Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
24 gennaio 2013 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia

$$z = \frac{(\sqrt{3}-i)(1-i)}{(1+i)^2}$$

Determinare parte reale, parte immaginaria, modulo e argomento di z^6.

Poniamo $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 - i$ e $z_3 = 1 + i$. Allora

$$|z_1| = 2, \quad \text{e} \quad |z_2| = |z_3| = \sqrt{2}\ ,$$

mentre

$$\arg z_1 = -\frac{\pi}{6}, \quad \arg z_2 = -\frac{\pi}{4}, \quad \arg z_3 = \frac{\pi}{4}$$

quindi

$$|z| = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

e

$$\arg z = \arg z_1 + \arg z_2 - 2\arg z_3 = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} - 2\frac{\pi}{4} = -\frac{11\pi}{12}\ .$$

Quindi

$$|z^6| = |z|^6 = 8 \quad \text{e} \quad \arg z^6 = 6\arg z = -\frac{11\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,$$

La parte reale di z^6 è quindi 0 mentre la sua parte immaginaria è 8.

Esercizio 2. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V.

a) $V_1 = \mathbb{R}^3$ e $W_1 = \{(x; y; z) : 2x + 3y + z = 0\}$;

Possiamo riconoscere il piano ortogonale al vettore $(2; 3; 1)$, oppure osservare che se $(x; y; z) \in W_1$, allora $z = -2x - 3y$ e quindi $(x; y; z) = x(1; 0; -2) + y(0; 1; -3)$ e quindi si tratta del sottospazio generato dai vettori $(1; 0; 2)$ e $(0; 1; -3)$.

b) $V_2 = \mathbb{R}[x]$ (lo spazio dei polinomi) e $W_2 = \{P \in V_2 : P(1)P'(1) = 1\}$;

Il vettore nullo, cioè il polinomio costante uguale a 0, non appartiene al sottoinsieme, quindi non può essere un sottospazio vettoriale.

c) Determinare i valori di k tali che $W_3 = \left\{ f \in V_3 : \int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t = -k^2 + 2k - 1 \right\}$ sia un sottospazio vettoriale di $V_3 = \{\text{funzioni continue da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R}\}$.

Per essere un sottospazio vettoriale, W_3 deve contenere la funzione nulla. L'integrale della funzione nulla sarà 0, quindi dobbiamo avere $-k^2 + 2k - 1 = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono $k = 1$ (soluzione doppia). In quel caso, il sottoinsieme W_3 diventa $W_3 = \left\{ f \in V_3 : \int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ e diventa relativamente ovvio che è un sottospazio vettoriale. Infatti la funzione nulla ci appartiene e quindi è non vuoto. Inoltre se f e g sono due elementi di W_3 e λ e μ sono due reali, allora

$$\begin{aligned}\int_0^5 (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^5 \lambda f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^5 \mu g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_0^5 g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda 0 + \mu 0 = 0.\end{aligned}$$

Esercizio 3. Sia la matrice A dipendente di un parametro reale a data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare $\det(A - 2I_3)$.

È uguale a 0, indipendentemente da a (due righe risultano uguali).

b) Dedurre dalla domanda precedente un autolvalore λ_1 di A.

$$\lambda_1 = 2 .$$

c) Verificare che $\underline{u}_1 = (2a + 1, 3, a - 1)^t$ è un autovettore di A.

$Au_1 = 2u_1 = \lambda_1 u_1$ e quindi siccome $\underline{u}_1 \neq \underline{0}$, $\underline{u}_1$ è un autovettore di A.

d) Calcolare il polinomio caratteristico di A.

$$P_A = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + a\lambda - 2a = -(\lambda^2 - a)(\lambda - 2) .$$

e) Discutere al variare di a la diagonalizzabilità di A.

Per $a < 0$ il polinomio caratteristico ha una radice reale $\lambda_1 = 2$ e due radici non reali per cui la matrice non è diagonalizzabile.

Se $a \geqslant 0$ gli autovalori di A sono $\pm\sqrt{a}$ e 2. In particolare se $a = 0$ l'autovalore $\lambda_2 = 0$ è doppio (e l'autovalore $\lambda_1 = 2$ è semplice), se $a = 4$ l'autovalore $\lambda_1 = 2$ è doppio (e l'autovalore $\lambda_2 = -2$ è semplice) e negli altri casi gli autovalori sono semplici.

