostrare che l'unico valore è $a = -2$.

b) Determinare una base di W_{-2} .

Abbiamo

$$\begin{aligned} W_{-2} &= \left\{ \begin{pmatrix} 3x - y + z \\ -x + 2y + 3z \\ 2x - y \\ x - 2y - 3z \\ -3x + 2y + z \end{pmatrix} \middle| (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Si tratta quindi di determinare quali dei tre vettori sono linearmente indipendenti. Non è difficile scoprire che i primi due sono linearmente indipendenti e il terzo invece è linearmente dipendente dai primi due. Quindi una base di W_{-2} è data dai primi due vettori.

Esercizio 3. Risolvere al variare del parametro k il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + 5z = 1 \\ 2y + 2z = k \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti ha caratteristica (cioè rango) 2. La matrice completa invece è di caratteristica 3 tranne se $k = -2$, caso in cui è di caratteristica 2. Quindi il sistema ha

soluzioni se e solo se $k = -2$ e in tal caso ammette una retta di soluzioni che passa per i punti di coordinate $(1; -1; 0)$ e $(2; 0; -1)$ (in altre parole: comunque sia scelto il sistema per rappresentare le soluzioni deve essere una retta che contiene queste due soluzioni).

Esercizio 4. Si consideri la conica

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + 10 = 0\ .$$

a) Si determini (se esiste il centro) della conica.

   L'esistenza del centro e le sue coordinate si possono facilmente dedurre dalle risposte alle domande successive. In alternativa, possiamo considerare il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{c} = 0,$$

   dove

$$B = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

   Si trova che le coordinate del centro sono $x_C = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $y_C = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) Si trovi la forma canonica della conica e la si riconosca.

   Bisogna anzitutto eliminare il termine $-12xy$, ossia diagonalizzare la matrice B. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 20$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

   La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \end{cases}$$

   e la nuova equazione della conica è $5(x')^2 + 20(y')^2 + 10x' + 10 = 0$. (Si ricorda che basta trasformare il binomio $2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y$, poiché sappiamo che i termini di secondo grado diventano $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$, mentre il termine noto rimane ovviamente invariato). Abbiamo quindi l'equazione $(x')^2 + 4(y')^2 + 2x' + 2 = 0$, che può essere riscritta come $(x' + 1)^2 + 4(y')^2 + 1 = 0$. Pertanto la traslazione

$$\begin{cases} X = x' + 1 \\ Y = y' \end{cases}$$

   porta la conica nella forma canonica

$$\frac{X^2}{1} + \frac{Y^2}{\frac{1}{4}} = -1\ .$$

   Si tratta quindi di un'ellisse immaginaria.

c) Si determini la trasformazione di coordinate che porta la conica nella forma canonica.

Basta comporre la rotazione e la traslazione già trovate. Si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(X - 2Y) - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) - \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ponendo $X = 0$ e $Y = 0$ si può verificare che il centro C ha coordinate $x_C = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $y_C = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, come già visto.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
11 febbraio 2013 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. La prima domanda è indipendente dalle altre.

a) Calcolare la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso

$$w = \frac{1+2i}{2-3i} - 1 - 3i \ .$$

b) Si considera, per ogni numero complesso z, il numero

$$f(z) = e^{-\frac{i\pi}{3}} z + 2 - i \ .$$

1. Rappresentare nel piano di Gauss i quattro seguenti numeri complessi:

$$\begin{array}{lcl} z_1 = 2 - i \ , & & f(z_1) \ , \\ z_2 = 1 - 3i & \text{e} & f(z_2) \ . \end{array}$$

   Una volta rappresentati z_1 e z_2 basta fare la rotazione di centro l'origine e angolo $-\frac{\pi}{3}$ e traslare il risultato del vettore $(2; -1)$.

2. Esistono complessi z tali che $z = f(z)$? Se esistono non è richiesto di calcolarli.

   Si tratta di risolvere l'equazione

$$z = e^{-\frac{i\pi}{3}} z + 2 - i$$

   cioè

$$\left(1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right) z = 2 - i$$

   il coefficiente di z è diverso da 0 quindi si può dividere e si trova un unico valore di z.

Esercizio 2. a) Per quali valori del parametro a il sottoinsieme

$$W_a = \left\{ \begin{pmatrix} 4x - y + 2z + a^2 - 1 \\ (a-1)y^2 + 2y + 4z \\ 3x - y + z \\ 2x - 2y - 2z \\ -2x + 2y + 2z \end{pmatrix} \middle| (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^5$?

Non c'è nessuna difficoltà per dimostrare che l'unico valore è $a = 1$.

b) Determinare una base di W_1 .

Abbiamo

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 4x - y + 2z \\ 2y + 4z \\ 3x - y + z \\ 2x - 2y - 2z \\ -2x + 2y + 2z \end{pmatrix} \middle| (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Si tratta quindi di determinare quali dei tre vettori sono linearmente indipendenti. Non è difficile scoprire che i primi due sono linearmente indipendenti e il terzo invece è linearmente dipendente dai primi due. Quindi una base di W_1 è data dai primi due vettori.

Esercizio 3. Risolvere al variare del parametro k il sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 4x + 2y + 6z = 2 \\ -x + 2y + z = k \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti ha caratteristica (cioè rango) 2. La matrice completa invece è di caratteristica 3 tranne se $k = -3$, caso in cui è di caratteristica 2. Quindi il sistema ha

soluzioni se e solo se $k = -3$ e in tal caso ammette una retta di soluzioni che passa per i punti di coordinate $(1; -1; 0)$ e $(2; 0; -1)$ (in altre parole: comunque sia scelto il sistema per rappresentare le soluzioni deve essere una retta che contiene queste due soluzioni).