Se $a = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è di rango 2 (perché le due prime colonne non sono proporzionali quindi è di rango almeno 2 e non può essere di rango 3 perché il suo determinante è 0) quindi l'autospazio per l'autovalore $\lambda_2 = 0$ è di dimensione $3 - 2 = 1$. Perciò l'autovalore λ_2 non è regolare e la matrice non è diagonalizzabile.

Se $a = 4$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

e di nuovo la matrice $A - 2I_3$ è di rango 2 per cui l'autovalore λ_1 di A non è regolare e quindi A non è diagonalizzabile.

Se $a > 0$ e $a \neq 4$ la matrice A ha tre autovalori reali e distinti e quindi semplici per cui risulta diagonalizzabile.

Esercizio 4. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 20x + 10y - 20z + 24 = 0.$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & -10 \\ -2 & 1 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & 4 & -10 \\ -10 & 5 & -10 & 24 \end{pmatrix}.$$

I punti doppi di σ sono determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 4x - 2y + 4z - 10 = 0 \\ -2x + y - 2z + 5 = 0 \\ 4x - 2y + 4z - 10 = 0 \\ -10x + 5y - 10z + 24 = 0 \end{cases}$$

Dal confronto tra la seconda e la quarta equazione è immediato concludere che il sistema è impossibile; quindi la quadrica non ha punti doppi.

b) Dopo aver verificato che il punto $C(0;-2;1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano π tangente a σ nel punto C.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di C nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(0,-2,1,1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ossia $2x - y + 2z - 4 = 0$.

c) Verificare che il piano π è contenuto nella quadrica σ.

Basta sostituire $y = 2x + 2z - 4$ nell'equazione di σ e verificare che si ottiene un'identità.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ non ha punti doppi e contiene un piano, essa è costituita da due piani paralleli. A conferma di ciò, si può verificare che il polinomio che la definisce si fattorizza come $(2x - y + 2z - 4)(2x - y + 2z - 6)$.

ATTENZIONE! Non sono richieste né la forma canonica, né la trasformazione che porta σ in forma canonica.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
24 gennaio 2013 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia
$$z = \frac{(\sqrt{3}+i)(1+i)}{(1-i)^2}$$
Determinare parte reale, parte immaginaria, modulo e argomento di z^6.

Poniamo $z_1 = \sqrt{3}+i$, $z_2 = 1+i$ e $z_3 = 1-i$. Allora
$$|z_1| = 2, \quad \text{e} \quad |z_2| = |z_3| = \sqrt{2}\ ,$$
mentre
$$\arg z_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \arg z_2 = \frac{\pi}{4}, \quad \arg z_3 = -\frac{\pi}{4}$$
quindi
$$|z| = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$
e
$$\arg z = \arg z_1 + \arg z_2 - 2\arg z_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{12}\ .$$
Quindi
$$|z^6| = |z|^6 = 8 \quad \text{e} \quad \arg z^6 = 6\arg z = \frac{11\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,$$
La parte reale di z^6 è quindi 0 mentre la sua parte immaginaria è -8.

Esercizio 2. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V.

a) $V_1 = \mathbb{R}^4$ e $W_1 = \{(x;y;z;t) : 2x - 3y + z + t = 2\}$;

Il vettore nullo, cioè $(0;0;0)$, non appartiene al sottoinsieme, quindi non può essere un sottospazio vettoriale.

b) $V_2 = \mathbb{R}[x]$ (lo spazio dei polinomi) e $W_2 = \{P \in V_2 : P'(-1) = 0\}$;

Il vettore nullo, cioè il polinomio costante uguale a 0, appartiene al sottoinsieme, quindi non è vuoto. Dati due polinomio P e Q tali che $P'(-1) = Q'(-1) = 0$ e due reali λ e μ, $(\lambda P + \mu Q)'(-1) = \lambda P'(-1) + \mu Q'(-1) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$ quindi W_2 è un sottospazio vettoriale.

c) Determinare i valori di k tali che $W_3 = \left\{ f \in V_3 : \int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = -2k^2 + 5k - 2 \right\}$ sia un sottospazio vettoriale di $V_3 = \{\text{funzioni continue da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R}\}$.

Per essere un sottospazio vettoriale, W_3 deve contenere la funzione nulla. L'integrale della funzione nulla sarà 0, quindi dobbiamo avere $-2k^2 + 5k - 2 = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono $k = 2$ e $k = \frac{1}{2}$. In quel caso, il sottoinsieme W_3 diventa $W_3 = \left\{ f \in V_3 : \int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ e diventa relativamente ovvio che è un sottospazio vettoriale. Infatti la funzione nulla ci appartiene e quindi è non vuoto. Inoltre se f e g sono due elementi di W_3 e λ e μ sono due reali, allora

$$\begin{aligned} \int_0^4 (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^4 \lambda f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^4 \mu g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_0^4 g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda 0 + \mu 0 = 0. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Sia la matrice A dipendente di un parametro reale a data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare $\det(A - 2I_3)$.

È uguale a 0, indipendentemente da a (due righe risultano uguali).

b) Dedurre dalla domanda precedente un autolvalore λ_1 di A.

$$\lambda_1 = 2\ .$$

c) Verificare che $\underline{u}_1 = (2a + 1, a - 1, 3)^t$ è un autovettore di A.

$Au_1 = 2u_1 = \lambda_1 u_1$ e quindi siccome $\underline{u}_1 \neq \underline{0}$, $\underline{u}_1$ è un autovettore di A.

d) Calcolare il polinomio caratteristico di A.

$$P_A = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + a\lambda - 2a = -(\lambda^2 - a)(\lambda - 2) \ .$$

e) Discutere al variare di a la diagonalizzabilità di A.

Per $a < 0$ il polinomio caratteristico ha una radice reale $\lambda_1 = 2$ e due radici non reali per cui la matrice non è diagonalizzabile.

Se $a \geqslant 0$ gli autovalori di A sono $\pm\sqrt{a}$ e 2. In particolare se $a = 0$ l'autovalore $\lambda_2 = 0$ è doppio (e l'autovalore $\lambda_1 = 2$ è semplice), se $a = 4$ l'autovalore $\lambda_1 = 2$ è doppio (e l'autovalore $\lambda_2 = -2$ è semplice) e negli altri casi gli autovalori sono semplici.

Se $a = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

è di rango 2 (perché le due prime colonne non sono proporzionali quindi è di rango almeno 2 e non può essere di rango 3 perché il suo determinante è 0) quindi l'autospazio per l'autovalore $\lambda_2 = 0$ è di dimensione $3 - 2 = 1$. Perciò l'autovalore λ_2 non è regolare e la matrice non è diagonalizzabile.

Se $a = 4$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

e di nuovo la matrice $A - 2I_3$ è di rango 2 per cui l'autovalore λ_1 di A non è regolare e quindi A non è diagonalizzabile.

Se $a > 0$ e $a \neq 4$ la matrice A ha tre autovalori reali e distinti e quindi semplici per cui risulta diagonalizzabile.

Esercizio 4. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 12x + 6y - 12z + 8 = 0.$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & 4 & -6 \\ -6 & 3 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

I punti doppi di σ sono determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 4x - 2y + 4z - 6 = 0 \\ -2x + y - 2z + 3 = 0 \\ 4x - 2y + 4z - 6 = 0 \\ -6x + 3y - 6z + 8 = 0 \end{cases}$$

Dal confronto tra la seconda e la quarta equazione è immediato concludere che il sistema è impossibile; quindi la quadrica non ha punti doppi.

b) Dopo aver verificato che il punto $C(0; -2; 1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano π tangente a σ nel punto C.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di C nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(0, -2, 1, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ossia $2x - y + 2z - 4 = 0$.

c) Verificare che il piano π è contenuto nella quadrica σ.

Basta sostituire $y = 2x + 2z - 4$ nell'equazione di σ e verificare che si ottiene un'identità.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ non ha punti doppi e contiene un piano, essa è costituita da due piani paralleli. A conferma di ciò, si può verificare che il polinomio che la definisce si fattorizza come $(2x - y + 2z - 4)(2x - y + 2z - 2)$.

ATTENZIONE! Non sono richieste né la forma canonica, né la trasformazione che porta σ in forma canonica.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
24 gennaio 2013 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia

$$z = \frac{(\sqrt{3} - i)(1 + i)}{(1 - i)^2}$$

Determinare parte reale, parte immaginaria, modulo e argomento di z^6.