Esercizio 4. Si consideri la conica

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + 25 = 0 \ .$$

a) Si determini (se esiste il centro) della conica.

L'esistenza del centro e le sue coordinate si possono facilmente dedurre dalle risposte alle domande successive. In alternativa, possiamo considerare il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{c} = 0,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Si trova che le coordinate del centro sono $x_C = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $y_C = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) Si trovi la forma canonica della conica e la si riconosca.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $-12xy$, ossia diagonalizzare la matrice B. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 20$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $5(x')^2 + 20(y')^2 + 10x' + 25 = 0$. (Si ricorda che basta trasformare il binomio $2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y$, poiché sappiamo che i termini di secondo grado diventano $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$, mentre il termine noto rimane ovviamente invariato). Abbiamo quindi l'equazione $(x')^2 + 4(y')^2 + 2x' + 5 = 0$, che può essere riscritta come $(x' + 1)^2 + 4(y')^2 + 4 = 0$. Pertanto la traslazione

$$\begin{cases} X = x' + 1 \\ Y = y' \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{1} = -1 \ .$$

Si tratta quindi di un'ellisse immaginaria.

c) Si determini la trasformazione di coordinate che porta la conica nella forma canonica.

Basta comporre la rotazione e la traslazione già trovate. Si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(X - 2Y) - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) - \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ponendo $X = 0$ e $Y = 0$ si può verificare che il centro C ha coordinate $x_C = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $y_C = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, come già visto.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
11 febbraio 2013 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. La prima domanda è indipendente dalle altre.

a) Calcolare la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso

$$w = \frac{3+2i}{2-3i} - 1 - 5i \ .$$

b) Si considera, per ogni numero complesso z, il numero

$$f(z) = e^{-\frac{i\pi}{3}} z + 2 - 3i \ .$$

1. Rappresentare nel piano di Gauss i quattro seguenti numeri complessi:

$$\begin{array}{ll} z_1 = 2 - i \ , & f(z_1) \ , \\ z_2 = 1 - 3i \quad \text{e} & f(z_2) \ . \end{array}$$

   Una volta rappresentati z_1 e z_2 basta fare la rotazione di centro l'origine e angolo $-\frac{\pi}{3}$ e traslare il risultato del vettore $(2; -3)$.

2. Esistono complessi z tali che $z = f(z)$? Se esistono non è richiesto di calcolarli.

   Si tratta di risolvere l'equazione

$$z = e^{-\frac{i\pi}{3}} z + 2 - 3i$$

   cioè

$$\left(1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right) z = 2 - 3i$$

   il coefficiente di z è diverso da 0 quindi si può dividere e si trova un unico valore di z.

Esercizio 2. a) Per quali valori del parametro a il sottoinsieme

$$W_a = \left\{ \begin{pmatrix} 5x - y + 3z + a^2 - 4 \\ x + (a-2)y^2 + 2y + 5z \\ 4x - y + 2z \\ 3x - 2y - z \\ -x + 2y + 3z \end{pmatrix} \middle| (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^5$?

Non c'è nessuna difficoltà per dimostrare che l'unico valore è $a = 2$.

b) Determinare una base di W_2 .

Abbiamo

$$\begin{aligned} W_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 5x - y + 3z \\ x + 2y + 5z \\ 4x - y + 2z \\ 3x - 2y - z \\ -x + 2y + 3z \end{pmatrix} \middle| (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Si tratta quindi di determinare quali dei tre vettori sono linearmente indipendenti. Non è difficile scoprire che i primi due sono linearmente indipendenti e il terzo invece è linearmente dipendente dai primi due. Quindi una base di W_2 è data dai primi due vettori.

Esercizio 3. Risolvere al variare del parametro k il sistema

$$\begin{cases} \quad\;\; y + z = -1 \\ 5x + 2y + 7z = 3 \\ -2x + 2y = k \\ 3x + y + 4z = 2 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti ha caratteristica (cioè rango) 2. La matrice completa invece è di caratteristica 3 tranne se $k = -4$, caso in cui è di caratteristica 2. Quindi il sistema ha

soluzioni se e solo se $k = -4$ e in tal caso ammette una retta di soluzioni che passa per i punti di coordinate $(1; -1; 0)$ e $(2; 0; -1)$ (in altre parole: comunque sia scelto il sistema per rappresentare le soluzioni deve essere una retta che contiene queste due soluzioni).

Esercizio 4. Si consideri la conica

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + 20 = 0 \ .$$

a) Si determini (se esiste il centro) della conica.

L'esistenza del centro e le sue coordinate si possono facilmente dedurre dalle risposte alle domande successive. In alternativa, possiamo considerare il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{c} = 0,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Si trova che le coordinate del centro sono $x_C = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $y_C = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) Si trovi la forma canonica della conica e la si riconosca.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $-12xy$, ossia diagonalizzare la matrice B. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 20$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $5(x')^2 + 20(y')^2 + 10x' + 20 = 0$. (Si ricorda che basta trasformare il binomio $2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y$, poiché sappiamo che i termini di secondo grado diventano $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$, mentre il termine noto rimane ovviamente invariato). Abbiamo quindi l'equazione $(x')^2 + 4(y')^2 + 2x' + 4 = 0$, che può essere riscritta come $(x' + 1)^2 + 4(y')^2 + 3 = 0$. Pertanto la traslazione

$$\begin{cases} X = x' + 1 \\ Y = y' \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{\frac{3}{4}} = -1 \ .$$

Si tratta quindi di un'ellisse immaginaria.

c) Si determini la trasformazione di coordinate che porta la conica nella forma canonica.

Basta comporre la rotazione e la traslazione già trovate. Si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(X - 2Y) - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) - \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ponendo $X = 0$ e $Y = 0$ si può verificare che il centro C ha coordinate $x_C = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $y_C = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, come già visto.