Poniamo $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 + i$ e $z_3 = 1 - i$. Allora

$$|z_1| = 2, \quad \text{e} \quad |z_2| = |z_3| = \sqrt{2} \ ,$$

mentre

$$\arg z_1 = -\frac{\pi}{6}, \quad \arg z_2 = \frac{\pi}{4}, \quad \arg z_3 = -\frac{\pi}{4}$$

quindi

$$|z| = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

e

$$\arg z = \arg z_1 + \arg z_2 - 2 \arg z_3 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} \ .$$

Quindi

$$|z^6| = |z|^6 = 8 \quad \text{e} \quad \arg z^6 = 6 \arg z = \frac{7\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ,$$

La parte reale di z^6 è quindi 0 mentre la sua parte immaginaria è -8.

Esercizio 2. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. <u>Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V</u>.

a) $V_1 = \mathbb{R}^3$ e $W_1 = \{(x + 3y; 2y - 3x; 3y) : x, y \in \mathbb{R}\}$;

   Siccome $(x+3y; 2y-3x; 3y) = x(1; -3; 0)+y(3; 2; 3)$, si tratta del sottospazio generato dai vettori $(1; -3; 0)$ e $(3; 2; 3)$.

b) $V_2 = \mathbb{R}[x]$ (lo spazio dei polinomi) e $W_2 = \{P \in V_2 : P(3) = 1\}$;

Il vettore nullo, cioè il polinomio costante uguale a 0, non appartiene al sottoinsieme, quindi non può essere un sottospazio vettoriale.

c) Determinare i valori di k tali che $W_3 = \left\{ f \in V_3 : \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t = k^2 + 2k + 1 \right\}$ sia un sottospazio vettoriale di $V_3 = \{$funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}\}$.

Per essere un sottospazio vettoriale, W_3 deve contenere la funzione nulla. L'integrale della funzione nulla sarà 0, quindi dobbiamo avere $k^2 + 2k + 1 = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono $k = -1$ (soluzione doppia). In quel caso, il sottoinsieme W_3 diventa $W_3 = \left\{ f \in V_3 : \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ e diventa relativamente ovvio che è un sottospazio vettoriale. Infatti la funzione nulla ci appartiene e quindi è non vuoto. Inoltre se f e g sono due elementi di W_3 e λ e μ sono due reali, allora

$$\begin{aligned}\int_1^3 (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^3 \lambda f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^3 \mu g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_1^3 g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda 0 + \mu 0 = 0.\end{aligned}$$

Esercizio 3. Sia la matrice A dipendente di un parametro reale a data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare $\det(A - 2I_3)$.

È uguale a 0, indipendentemente da a (due righe risultano uguali).

b) Dedurre dalla domanda precedente un autolvalore λ_1 di A.

$$\lambda_1 = 2 \;.$$

c) Verificare che $\underline{u}_1 = (3, 2a + 1, a - 1)^t$ è un autovettore di A.

$Au_1 = 2u_1 = \lambda_1 u_1$ e quindi siccome $\underline{u}_1 \neq \underline{0}$, $\underline{u}_1$ è un autovettore di A.

d) Calcolare il polinomio caratteristico di A.

$$P_A = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + a\lambda - 2a = -(\lambda^2 - a)(\lambda - 2) \;.$$

e) Discutere al variare di a la diagonalizzabilità di A.

Per $a < 0$ il polinomio caratteristico ha una radice reale $\lambda_1 = 2$ e due radici non reali per cui la matrice non è diagonalizzabile.

Se $a \geqslant 0$ gli autovalori di A sono $\pm\sqrt{a}$ e 2. In particolare se $a = 0$ l'autovalore $\lambda_2 = 0$ è doppio (e l'autovalore $\lambda_1 = 2$ è semplice), se $a = 4$ l'autovalore $\lambda_1 = 2$ è doppio (e l'autovalore $\lambda_2 = -2$ è semplice) e negli altri casi gli autovalori sono semplici.

Se $a = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è di rango 2 (perché le due prime colonne non sono proporzionali quindi è di rango almeno 2 e non può essere di rango 3 perché il suo determinante è 0) quindi l'autospazio per l'autovalore $\lambda_2 = 0$ è di dimensione $3 - 2 = 1$. Perciò l'autovalore λ_2 non è regolare e la matrice non è diagonalizzabile.

Se $a = 4$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

e di nuovo la matrice $A - 2I_3$ è di rango 2 per cui l'autovalore λ_1 di A non è regolare e quindi A non è diagonalizzabile.

Se $a > 0$ e $a \neq 4$ la matrice A ha tre autovalori reali e distinti e quindi semplici per cui risulta diagonalizzabile.

Esercizio 4. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 16 = 0.$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}.$$

I punti doppi di σ sono determinati dalla condizione

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases}4x-2y+4z=0\\-2x+y-2z=0\\4x-2y+4z=0\\-16=0\end{cases}$$

Dal confronto tra la seconda e la quarta equazione è immediato concludere che il sistema è impossibile; quindi la quadrica non ha punti doppi.

b) Dopo aver verificato che il punto $C(0;-2;1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano π tangente a σ nel punto C.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di C nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(0,-2,1,1)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=0,$$

ossia $2x-y+2z-4=0$.

c) Verificare che il piano π è contenuto nella quadrica σ.

Basta sostituire $y=2x+2z-4$ nell'equazione di σ e verificare che si ottiene un'identità.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ non ha punti doppi e contiene un piano, essa è costituita da due piani paralleli. A conferma di ciò, si può verificare che il polinomio che la definisce si fattorizza come $(2x-y+2z-4)(2x-y+2z+4)$.

ATTENZIONE! Non sono richieste né la forma canonica, né la trasformazione che porta σ in forma canonica.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
24 gennaio 2013 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia

$$z = \frac{(\sqrt{3}+i)(1-i)}{(1+i)^2}$$

Determinare parte reale, parte immaginaria, modulo e argomento di z^6.

Poniamo $z_1 = \sqrt{3}+i$, $z_2 = 1-i$ e $z_3 = 1+i$. Allora

$$|z_1| = 2, \quad \text{e} \quad |z_2| = |z_3| = \sqrt{2}\ ,$$

mentre

$$\arg z_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \arg z_2 = -\frac{\pi}{4}, \quad \arg z_3 = \frac{\pi}{4}$$

quindi

$$|z| = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

e

$$\arg z = \arg z_1 + \arg z_2 - 2\arg z_3 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} - 2\frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{12}\ .$$

Quindi

$$|z^6| = |z|^6 = 8 \quad \text{e} \quad \arg z^6 = 6\arg z = -\frac{7\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,$$

La parte reale di z^6 è quindi 0 mentre la sua parte immaginaria è 8.

Esercizio 2. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V.

a) $V_1 = \mathbb{R}^3$ e $W_1 = \{(x - 3y; 5x + y; xy) : x, y \in \mathbb{R}\}$;

I vettori $(1; 5; 0)$ $(x = 1,\ y = 0)$ e $(-3; 1; 0)$ $(x = 0,\ y = 1)$ appartengono a W_1, però la loro somma $\underline{v} = (-2; 6; 0)$ non ci appartiene. Infatti per appartenere al questo insieme dovrebbe essere della forma $\underline{v} = (x - 3y; 5x + y; xy)$, quindi o $x = 0$ o $y = 0$. Se $x = 0$, dobbiamo avere $y = 6$ (per la seconda componente), ma la prima sarebbe -18; se invece $y = 0$, dobbiamo avere $x = -2$ (per la prima componente), ma la seconda sarebbe -10. Quindi non è un sottospazio vettoriale.

b) $V_2 = \mathbb{R}_3[x]$ e $W_2 = \left\{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in V_2 : 2a_3 + a_1 = 0\right\}$. Ricordiamo che $\mathbb{R}_3[x]$ è lo spazio dei polinomi di grado al massimo 3;

Il vettore nullo, cioè il polinomio costante uguale a 0, appartiene al sottoinsieme, quindi non è vuoto. Dati due polinomio $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $Q(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ tali che $2a_3 + a_1 = 0$ e $2b_3 + b_1 = 0$ e due reali λ e μ, abbiamo $(\lambda P + \mu Q) = (\lambda a_3 + \mu b_3)x^3 + (\lambda a_2 + \mu b_2)x^2 + (\lambda a_1 + \mu b_1)x + \lambda a_0 + \mu b_0$ quindi $2(\lambda a_3 + \mu b_3) + \lambda a_1 + \mu b_1 = 2\lambda a_3 + \lambda a_1 + 2\mu b_3 + \mu b_1 = \lambda 0 + \mu 0 = 0$ e quindi W_2 è un sottospazio vettoriale.

c) Determinare i valori di k tali che $W_3 = \left\{f \in V_3 : \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2k^2 + 5k + 2\right\}$ sia un sottospazio vettoriale di $V_3 = \{\text{funzioni continue da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R}\}$.

Per essere un sottospazio vettoriale, W_3 deve contenere la funzione nulla. L'integrale della funzione nulla sarà 0, quindi dobbiamo avere $2k^2 + 5k + 2 = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono $k = -2$ e $k = -\frac{1}{2}$. In quel caso, il sottoinsieme W_3 diventa $W_3 = \left\{f \in V_3 : \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$ e diventa relativamente ovvio che è un sottospazio vettoriale. Infatti la funzione nulla ci appartiene e quindi è non vuoto. Inoltre se f e g sono due elementi di W_3 e λ e μ sono due reali, allora

$$\begin{aligned}\int_1^2 (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^2 \lambda f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \mu g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_1^2 g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda 0 + \mu 0 = 0.\end{aligned}$$

Esercizio 3. Sia la matrice A dipendente di un parametro reale a data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare $\det(A - 2I_3)$.

È uguale a 0, indipendentemente da a (due righe risultano uguali).

b) Dedurre dalla domanda precedente un autolvalore λ_1 di A.

$$\lambda_1 = 2 \ .$$

c) Verificare che $\underline{u}_1 = (3, a-1, 2a+1)^t$ è un autovettore di A.

$Au_1 = 2u_1 = \lambda_1 u_1$ e quindi siccome $\underline{u}_1 \neq \underline{0}$, $\underline{u}_1$ è un autovettore di A.

d) Calcolare il polinomio caratteristico di A.

$$P_A = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + a\lambda - 2a = -(\lambda^2 - a)(\lambda - 2) \ .$$

e) Discutere al variare di a la diagonalizzabilità di A.

Per $a < 0$ il polinomio caratteristico ha una radice reale $\lambda_1 = 2$ e due radici non reali per cui la matrice non è diagonalizzabile.

Se $a \geqslant 0$ gli autovalori di A sono $\pm\sqrt{a}$ e 2. In particolare se $a = 0$ l'autovalore $\lambda_2 = 0$ è doppio (e l'autovalore $\lambda_1 = 2$ è semplice), se $a = 4$ l'autovalore $\lambda_1 = 2$ è doppio (e l'autovalore $\lambda_2 = -2$ è semplice) e negli altri casi gli autovalori sono semplici.

Se $a = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

è di rango 2 (perché le due prime colonne non sono proporzionali quindi è di rango almeno 2 e non può essere di rango 3 perché il suo determinante è 0) quindi l'autospazio per l'autovalore $\lambda_2 = 0$ è di dimensione $3 - 2 = 1$. Perciò l'autovalore λ_2 non è regolare e la matrice non è diagonalizzabile.

Se $a = 4$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e di nuovo la matrice $A - 2I_3$ è di rango 2 per cui l'autovalore λ_1 di A non è regolare e quindi A non è diagonalizzabile.

Se $a > 0$ e $a \neq 4$ la matrice A ha tre autovalori reali e distinti e quindi semplici per cui risulta diagonalizzabile.

Esercizio 4. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 4x + 2y - 4z - 8 = 0.$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

I punti doppi di σ sono determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 4x - 2y + 4z - 2 = 0 \\ -2x + y - 2z + 1 = 0 \\ 4x - 2y + 4z - 2 = 0 \\ -2x + y - 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

Dal confronto tra la seconda e la quarta equazione è immediato concludere che il sistema è impossibile; quindi la quadrica non ha punti doppi.

b) Dopo aver verificato che il punto $C(0; -2; 1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano π tangente a σ nel punto C.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di C nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(0, -2, 1, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ossia $2x - y + 2z - 4 = 0$.

c) Verificare che il piano π è contenuto nella quadrica σ.

Basta sostituire $y = 2x + 2z - 4$ nell'equazione di σ e verificare che si ottiene un'identità.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ non ha punti doppi e contiene un piano, essa è costituita da due piani paralleli. A conferma di ciò, si può verificare che il polinomio che la definisce si fattorizza come $(2x - y + 2z - 4)(2x - y + 2z + 2)$.

ATTENZIONE! Non sono richieste né la forma canonica, né la trasformazione che porta σ in forma canonica.